УДК 518.62-50

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТОРГОВЛИ ПШЕНИЦЕЙ

Семыкина Н.А.
Кафедра компьютерной безопасности
и математических методов управления

Поступила в редакцию 10.04.2007, после переработки 30.05.2007.

Рассматривается модель торговли пшеницей, которая формализована как задача оптимального управления с фазовыми ограничениями.

The model of wheat trading is considered, which is represented as the problem of optimal control with state restrictions.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимальное управление, фазовые ограничения.
Keywords: mathematical modelling, optimal control, state restrictions.

По мере развития хозяйства уменьшается доля естественных и возрастает промышленных продуктов питания. Но до сих пор основная часть мирового населения потребляет естественное и культивируемое продовольствие. Рост производства зерна — главного вида продовольствия в развивающемся мире, стал сильно отставать от темпов роста населения. Менее всего это коснулось развитых стран, где потребление продовольственного зерна давно уже начало сокращаться за счет введения в пищевой рацион других продуктов. Однако и в западных, богатых странах часто говорят о продовольственной проблеме.

Сельскохозяйственный год в отношении баланса зерна начинается 1 июля и при его составлении учитывается урожай как текущего, так и прошлого годов. Таким образом, в будущем объемы продаж будут зависеть от размера урожая текущего года.

Введем обозначения. Пусть $x(t)$ — либо покупательная, либо торговая ставка. $v(t) > 0$ — средняя скорость закупки, $v(t) < 0$ — средняя скорость продажи. Динамика изменения количества пшеницы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = v(t) - d(t) - ax(t), \tag{1}$$

с заданными начальными условиями

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $d(t)$ — показатель спроса на данный продукт, a — коэффициент скорости порчи пшеницы.

Будем рассматривать скорость купли-продажи как управляющий параметр. Ограничения на функцию управления заданы в виде двойного неравенства.

$$v_{min} \leq v(t) \leq v_{max}, \tag{3}$$

где v_{min} — максимальная скорость продажи, v_{max} — максимальная скорость закупки.

Фазовые ограничения, заданные двойным неравенством, вытекают из физического смысла задачи.

$$0 \leq x(t) \leq w \tag{4}$$

Задача заключается в получении максимальной прибыли с учетом трат на хранение пшеницы. То есть цель управления состоит в отыскании максимума функционала $J(v)$ на множестве допустимых процессов (1), (2) при ограничениях на управление (3).

$$J(v) = \int_0^T e^{-rt}[-p(t)v(t) - h(x(t),t)]dt + e^{-rT}Sx(T) \tag{5}$$

Здесь $r(const)$ — дисконтирующий множитель; $p(t)$ — функция цены, по которой мы либо продаем, либо покупаем пшеницу; S — конечная цена, которая может быть не равна $p(t)$; $h(x(t),t)$ — функция, определяющая стоимость хранения пшеницы, для которой выполнены условия:

$$h(0,t) = 0, \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \leq 0.$$

В данной работе функция $h(x,t)$ задана линейной функцией $h(x,t) = \bar{h}x(t)$.

В результате формализованная задача оптимального управления с фазовыми ограничениями будет иметь вид:

$$J(v) = \int_0^T e^{-rt}[-p(t)v(t) - \bar{h}x(t)]dt + e^{-rT}Sx(T) \to sup, \tag{6}$$

$$\dot{x}(t) = v(t) - d(t) - ax(t), \quad x(0) = x_0, \tag{7}$$

$$x(t) \geq 0, \quad w - x(t) \geq 0, \tag{8}$$

$$v(t) - v_{min} \geq 0, \quad v_{max} - v(t) \geq 0. \tag{9}$$

Выпишем функцию Понтрягина и функцию Лагранжа для полученной задачи:

$$H(t,x,v,\lambda) = e^{-rt}(-p(t)v(t) - \bar{h}x(t)) + \lambda(t)(v(t) - d(t) - ax(t)).$$

$$\begin{aligned} L(t,x,v,\lambda,\mu,\nu) = e^{-rt}(-p(t)v(t) - \bar{h}x(t)) + \lambda(t)(v(t) - d(t) - ax(t)) + \\ +\mu_1(v(t) - v_{min}) + \mu_2(v_{max} - v(t)) + \nu_1 x(t) + \nu_2(w - x(t)). \end{aligned}$$

Сформулируем теорему о необходимых условиях оптимальности для задачи (6) - (9).

Теорема 1. *Пусть $(\bar{x},\bar{u})$ — оптимальный процесс в задаче на отрезке $[0,T]$. Функция $\bar{u}(t)$ непрерывна слева, значение управления в точке разрыва задается* *левым пределом. Предположим, что оптимальное управление $\bar{u}(t)$ имеет конечное число разрывов. Тогда существуют кусочно абсолютно непрерывная сопряженная функция $\lambda : [0,T] \to R$, кусочно непрерывные функции $\mu(t) : [0,T] \to R^2$, $\nu(t) : [0,T] \to R^2$, векторы $\eta(\tau) \in R^2$, $\gamma \in R^2$, неравные нулю одновременно для любого $t \in [0,T]$, такие что выполняются условия:*

1. *Почти всюду на $[0,T]$ выполняется принцип максимума, т. е. оптимальное управление определяется из условий:*

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v_{min}, & -e^{-rt}p(t) + \lambda(t) < 0; \\ v_{max}, & -e^{-rt}p(t) + \lambda(t) > 0; \\ \gamma \in [v_{min}, v_{max}], & -e^{-rt}p(t) + \lambda(t) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

2. *Выполняются условия стационарности по u функции Лагранжа:*

$$\bar{L}_u(t) = -e^{-rt}p(t) + \lambda(t) + \mu_1(t) - \mu_2(t) = 0.$$

3. *Сопряженная вектор-функция $\lambda(t)$ почти всюду является решением дифференциального уравнения:*

$$\dot{\lambda}(t) = e^{-rt}\bar{h} + a\lambda(t) - \nu_1(t) + \nu_2(t).$$

4. *Полные производные по t функций Понтрягина и Лагранжа совпадают вдоль оптимального процесса и равны частной производной по t функции Лагранжа:*

$$\frac{d\bar{H}[t]}{dt} = \frac{d\bar{L}[t]}{dt} = re^{-rt}(p(t)\bar{v}(t) + \bar{h}\bar{x}(t)).$$

5. *Множители Лагранжа: вектор-функции $\mu(t), \nu(t)$ — удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости:*

$$\begin{aligned} \mu_1(t)(\bar{v}(t) - v_{min}) = 0, \quad \mu_2(t)(v_{max} - \bar{v}(t)) = 0, \quad \mu_i(t) \geq 0, i = 1,2; \\ \nu_1(t)\bar{x}(t) = 0, \quad \nu_2(t)(w - \bar{x}(t)) = 0, \quad \nu_i(t) \geq 0, i = 1,2. \end{aligned}$$

6. *В конечный момент времени T выполнено терминальное условие трансверсальности:*

$$\lambda(T^-) = -e^{-rT}S + \gamma_1 - \gamma_2,$$

   при этом $\gamma_i \geq 0$, $i = 1,2$, $\quad \gamma_1\bar{x}(T) = 0, \quad \gamma_2(w - \bar{x}(T)) = 0.$

7. *В любой точке τ, которая является точкой контакта траектории с границей, выполняются условия скачка для сопряженных функций и функции Понтрягина:*

$$\begin{aligned} \lambda(\tau^-) = \lambda(\tau^+) + \eta_1(\tau) - \eta_2(\tau), \\ \bar{H}(\tau^-) = \bar{H}(\tau^+) + \eta_1(\tau) - \eta_2(\tau). \end{aligned}$$

Здесь

$$\eta_i(\tau) \geq 0, \quad i = 1, 2,$$
$$\eta_1(\tau)\bar{x}(\tau) = 0, \quad \eta_2(\tau)(w - \bar{x}(\tau)) = 0.$$

τ^-, τ^+ обозначают левый и правый пределы соответственно.

Используя условие Келли, для данной задачи было доказано, что режим особого оптимального управления существует при условии $v(t) = d(t)$.

Предположим, что $d(t) \leq v_{max}$. Тогда из сформулированной теоремы вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. *На всем промежутке времени* $[0, T]$ *отсутствие запасов может иметь место, если* $\dot{p}(t) \leq (r + a)p(t) + \frac{\partial h(0,t)}{\partial x}$

Утверждение 2. *Предположим, что* $r + a > 0$ *и известны верхние и нижние границы цен:*

$$\underline{p} \leq p(t) \leq \bar{p}, \forall t \in [0, T], \quad \underline{p} \leq S \leq \bar{p}. \tag{11}$$

Пусть $k > 0$ *— нижняя граница цены хранения* $h(x, t)$ *при* $x(t) > 0$*, тогда существует верхняя граница для сопряженной вектор-функции, определяемая следующим образом:*

$$\dot{\lambda}(t) \leq \frac{1}{r + a} ln \left(\frac{\bar{p} + \frac{k}{r+a}}{\underline{p} + \frac{k}{r+a}} \right). \tag{12}$$

Следствие 1. *Если* $a = r = 0$*,* $h_x(x, t) \geq k > 0$ *при* $x(t) > 0$ *и условия (11) выполняются, то выражение (12) преобразуется к виду* $\dot{\lambda}(t) \leq \frac{\bar{p} - \underline{p}}{k}$.

Для численного решения задачи можно использовать метод штрафных функций, учитывая фазовые ограничения в функционале, и метод проекции градиента. Тогда целевая функция будет иметь вид

$$J(v) = -\int_0^T e^{-rt}[-p(t)v(t) - \bar{h}x(t)]dt + \int_0^T A_k[max\{-x(t), 0\}]^2 dt +$$
$$+ \int_0^T B_k[max\{x(t) - w, 0\}]^2 dt - e^{-rT} Sx(T) \rightarrow inf.$$

Здесь A_k, B_k, $k = 1, 2, \ldots$ — штрафные множители.

Список литературы

[1] Андреева Е. А. Оптимальное управление динамическими системами. Тверь: ТвГУ, 1999.

[2] Андреева Е.А, Семыкина Н.А. Оптимальное управление. Тверь: ТвГУ, 2003.

[3] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономиче-ская теория. М.: Прогресс, 1975.

[4] Richard F. Hartl. A wheat trading model wiht demand and spoilage// Optimal control theory and economic analysis. N 3, 1988, P. 235-244.