УДК 330.4:519.86

НАПРАВЛЕННОСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

И.В. Цветков
Тверской государственный университет, г. Тверь
Лаборатория математического моделирования ТвГУ

В работе предложен принцип стремления к минимуму фрактальной потенциальной функции (ФПФ), позволяющей выявить природу процессов, описываемых мультифрактальными кривыми.

Ключевые слова: *мультифрактальные кривые, фрактальная размерность, фрактальная потенциальная функция, направленность глобальной тенденции.*

THE DIRECTION OF ECONOMIC PROCESSES DESCRIBED BY MULTIFRACTAL CURVES AND THE ENERGETIC PRINCIPLE

I.V. Tsvetkov
Tver State University mathematical modeling laboratory

The work proposes a principle of tending to minimum behavior of a fractal potential function (FPF) which allow to identify a nature of processes described by multifractal curves.

Keywords: *multifractal curves, fractal dimension, fractal potential function, global trend direction.*

В работах [1; 2] разработана математическая модель социально-экономических процессов, описываемых мультифрактальными кривыми. Мультифрактальная кривая – это такая кривая, которую можно разбить на участки, представляющие фрактальные кривые с постоянным значением фрактальной размерности D. Коэффициенты лиейного тренда на этих участках X считаютя функциями их фрактальной размерности D.

Основные уравнения

В [3] показано, что связь X и D для многих финансовых процессов хорошо описывается кубическим уравнением:

$$B_k X^3 + A(D)X = \eta \qquad (1)$$

Функция $A(D)$ в (1) выбирается достаточно просто:

$$A(D) = \begin{cases} \dfrac{1}{D_0 - D} & 1 \le D \le D_0 \\ \dfrac{(D_k - D)}{(D_k - D_0)(D_0 - D)} & D_0 \le D \le 2 \end{cases} \quad (2)$$

В точке D_0 у обеих ветвей функции $A(D)$ полюс и главные члены Лорановского разложения в ней совпадают.

Константы, D_0, D_k, B_K и η находятся из наилучшего согласия с опытными данными.

Отметим, что коэффициент существенен лишь в области $\left|D - D_k\right|^{\frac{2}{3}} \ll 1$.

Уравнение (1) может быть получено минимизацией потенциальной функции $V(X, D_1, D_0, D_k, B_k, \eta) = V(X)$:

$$V(X) = \frac{1}{4} B_k X^4 + \frac{1}{2} A(D) X^2 - \eta X \quad (3)$$

Используя условие минимума V - $\dfrac{\partial V}{\partial X} = 0$ из (3) следует (1).

Если в (3) переменную состояния системы X считать параметром порядка, то (3) есть потенциал Гинзбурга-Ландау в теории фазовых переходов второго рода [4] при наличии постоянного внешнего поля. Получается интересная аналогия между физическими и экономическими процессами во фрактальном подходе.

В дальнейшем функцию $V(X, D)$ будем называть фрактальной потенциальной функцией (ФПФ). Используя ФПФ со структурой, аналогичной потенциалу Гинзбурга-Ландау, вполне естественно полагать, что чем меньше значение V, тем устойчивее протекает экономический процесс. Тем самым мы получаем принцип, позволяющий судить о направленности глобальной тенденции в развитии экономического процесса:

$$V(D) \to min$$

Предложенный нами подход к изучению экономических процессов, описываемых мультифрактальными кривыми позволяет выявить направленность тенденции развития этих процессов в районе критической точки, точки бифуркации и вне этих областей. Имеет место существенная зависимость этой направленности от знака коэффициента B_k в окрестности критической точки, точки бифуркации. Вдали от этих точек, в принципе должна наблюдаться тенденция к уменьшению фрактальной размерности D.

Чтобы найти $X(D)$ необходимо разрешить (1) относительно X и подставить X в (3). Для аналитического решения (1) приведем данное уравнение к удобному для решения виду:

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda \qquad (4)$$

В (4) $\xi = \sqrt[3]{\frac{B_k}{\eta}}X$, $\lambda = \frac{A(D)}{B_k^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}$. Нас будут интересовать только вещественные корни (4). При $\lambda < \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ имеет место один вещественный корень, а при $\lambda > \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ уже три. Точка $\lambda = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ получила название точки бифуркации λ_b.

Вид корней следующий:

$$\xi_1 = 2\cdot\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\cdot sh\left(\frac{1}{3}ln\left(\sqrt[3]{-\frac{27}{4\lambda^3}}\right)+\sqrt{1-\frac{27}{4\lambda^3}}\right),\ \lambda > 0\ ; \qquad (5)$$

$$\xi_1 = 2\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cdot ch\left(\frac{1}{3}ln\left(\sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}}\right)+\sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}-1}\right),\ 0 < \lambda < \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$$

$$\xi_{1,2,3} = 2\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cdot cos\left(3\cdot d_{1,2,3}\right)\cdot cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(\frac{1}{3}arccos\ \sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}}+d_{1,2,3}\right)\right),$$

$\sqrt[3]{\frac{27}{4}} < \lambda$; $d_1 = 0$, $d_2 = -\frac{\pi}{3}$, $d_3 = \frac{\pi}{3}$.

Из (5) следует $X_i = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_k}}\xi_i$, где $i = 1$ из $1,2,3$. Подставляя X_i в (3) имеем:

$$V_i(D) = \eta\left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\xi_i^4 - \xi_i\right) + \frac{1}{2}A(D)\left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{\frac{2}{3}}\xi_i^2 \qquad (6)$$

Рассмотрим случай малых и больших значений параметра λ. При $\lambda = 0$, $\xi = 1$. Тогда:

$$V(D_K) = -\frac{3}{4}\eta\left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (7)$$

Если $\lambda >> 1$, то возможны два случая: $|\xi| >> 1$ и $|\xi| << 1$. В первом случае $\xi = \pm\sqrt{\lambda}$, а во втором случае $\xi = -\frac{1}{\lambda}$.

Тогда: $$V(|\xi| >> 1) \cong -\frac{1}{4(D_K - D_0)^2}\left(1 + \frac{D_k - D_0}{D_0 - D}\right)^2,$$

$$V(|\xi| << 1) \cong -\eta(D_0 - D) \qquad (9)$$

В первом случае минимум V соответствует $D \to D_{0+}$, а во втором $D \to 1$. В обоих случаях имеет место тенденция стремления системы к меньшим значениям фрактальной размерности D.

В случае $|\lambda| << 1$ можно искать ξ в виде ряда по степеням $\lambda : \xi = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \lambda^m$ Тогда с точностью $0(\lambda^3)$:

$$\xi \cong 1 + \frac{1}{3}\lambda = -\frac{(D_k - D)}{(D_k - D_0)^2 B_k^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}.$$

$$V(|D_k - D| << 1) \cong -\frac{3}{4}\eta\left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\frac{(D_k - D)}{(D_k - D_0)^2}\left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (8)$$

Из (8) следует, что минимум V достигается при как можно меньших значениях D по сравнению с D_k и больших $B_k < 0$.

В точке бифуркации $\lambda = \lambda_b = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ у нас два вещественных корня $\xi_{1b} = 2^{\frac{2}{3}}$ и $\xi_{2,3b} = -2^{-\frac{1}{3}}$. В этой точке: $V(\xi_{1,b}) = \eta\left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}}$ и $V(\xi_{2,3b}) = \eta\left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2^{\frac{10}{3}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}}\right)$.

Если $B_K > 0$, то $V(\xi_{1b}) > V(\xi_{2,3b})$, а при $B_K < 0$ наоборот $V(\xi_{1b}) < V(\xi_{2,3b})$. Это говорит о том, что в первом случае в точке бифуркации иметь место скачок с решения 1 на решения 2,3, а во втором случае – наоборот. В работе [2] как раз показано наличие бифуркационных скачков во время валютного кризиса 1998 года.

В работе предложен принцип стремления к минимуму фрактальной потенциальной функции (ФПФ), позволяющей выявить природу процессов, описываемых мультифрактальными кривыми.

Системы стремятся достигнуть состояния с такими значениями фрактальной размерности, которому соответствует минимальное значение ФПФ.

1. Кудинов А.Н., Михеев С.А., Цветков В.П., Цветков И.В.. Бифуркация параметра порядка в задачах астрофизики и экономики. Четвертые Курдюмовские юбилейные чтения. Синергетика в естественных науках. Издательство ТвГУ, Тверь: 2008. С. 36-37
2. Кудинов А.Н., В.П. Цветков, И.В.Цветков. Валютный кризис и бифуркационные явления в рамках фрактальной модели. Финансы и кредит, №46 (382) 2009. С. 2-7
3. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф, том 1,2 Издательство: Мир, 1984.
4. Арнольд В.И. Теория катастроф. 3-е изд. доп. М. Наука 1990. -128с.

Об авторах:

ЦВЕТКОВ Илья Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования Тверского государственного университета, e-mail: