УДК 510.5

# МОНИТОРИНГ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

**Земцов Н.А.***, **Яворский Р.Э.****
*МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва
**Математический институт им.Стеклова, Москва

В данной работе рассматривается формальная модель мониторинга вычислительных процессов. Приводятся достаточные условия полноты языка, получающегося при отображении траекторий вычислительного процесса в слова некоторого конечного алфавита, а также другие результаты, связанные с задачей анализа вычислительного процесса на основе наблюдаемой динамики монитора.

In this paper the formal model of monitoring of computational processes is considered. The sufficient conditions for completeness of a language, resulting from a mapping of process trajectories into words over some finite alphabet, are given. Some other results connteced to the problem of computational process analysis on the basis of observed dynamics of a monitor are presented.

**Ключевые слова:** формальный мониторинг; вычислительный процесс.
**Keywords:** formal monitoring; computational process.

**1. Введение. 1.1. Определения.** *Вычислительный процесс* — это пара $(\Omega, \tau)$, где $\Omega$ — непустое множество состояний, $\tau \subset \Omega \times \Omega$ — отношение перехода.

*Состояние* вычислительного процесса — это некоторый элемент $x \in \Omega$. Состояние в момент времени $t$ будем обозначать $s_t$.

Отношение перехода $\tau$ связывает состояния в соседние моменты времени. Так, если возможен переход вычислительного процесса из состояния $s$ в состояние $s'$ за один шаг, то пишем $\tau(s, s')$.

Обозначим $Dom(\tau)$ — множество всех $s \in \Omega$, для каждого из которых существует $s' \in \Omega$, такое что $\tau(s, s')$. $Im(\tau)$ — множество всех $s' \in \Omega$, для каждого из которых существует $s \in \Omega$, такой что $\tau(s, s')$.

Вычислительный процесс называется *детерминированным*, если для каждого $s \in Dom(\tau)$ существует единственный $s' \in \Omega$, такой что $\tau(s, s')$. В этом случае будем пользоваться более наглядным обозначением $s' = \tau(s)$.

Вычислительный процесс называется *недетерминированным*, если он не является детерминированным. То есть существует $s \in Dom(\tau)$, такой что множество $\{s' \mid \tau(s, s')\}$ состоит более, чем из одного элемента.

Траекторией вычислительного процесса $(\Omega, \tau)$ будем называть последовательность состояний $\bar{s} = (s_0, \ldots, s_l)$, где $\tau(s_{t-1}, s_t)$ для $t = 1, \ldots, l$. Подробнее об абстрактной теории вычислительных процессов см. [1, 4].

Везде ниже по умолчанию полагаем, что $\Omega = \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ — некоторое конечное множество. Другими словами, каждое состояние системы однозначно характеризуется значениями $n$ целочисленных переменных, $m$ вещественнозначных переменных и одной конечнозначной. Однако, полученные результаты имеют место и в более общем случае.

**1.2. Формальная модель мониторинга.** Пусть дан вычислительный процесс $(\Omega, \tau)$ и непустое множество $M$. Тогда любое отображение $\pi : \Omega \to M$ задает вычислительный процесс с множеством состояний $M$ и отношением перехода заданным так:

$$\tau_M(m, m') \rightleftharpoons \exists s, s' \in \Omega[\pi(s) = m \wedge \pi(s') = m' \wedge \tau(s, s')].$$

Интуитивно $M$ является множеством наблюдаемых состояний системы (значений индикаторов), $\pi$ — соответствие между состояниями процесса и значениями индикаторов, $\tau_M$ описывает наблюдаемую динамику системы.

В этой статье нас будет интересовать случай, когда $M$ является конечным множеством. Тогда все варианты наблюдаемой динамики системы образуют некоторый язык над $M$, который мы будем обозначать $L(\Omega, \tau, \pi)$. Язык $L(\Omega, \tau, \pi)$ по определению состоит из слов вида $\pi(\bar{s}) = \pi(s_0) \dots \pi(s_l)$, где $\bar{s}$ пробегает все множество траекторий для $(\Omega, \tau)$.

Будем называть язык $L(\Omega, \tau, \pi)$ *полным*, если он содержит все слова в алфавите $M$, т. е. выполняется равенство $L(\Omega, \tau, \pi) = M^*$. С интуитивной точки зрения этот случай соответствует монитору с максимальной информативностью, поскольку выполнение этого равенства означает, что любая последовательность соответствует какому-то вычислению.

**1.3. Постановка задачи.** Пусть дан вычислительный процесс $(\Omega, \tau)$, непустой конечный алфавит $M = \{1, \dots, p\}$ и отображение $\pi : \Omega \to M$. Общей целью нашей работы является изучение свойств языка $L(\Omega, \tau, \pi)$ при различных значениях параметров $\Omega, \tau$ и $\pi$.

В разделе 2 наша цель состоит в том, чтобы найти естественные условия на $\Omega$, $\tau$ и $\pi$, при которых порождаемый язык полный, т.е. выполняется равенство

$$L(\Omega, \tau, \pi) = M^*.$$

В разделе 3 предлагаемый подход проиллюстрирован на примере вычислительного процесса, описывающего случайные блуждания на двумерной решетке.

В разделе 4 рассматривается задача проверки гипотез о виде функции перехода $\tau$ на основе анализа наблюдаемой динамики системы.

**2. Необходимые и достаточные условия полноты языка $L(\Omega, \tau, \pi)$.**

**Теорема 1.** *Пусть вычислительный процесс $(\Omega_2, \tau_2)$ является расширением процесса $(\Omega_1, \tau_1)$, т.е. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ и $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Пусть также проекция $\pi_2 : \Omega_2 \to M$ является расширением для $\pi_1 : \Omega_1 \to M$ (т.е. ограничение $\pi_2$ на $\Omega_1$ совпадает с $\pi_1$). Тогда*

$$L(\Omega_1, \tau_1, \pi_1) \subseteq L(\Omega_2, \tau_2, \pi_2).$$

*Доказательство.* Следует непосредственно из определения $L(\Omega, \tau, \pi)$. ■

**Следствие 1.** *В условиях предыдущей теоремы если $L(\Omega_1, \tau_1, \pi_1) = M^*$, то $L(\Omega_2, \tau_2, \pi_2) = M^*$.*

*Доказательство.* Включение $L(\Omega_2, \tau_2, \pi_2) \subseteq M^*$ выполняется всегда. Обратное включение следует из теоремы 1. ∎

**Следствие 2.** *Пусть $|M| = p$. Если существует множество из $p$ точек в $\Omega$ такое, что ограничение $\tau$ на это множество образует полный граф, тогда существует проекция $\pi$, при которой $L(\Omega, \tau, \pi) = M^*$.*

*Доказательство.* Рассмотрим вычислительный процесс, получающийся ограничением $\Omega$ и $\tau$ на указанное подмножество из $p$ точек. Его нужно взять в качестве $(\Omega_1, \tau_1)$. В качестве $\pi$ можно взять любую функцию, взаимнооднозначно отображающую это подмножество на $M$. ∎

**Теорема 2.** *Если для всех $i \in M$ выполняется $\tau(\pi^{-1}(i)) = \Omega$, то*

$$L(\Omega, \tau, \pi) = M^*.$$

*Доказательство.* Пусть $w$ — произвольное слово над $M$. Индукцией по $n$, длине $w$, покажем, что существует вычисление $\bar{s} = s_1 \cdots s_n$ такое, что $\pi(\bar{s}) = w$.

Базис индукции, $n = 1$. В качестве $s_1$ можно взять любой элемент из $\pi^{-1}(w)$. Это множество не пусто, так как по условию его образ совпадает со всем $\Omega$.

Шаг индукции. Допустим, для $n = k$ это верно. Пусть теперь $w'$ — произвольное слово длины $k + 1$, т.е. $w' = iw$, где $|w| = k$ и $i \in M$. По предположению индукции существует вычисление $\bar{s} = (s_1, \cdots, s_k)$, такое что $\pi(\bar{s}) = w$. По условию теоремы $\tau(\pi^{-1}(i)) = \Omega$, следовательно, существует $s_0 \in \pi^{-1}(i)$, такое что $\tau(s_0, s_1)$. Положим $\bar{s'} = (s_0, s_1, \cdots, s_k)$, тогда $\pi(\bar{s'}) = w'$. ∎

**Следствие 3.** *Если для всех $i \in M$ выполняется $\tau^{-1}(\pi^{-1}(i)) = \Omega$, то*

$$L(\Omega, \tau, \pi) = M^*.$$

*Доказательство.* Аналогично доказательству теореме 2 с единственным отличием: при доказательстве шага индукции берем $w' = wi$. ∎

Множество $J \subseteq \Omega$ называется порождающим слово $w \in M^k$, если

1. для всех $x \in J$ выполняется $\pi(x)\pi(\tau(x)) \ldots \pi(\tau^{k-1}(x)) = w$,
2. если для некоторого $x \in \Omega$, выполнено $\pi(x)\pi(\tau(x)) \ldots \pi(\tau^{k-1}(x)) = w$, то $x \in J$.

**Теорема 3.** *Пусть задана мера $\mu$ на $\Omega$, причем $\mu(\Omega) > 0$. Если выполнено:*

1. *для всех $i \in M$ множество $\tau(\pi^{-1}(i))$ почти всюду совпадает с $\Omega$,*
2. *для любого подмножества $S \subseteq \Omega$, такого, что $\mu(S) > 0$, имеет место $\mu(\tau^{-1}(S)) > 0$,*

*тогда $L(\Omega, \tau, \pi) = M^*$.*

*Доказательство.* Докажем, что для любого слова существует порождающее его множество положительной меры. Доказательство проводится индукцией по длине слова.

Базис индукции. Для любого слова длины 1 существует множество $\Omega_i = \pi^{-1}(i)$, такое что $x \in \Omega_i \Rightarrow \pi(x) = i$. По условию, $\tau(\Omega_i)$ почти всюду совпадает с $\Omega$, следовательно, $\mu(\tau(\Omega_i)) > 0$. Тогда $\mu(\Omega_i) > 0$.

Шаг индукции. Допустим, для $n = k$ верно утверждение: для любого слова $w$ длины $k$ ($w \in M^k$) существует множество $J_w$ положительной меры, т.ч. траектория процесса с любым элементом из этого множества в качестве начального, будет иметь начальный отрезок длины $k$, совпадающий с данным словом $w$ :

$$x \in J_w \Rightarrow (\pi(x), \pi(\tau(x)), \ldots, \pi(\tau^{k-1}(x))) = w.$$

Докажем, что утверждение верно для слов длины $k+1$. Пусть $w \in M^{k+1}$. Тогда $w = iw'$, где $i \in M$, $w' \in M^k$.

По предположению индукции, для $w'$ существует множество $J_{w'}$ положительной меры, такое что

$$x \in J_{w'} \Rightarrow (\pi(x), \pi(\tau(x)), \ldots, \pi(\tau^{k-1}(x))) = w'.$$

По условию теоремы, $\mu(J_{w'} \cap \tau(\Omega_i)) = \mu(J_{w'}) > 0$. Рассмотрим $J = \tau^{-1}(J_{w'} \cap \tau(\Omega_i))$. Тогда получаем $\mu(J) > 0$ и, следовательно, $J$ — искомое множество положительной меры.

Приведенные рассуждения верны для каждого слова $w' \in M^k$ и $i \in M$, что делает верным индуктивный переход. Теорема доказана. ∎

**3. Восстановление текущего состояния процесса для случайного блуждания на плоскости.** Рассмотрим следующий пример вычислительного процесса, описывающего случайные блуждания на двумерной решетке: $\Omega = \mathbb{Z}^2$, т. е. текущее состояние есть пара $s = (x, y)$, отношение перехода $\tau(s, s')$ можно задать следующим образом:

$$(x', y') \in \{(x+1, y),\ (x-1, y),\ (x, y+1),\ (x, y-1)\}.$$

Таким образом, на каждом шагу происходит недетерминированный единичный сдвиг вдоль одной из осей.

Пусть $M = \{1, 2, 3, 4\}$. В качестве иллюстрации рассмотрим два монитора $\pi_1$ и $\pi_2$, каждый из которых задан разбиением $\Omega$ на четыре непересекающихся подмножества (прообразы элементов из $M$), изображенным на рис. 1 и 2 соответственно.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |

Рис. 1

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 |

Рис. 2

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Рис. 3

Хотя монитор $\pi_1$ выглядит вполне естественным, порождающий им язык не является полным (он не содержит слов 11, 22, 33, 44); для $\pi_2$ выполнены условия теоремы 2, поэтому $L(\Omega, \tau, \pi_2) = M^*$.

**Теорема 4.** *Пусть начальное состояние $s_1$ процесса известно. Без потери общности можно считать, что $s_1 = (0,0)$ и $\pi(s_1) = 1$.*

*а) Если в качестве монитора взять $\pi_1$, то знание наблюдаемой динамики системы $\pi_1(s_1), \cdots, \pi_1(s_n)$ не позволяет однозначно определить смещение $s_n$ относительно $s_1$.*

*б) Если в качестве монитора взять $\pi_2$, то существует алгоритм, который по последовательности наблюдений $\pi_2(s_1), \cdots, \pi_2(s_n)$ вычисляет смещение $s_n$ относительно $s_1$ за линейное по $n$ время.*

*Доказательство.* а) Рассмотрим, например, последовательность вида 12121... длины $n$. Если в качестве монитора выбрано $\pi_1$, то этой последовательности наблюдений соответствует любая траектория этой длины, в которой $\pi_1(s_1) = 1$ и все перемещения происходят вдоль оси $x$. Следовательно, вектор смещения $s_n$ относительно $s_1$ имеет вид $(a, 0)$, где $a$ — любое число в диапазоне $[-n, n]$ той же четности, что и $n$.

б) Заметим, что для каждого состояния $s$ все варианты $s'$, такие что $\tau(s, s')$, имеют разные значения $\pi_2(s')$. Поэтому по известным $s$, $\pi_2(s)$ и $\pi_2(s')$ состояние $s'$ восстанавливается однозначно. Проделав эту процедуру последовательно $(n-1)$ раз можно однозначно вычислить $s_n$ по известным $s_1$ и $\pi_2(s_1), \cdots, \pi_2(s_n)$. ∎

**Замечание 1.** *Если рассмотреть модификацию $\tau$, при которой также возможен вариант, когда состояние не меняется, т. е.*

$$(x', y') \in \{(x, y),\ (x+1, y),\ (x-1, y),\ (x, y+1),\ (x, y-1)\}.$$

*то аналог пункта (б) теоремы 4 может быть получен при $|M| = 5$ и $\pi$, изображенном на рис 3.*

**4. Проверка гипотез.** Пусть $(\Omega, \tau_1)$ и $(\Omega, \tau_2)$ — два вычислительных процесса на одинаковом пространстве состояний $\Omega$.

Неформально, эти два процесса можно рассматривать как гипотезы о внутренних законах поведения системы. В этом контексте цель мониторинга состоит в том, чтобы выяснить, какая из гипотез соответствует реальности. Для этого проекция $\pi$ должна быть выбрана таким образом, чтобы языки $L(\Omega, \tau_1, \pi)$ и $L(\Omega, \tau_2, \pi)$ были максимально различными.

**Теорема 5.** *а) Пусть $|M| = 2$. Тогда существуют несовпадающие $\tau_1$, $\tau_2$, такие что для любого $\pi : \Omega \to M$ языки $L(\Omega, \tau_1, \pi)$ и $L(\Omega, \tau_2, \pi)$ совпадают.*

*б) Пусть $|M| = 3$. Тогда для любых несовпадающих $\tau_1$ и $\tau_2$ можно построить $\pi : \Omega \to M$ такое что существует по меньшей мере одно слово длины 2, отличающее языки $L(\Omega, \tau_1, \pi)$ и $L(\Omega, \tau_2, \pi)$.*

*Доказательство.* а) Положим $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\tau_1 = \Omega \times \Omega$, т.е. в первом случае граф переходов является полным, во втором это ориентированный треугольник с петлями на вершинах $\tau_2 = \Omega \times \Omega \setminus \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$. Легко видеть, что если $|M| = 2$ то все сюрьективные $\pi$ совпадают с точностью до изоморфизма, и $L(\Omega, \tau_1, \pi) = L(\Omega, \tau_2, \pi) = M^*$.

Если $\pi$ не является сюрьективным, т. е. все элементы $\Omega$ отображаются в один элемент из $M$, то равенство тоже тривиально выполняется.

б) Поскольку $\tau_1$ и $\tau_2$ различны, то без потери общности можно считать, что

$$\exists W \subseteq \Omega\ (\ \tau_2(W) \setminus \tau_1(W) \neq \emptyset\ ).$$

Выбор функции $\pi$ зависит от взаимного расположения множеств $W$ и $\tau_2(W) \setminus \tau_1(W)$. Рассмотрим два подслучая.

Случай 1. $\tau_2(W) \setminus \tau_1(W) \subseteq W$. Определим прообразы для элементов $M$ так:

$$\begin{aligned}
&\pi^{-1}(1) = \tau_2(W) \setminus \tau_1(W);\\
&\pi^{-1}(2) = W \setminus \pi^{-1}(1);\\
&\pi^{-1}(3) = \Omega \setminus (\pi^{-1}(1) \cup \pi^{-1}(2)).
\end{aligned}$$

Поскольку $W = \pi^{-1}(1) \sqcup \pi^{-1}(2)$ и $\tau_1(W) \cap \pi^{-1}(1) = \emptyset$, то слова $\overline{11}$ и $\overline{21}$ не содержатся в $L(\Omega, \tau_1, \pi)$. С другой стороны, существует $s \in W$ такое, что $\tau_2(s) \in \pi^{-1}(1)$, следовательно, по крайней мере одно из этих слов содержится в $L(\Omega, \tau_2, \pi)$.

Случай 2. $\tau_2(W) \setminus \tau_1(W) \not\subseteq W$. Полагаем

$$\begin{aligned}
&\pi^{-1}(1) = \tau_2(W) \setminus (\tau_1(W) \cup W);\\
&\pi^{-1}(2) = W;\\
&\pi^{-1}(3) = \Omega \setminus (\pi^{-1}(1) \cup \pi^{-1}(2)).
\end{aligned}$$

Тогда слово $\overline{21}$ содержится в $L(\Omega, \tau_2, \pi)$, но не содержится в $L(\Omega, \tau_1, \pi)$. ∎

## Список литературы

[1] Egon Börger and Robert Stärk, Abstract State Machines. A method for High-Level System Design and Analysis. Springer-Verlag 2003.

[2] Vladimir Filatov and Rostislav Yavorskiy. Scenario based analysis of linear computations. Proceedings of 12th International Workshop on Abstract State Machines ASM'05, March 8–11, 2005, Laboratory of Algorithmics, Complexity and Logic, University Paris 12 — Val de Marne, Creteil, France, pp. 167–174.

[3] Vladimir Filatov, Nikolay Zemtsov, and Rostislav Yavorskiy. Clusters of computations for a linear transition system. Proceedings of European Conference on Complex Systems. Paris, 14–18 November 2005. P. 84.

[4] Yuri Gurevich. Abstract State Machines: An Overview of the Project. In "Foundations of Information and Knowledge Systems", editors Dietmar Seipel and Jose Maria Turull-Torres. Springer Lecture Notes in Computer Science vol. 2942 (2004), pp. 6–13.

[5] Wolfgang Grieskamp, Yuri Gurevich, Wolfram Schulte, and Margus Veanes. Generating Finite State Machines from Abstract State Machines. In ISSTA 2002, International Symposium on Software Testing and Analysis, July 2002.

[6] Nikolay Zemtsov. Analysis of short-term process dynamics. Proceedings of Fifth Winter Symposium on Chemometrics "Modern Methods of Data Analysis". Russia, Samara, February 18–23, 2006. P. 23.