

## БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕЦ ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДЕТЕКТОРАХ ТИПА RICH<sup>1</sup>

А.С. Айриян<sup>1</sup>, С.А. Багинян<sup>1\*</sup>, Г.А. Ососков<sup>1\*</sup>, К. Хёне<sup>2\*</sup>

\* Коллаборация CBM, GSI Darmstadt Germany

<sup>1</sup> Лаборатория информационных технологий ОИЯИ Дубна

<sup>2</sup> GSI Darmstadt Germany

В данной работе проведено исследование методов аппроксимации (подгонки) окружности по измеренным точкам и выбран наиболее оптимальный метод с точки зрения временных затрат и точности оценки параметров окружностей, на основе которого был разработан робастный алгоритм подгонки колец, полученных в детекторе RICH (Ring Imaging CHerenkov) эксперимента CBM (Compressed Baryonic Matter).

A comparative study of two methods for circle fitting by measured points is accomplished in the given article. The method is chosen, optimal from the accuracy point of view for estimating circle parameters. On the basis of the selected method a robust algorithm was developed. The program implementing this algorithm is used to estimate parameters of the Cherenkov radiation rings obtained in the RICH (Ring Imaging CHerenkov) detector of the CBM (Compressed Baryonic Matter) experiment, and it is included in the CBM software framework.

**Ключевые слова:** подгонка окружностей по измеренным точкам, робастность, обработка данных, программное обеспечение.

**Keywords:** fitting circle to measured points, robustness, data handling, software.

**Введение.** Детектор черенковского излучения типа RICH (Ring Imaging CHerenkov) является одним из основных компонентов эксперимента CBM (Compressed Baryonic Matter) по исследованию взаимодействия тяжелых ионов [1]. Образующиеся на фотодетекторе кольца черенковского излучения в основном получаются от электронов и пионов, хотя некоторый вклад дают мюоны. Определение параметров колец (радиусов и координат центров) с высокой точностью необходимо для идентификации частиц с помощью RICH детектора. На рис. 1 представлена зависимость радиусов колец от импульсов соответствующих им частиц. Радиусы колец, образованных электронами, не зависят от величины импульса частицы, в то время как радиусы колец, образованных пионами и мюонами, сильно зависят от импульсов частиц [1].

Выбор наиболее оптимального метода аппроксимации окружности по измеренным точкам с точки зрения временных затрат и разработка на его основе робастного алгоритма подгонки для достижения удовлетворительной точности оценки

---

<sup>1</sup>Работа частично поддержана грантом РФФИ 5-01-00645-а

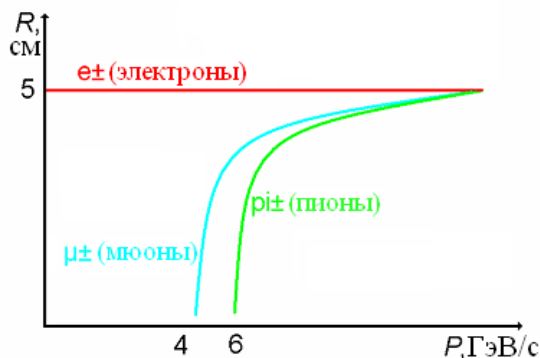


Рис. 1: Зависимость радиуса от импульса частицы.

параметров колец при наличии шума и являются целью данной работы. Надо отметить, что разработанные алгоритмы являются универсальными и могут найти применение во многих областях анализа данных и обработки изображений.

**1. Используемые математические методы аппроксимации окружности по данным точкам.** Задача подгонки кривых по точкам, как правило, решается методом наименьших квадратов (МНК). МНК основан на минимизации функционалов специального вида:

$$F = \sum_{i=1}^n d_i^2, \quad (1)$$

где  $d_i$  – геометрическое расстояние от  $i$ -ой точки до кривой. В случае окружности заданной уравнением

$$(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2 = R^2, \quad (2)$$

где  $(a, b)$  – центр, а  $R$  – радиус окружности, функционал (1) примет вид:

$$F(a, b, R) = \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2} - R \right)^2 \Rightarrow \min(a, b, R). \quad (3)$$

Минимизация функционала (3) дает наилучшую оценку параметров окружности, однако, является нелинейной задачей, требующей численных итеративных, как правило, медленных методов минимизации или использования специальных пакетов программ типа MINUIT [2] или FUMILI [3]. Тогда как огромная интенсивность событий в эксперименте СВМ требует очень быстрой обработки данных. Исходя из этого требования, использовать медленные итеративные методы, а тем более универсальные программы минимизации, нерационально. Рассмотрим теперь несколько быстрых и не итеративных методов подгонки окружности по точкам.

**1.1. Метод Крауфорда.** Простейший алгебраический метод подгонки окружности к точкам. Зададим окружность, как кривую второго порядка, уравнением:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (4)$$

где  $A = \pm \frac{1}{2R}$ ,  $B = -2Aa$ ,  $C = -2Ab$  и  $D = (B^2 + C^2 - 1)/4A$ .

Поскольку  $A \neq 0$ , можно поделить обе части уравнения (4) на параметр  $A$ , тогда получим:

$$(x^2 + y^2) + \bar{B}x + \bar{C}y + \bar{D} = 0, \quad (5)$$

где  $\bar{B} = -2a$ ,  $\bar{C} = -2b$  и  $\bar{D} = a^2 + b^2 - R^2$ .

Чтобы определить параметры  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$  минимизируем следующий функционал:

$$K = \sum_{i=1}^n (z_i + \bar{B}x_i + \bar{C}y_i + \bar{D})^2, \quad (6)$$

где  $z_i = x_i^2 + y_i^2$ .

При минимизации функционала (6), получается система линейных алгебраических уравнений, которая очень просто разрешается. Данный метод еще называют «чистым» алгебраическим методом [4].

Если перейти к параметризации  $(a, b, R)$ , то функционал (6) примет вид:

$$F_{Craw} = \sum_{i=1}^n \left( (a - x_i)^2 + (b - y_i)^2 - R^2 \right)^2. \quad (7)$$

В функционале (7) по сути минимизируются, так называемые, алгебраические расстояния, т.е. квадрат расстояния от измеренной точки до точки пересечения касательной либо хорды, проведенной через исходную точку, с окружностью.

Такой метод подгонки окружности широко известен как метод Крауфорда [6]. Он получил широкое распространение благодаря своей простоте и высокой скорости при вычислениях на ЭВМ. К сожалению, минимизация алгебраических расстояний в «чистом» виде (6) или (7) в некоторых случаях приводит к ложным оценкам параметров [4, 5, 7].

Также семейству алгебраических методов относятся и более точные взвешенно-градиентные алгебраические методы [4], которые основаны на минимизации геометрических расстояний, вычисленных с учетом градиента кривой, когда минимизируемый функционал имеет вид:

$$F_g = \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i)]^2 / \|\nabla P(x_i, y_i)\|^2, \quad (8)$$

где  $\nabla P(x, y)$  – градиент функции  $P(x, y)$ .

В случае окружности функция  $P(x, y)$  примет вид  $P(x, y) = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D$ , а ее градиент  $\nabla P(x, y) = (2Ax + B, 2Ay + C)$ , тогда функционал (9) выглядит следующим образом:

$$F_g = \sum_{i=1}^n \frac{[Az_i + Bx_i + Cy_i + D]^2}{[4A(Az_i + Bx_i + Cy_i + D) + B^2 + C^2 - 4AD]^2}. \quad (9)$$

Функционал (9) имеет второй порядок точности приближения к (1). При разложении в ряд Тейлора получим:

$$\frac{|P(x_i, y_i)|}{\|\nabla P(x_i, y_i)\|} = d_i + o(d_i^2). \quad (10)$$

Минимизация функционала (9) требует больших усилий и затрат компьютерного времени. Однако существуют два метода, существенно упрощающие вычислительные трудности (9). Это методы, предложенные Черновым-Ососковым-Праттом (далее СОР: Chernov-Osokov-Pratt) и Таубиным (далее ТАУ – Taubin).

**1.2. Метод СОР – предложение Пратта.** Поскольку в знаменателе (9) член  $4A(Az_i + Bx_i + Cy_i + D)$  очень мал в сравнении с  $B^2 + C^2 - 4AD$ , им можно пренебречь, тогда получим функционал, предложенный Праттом в 1987 году [8]:

$$F_{COP} = \sum_{i=1}^n [Az_i + Bx_i + Cy_i + D]^2 / [B^2 + C^2 - 4AD]^2. \quad (11)$$

Данный функционал много проще в минимизации и дает результаты близкие к точному решению, однако, по признанию самого Пратта, хоть метод и является неитерационным, но минимизация функционала (11) все же сложна и требует относительно больших затрат машинной памяти и времени вычисления на ЭВМ.

**1.3. Метод СОР – предложение Чернова и Ососкова.** Если в функционале (11) от параметров  $(A, B, C, D)$  вернуться к параметризации  $(a, b, R)$ , то получится, что

$$F_{COP} = \frac{1}{4R^2} \sum_{i=1}^n \left( (a - x_i)^2 + (b - y_i)^2 - R^2 \right)^2. \quad (12)$$

Функционал (12) был предложен в работе [9] в 1984 году и был получен путем упрощения (3). Если воспользуемся формулой сокращенного умножения, то (7) примет следующий вид:

$$F_{Craw} = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2} - R \right) \left( \sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2} + R \right) \right]^2. \quad (13)$$

Используя приближение  $R \approx \sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2}$  из (13), получим:

$$F_{Craw} \approx 4R^2 \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2} - R \right)^2 = 4R^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 = 4R^2 F, \quad (14)$$

соответственно

$$F_{COP} = \frac{1}{4R^2} F_{Craw} = \frac{1}{4R^2} \sum_{i=1}^n \left( (a - x_i)^2 + (b - y_i)^2 - R^2 \right)^2 \approx F. \quad (15)$$

Для функционала (12) в [9] был предложен очень элегантный и быстрый способ минимизации. Если вычислить производные по  $a$ ,  $b$  и  $R$  от  $F_{COP}$ , получится система уравнений:

$$\begin{cases} K \cdot a + H \cdot b - a \cdot \gamma = P, \\ H \cdot a + G \cdot b - b \cdot \gamma = Q, \\ 2 \cdot P \cdot a + 2 \cdot Q \cdot b + \gamma^2 = T, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\gamma = R^2 - a^2 - b^2$ ,

$$\begin{cases} K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (3x_i^2 + y_i^2), & G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 3y_i^2), \\ P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (x_i^2 + y_i^2), & Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i (x_i^2 + y_i^2), \\ H = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, & T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)^2. \end{cases} \quad (17)$$

Исключив из системы (16)  $a$  и  $b$ , получим уравнение 4-ой степени относительно  $\gamma$ :

$$\gamma^4 + A \cdot \gamma^3 + B \cdot \gamma^2 + C \cdot \gamma + D = 0, \quad (18)$$

где

$$\begin{cases} A = -K - G, \\ B = KG - T - H^2, \\ C = T(K + G) - 2(P^2 + Q^2), \\ D = T(H^2 - KG) + 2(P^2G + Q^2K) - 4PQH. \end{cases} \quad (19)$$

Для уменьшения ошибок округления уравнение (18) можно поделить на  $\gamma_0^4$ , где

$$\gamma_0 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \right), \quad (20)$$

что приводит к уравнению:

$$x^4 + A_0 \cdot x^3 + B_0 \cdot x^2 + C_0 \cdot x + D_0 = 0, \quad (21)$$

где  $x = \gamma/\gamma_0$ ,

$$\begin{cases} A_0 = A/\gamma_0, \\ B_0 = B/\gamma_0^2, \\ C_0 = C/\gamma_0^3, \\ D_0 = D/\gamma_0^4. \end{cases} \quad (22)$$

В работе [4] доказано, что метод Ньютона для численного решения уравнения (21), при начальном значении  $x_0 = 0$  всегда сходится и сходится к искомому корню, соответствующему минимуму функционала. При этом метод Ньютона затратит всего 2–5 итераций для достижения точности порядка  $10^{-6}$ . Теперь, имея полученное значение  $x$ , можно вычислить  $\gamma = \gamma_0 \cdot x$ . Значения  $a$  и  $b$  вычисляются из системы линейных уравнений (16). Тогда радиус определяется по формуле:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + \gamma}. \quad (23)$$

Данный метод, начиная с 1984 года, широко используется в экспериментальной физике.

**1.4. Метод ТАУ.** Предложенный Агиным [10], а затем независимо и Таубиным [11] функционал:

$$F_{TAU} = \sum_{i=1}^n \frac{[Az_i + Bx_i + Cy_i + D]^2}{[4A^2 \langle z \rangle + 4AB \langle x \rangle + 4AC \langle y \rangle + B^2 + C^2]^2}, \quad (24)$$

где  $\langle z \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)$ ,  $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ , также дает хорошую оценку параметров окружности, при этом (24) минимизируется достаточно быстро, аналогично вышеописанному способу минимизации (12).

**1.5. МНК и необходимость робастного подхода.** Наиболее распространенным методом оценки параметров функциональных зависимостей по данным измерений является метод наименьших квадратов (МНК) [12]. Не нарушая общности возьмем для простоты в качестве примера некую кривую в виде полинома (это может быть траектория заряженной частицы в магнитном поле) в плоскости  $Y \circ Z$ :

$$y_i = \vec{z}_i \times \vec{p} + e_i, i = \overline{1, n}, \quad (25)$$

где  $\vec{z}_i = (1, \dots, z_i^j, \dots, z_i^m)$ ,  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_j, \dots, p_m)$  – неизвестный параметры кривой,  $(z_i, y_i)$  – координаты  $i$ -ой точки,  $e_i$  – ошибка измерения, имеющая по предположению нормальное распределение с среднеквадратичным отклонением  $\sigma_i$ :

$$e_i \in N(0, \sigma_i). \quad (26)$$

Для определения неизвестных параметров следует найти минимум суммы квадратов невязок  $e_i$ , которые в общем случае неравноточных измерений должны быть нормированы на их стандартные отклонения:

$$S(\vec{p}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot e_i^2 \Rightarrow \min(\vec{p}), \quad (27)$$

где  $w_i = 1/\sigma_i^2$  веса измерений.

Чтобы найти минимум  $S(\vec{p})$  приравняем к нулю производные этого функционала по параметрам  $\vec{p}$ . Это даст систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = 2 \sum_{i=1}^n w_i \cdot e_i \cdot \frac{\partial e_i}{\partial p_j} = 0, j = \overline{1, m}, \quad (28)$$

решение которой дает искомые оценки параметров  $\vec{p}^*$ . Значение функционала (27) в минимуме, т.е. при  $\vec{p}^*$  служит количественной оценкой качества подгонки, так как величина

$$S(\vec{p}^*) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} (y_i - \vec{z}_i \times \vec{p}^*)^2 \quad (29)$$

оказывается распределенной по закону  $\chi^2$ .

Популярность МНК среди экспериментаторов объясняется тем, что получаемые оценки параметров оказываются наилучшими по сравнению с другими методами. Это следует из того, что при сделанном нами предположении (26) МНК оказывается частным случаем общего метода, называемого методом максимального правдоподобия (ММП). В предположении, что все невязки являются независимыми случайными величинами с нулевыми средними и одинаковой функцией плотности  $f(e)$ , вероятность появления конкретной выборки  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , является функцией правдоподобия

$$L(\vec{p}) = \prod_{i=1}^n f(e_i). \quad (30)$$

Согласно принципу максимального правдоподобия Фишера наилучшей – наиболее правдоподобной – оценкой параметров будет такой набор параметров  $\vec{p}$ , при котором (30) примет свое максимальное значение. Поскольку и сама функция правдоподобия, и ее логарифм принимают максимальное значение в одной и той же точке, соответствующая система уравнений для ее поиска выглядит так:

$$\frac{\partial \ln L(\vec{p})}{\partial p_k} = 0, k = \overline{1, m}. \quad (31)$$

Решение данной системы дает нам оценку  $\vec{p}^*$ , который, как доказано в [14] обладает свойствами состоятельности, асимптотической нормальности и эффективности.

Поэтому предположение о нормальности функции плотности распределения в (30)

$$f(e) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right) \quad (32)$$

является весьма важным, так как только в этом случае метод максимального правдоподобия превращается в метод наименьших квадратов:

$$\ln L(\vec{p}) = \ln \left( \prod_{i=1}^n f(e_i) \right) = \sum_{i=1}^n \ln f(e_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot e_i^2 - \sum_{i=1}^n \ln(\sigma_i\sqrt{2\pi}), \quad (33)$$

$$\ln L(\vec{p}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot e_i^2 + const. \quad (34)$$

Если сравнить с (27) видно, что (34) есть ни что иное, как метод наименьших квадратов.

К сожалению, ключевое предположение о нормальности невязок в реальной жизни нарушается очень часто благодаря засорению измерений шумовыми или фоновыми измерениями. Квадраты расстояний далеко отстоящих точек могут дать неоправданно большой вклад в функционал и привести к значительной потере точности оценок параметров. Чтобы избежать этого, следует учитывать измерения только из непосредственной окрестности, подгоняемой функции, придавая остальным меньшие значения или вовсе пренебрегая ими. Такую идею можно реализовать, придавая каждому измерению специальный вес, значение которого убывает с ростом расстояния до подгоняемой кривой. Этот подход, названный робастным П. Хьюбером [15], предложившим, в действительности, несколько иной метод его реализации. Предложение Хьюбера сводится к некоторому обобщению метода максимального правдоподобия. С математической точки зрения предлагалось перейти от суммы квадратов в (27) к сумме некоторых функций вклада  $\rho(e)$ . Теперь функционал будет выглядеть так:

$$L(\vec{p}) = \sum_{i=1}^n \rho(e_i) \Rightarrow \min(\vec{p}) \quad (35)$$

Так как точки близкие к прямой, вероятнее всего ей принадлежат, то функция  $\rho(e)$  при малых  $e$  должно себя вести как  $e^2$ , как и в методе наименьших квадратов:

$$\rho(e) \xrightarrow{e \rightarrow 0} e^2. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь уравнение правдоподобия для (35)

$$\frac{\partial L(\vec{p})}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(e_i)}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial p_j} = 0, j = \overline{1, m} \quad (37)$$

и перепишем его, введя новое обозначение

$$w(e) = \frac{1}{e} \cdot \frac{\partial \rho(e)}{\partial e}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial L(\vec{p})}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n w(e_i) \frac{\partial e_i}{\partial p_j} e_i = 0, j = \overline{1, m}. \quad (39)$$

Мы получили уравнения, аналогичные уравнениям МНК (28), но с заменой числовых весовых коэффициентов на весовые функции, которые приходится пересчитывать на каждой итерации получившейся итерационной процедуры, названной процедурой Флетчера-Гранта-Хейлена (ФГХ) [16], в каждой итерации которой выполняется взвешенный МНК, но с функциональными весами. Если нет каких-либо априорных соображений по выбору весовых коэффициентов, то можно инициализировать ФГХ процедуру с помощью обычного МНК, взяв в качестве весов  $w_i^0 \equiv 1$ .

Одной из наиболее эффективных с точки зрения шумоподавления является весовая функция Тьюки [13], называемая бивесовой за применение биквадрата расстояний:

$$w_i^k = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{e_i^k}{c_T \cdot \sigma_k}\right)^2\right)^2 & \text{if } |e_i^k| \leq c_T \cdot \sigma_k, \\ 0 & \text{if } |e_i^k| > c_T \cdot \sigma_k. \end{cases} \quad (40)$$

Определим теперь оптимальную весовую функцию [17] при подгонке кривой на фоне равномерного засорения. Будем по-прежнему предполагать, что измерения производятся с ошибками, распределенными по нормальному закону со стандартным отклонением  $\sigma$ , а засоряющие точки распределены равномерно на гораздо более широком интервале с  $\Delta$  ( $\sigma \ll \Delta$ ), предположим также, что соотношение сигнал-шум равно  $(1 - \varepsilon)/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — параметр засорения.

Для описания засоренного распределения воспользуемся моделью «больших ошибок» (gross-error model) Тьюки [13]:

$$f_\varepsilon(e) = (1 - \varepsilon) \cdot \phi(e) + \varepsilon \cdot h(e), \quad (41)$$

где  $\phi(e)$  — нормальное распределение, а  $h = 1/\Delta$  — плотность равномерного распределения.

Составим логарифмическую функцию правдоподобия для распределения (41):

$$\ln L(\vec{p}) = \ln \left( \prod_{i=1}^n f(e_i) \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{e_i^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\varepsilon}{\Delta} \right). \quad (42)$$

Приравнивая к нулю производные по всем параметрам, получим уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L(\vec{p})}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{e_i^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e_i \frac{\partial e_i}{\partial p_j}}{\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{e_i^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\varepsilon}{\Delta}}. \quad (43)$$



можно их представить в виде (28)

$$\frac{\partial \ln L(\vec{p})}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n w(e_i) \cdot e_i \frac{\partial e_i}{\partial p_j}, \quad (44)$$

где обозначено

$$w(e) = \frac{\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\varepsilon}{\Delta}}. \quad (45)$$

Таким образом, после деления на числитель и нормировки на единицу в нуле мы получим выражение для оптимальных весов

$$w(e) = \frac{1+c}{1+c \cdot \exp\left(\frac{e^2}{2\sigma^2}\right)}, \quad (46)$$

где  $c = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}{\Delta}$ .

Поскольку  $\Delta \gg \sigma$ , параметр  $c$  довольно мал даже при малом отношении сигнал/шум. Аппроксимация оптимальной весовой функции полиномом четвертого порядка оказалось ни чем иным как, вышеупомянутой бивесовой функцией Тьюки (40) (рис. 2). Бивесовая функция Тьюки используется весьма часто [7, 9, 12], хотя следует подчеркнуть необходимость тщательного выбора параметра  $c_T$ . Есть рекомендации  $c_T \in [3, 5]$  [12]. При этом следует учитывать, что решение о «выбросе» измерений с большими отклонениями путем присвоения им очень маленьких (в оптимальной весовой функции) или нулевых (в бивесовой функции Тьюки) весов идет по величине  $\sigma$ , которое также подлежит переычислению на каждой итерации:

$$\sigma^{(k)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i^{(k-1)} \left(e_i^{(k-1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n w_i^{(k-1)}}}. \quad (47)$$

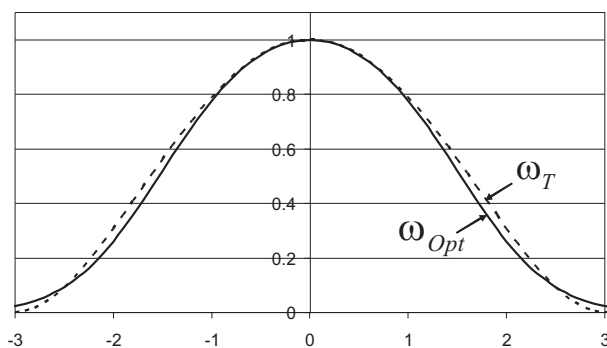


Рис. 2: Графики весовых функций в зависимости от расстояния. Сплошной линией обозначена оптимальная функция, пунктирной — функция Тьюки.

**2. Разработанные алгоритмы. 2.1. Алгоритм подгонки окружности к точкам.** Проведенный анализ методов аппроксимации окружностью измеренных

точек позволил нам выбрать следующий алгоритм подгонки окружности к точкам. Этот алгоритм выполняется за пять основных шагов:

1. Переход в систему координат центра тяжести массива данных точек  $(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$  и  $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i$ .
2. Вычисление параметров системы (17). Чтобы сократить вычисления было принято решение вычислить значения  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i (x_i^2 + y_i^2)$  и  $\sum_{i=1}^n y_i (x_i^2 + y_i^2)$  в цикле по  $i = \overline{1, n}$ , а затем вычислить параметры системы (17).
3. Вычисление параметров уравнения (20).
4. Решение уравнения (20) методом Ньютона с начальным значением  $x_0 = 0$ .
5. Вычисление  $\gamma$ , а за тем параметров  $a$ ,  $b$  и  $R$ .

**2.2 Робастный алгоритм.** Для реализации робастности мы воспользовались процедурой ФГХ. Рассмотрим алгоритм подробнее:

1. Выполнение подгонки по МНК с весовыми коэффициентами  $w_i^{(k-1)} \equiv 1$ , при  $k = 1$ .
2. Вычисление среднеквадратичного отклонения  $\sigma^{(k)}$  по формуле (47), предварительно вычислив расстояния от точек до окружности  $d_i^{(k-1)}$ .
3. Вычисление весовых коэффициентов по формуле (40) для весовой функции Тьюки или (46) для оптимальной весовой функции.
4. Выполнение подгонки с весовыми новыми коэффициентами  $w_i^{(k)}$ .
5. Вычисление  $k = k + 1$  и выполнение пунктов 2, 3, 4 пока параметры кольца практически не перестанут изменяться. Обычно после 3-4 итераций достигается оптимальная оценка параметров.

Данный алгоритм был реализован под объектно-ориентированной оболочкой для анализа данных ROOT<sup>2</sup> в СВМ Framework<sup>3</sup> в виде классов с удобным интерфейсом.

**3. Тестирование алгоритмов.** Разработанный нами алгоритм был протестирован на выборке в 10000 событий взаимодействия  $Au + Au$  при 25/ смоделированных на основе модели UrQMD (Ultrarelativistic Quantum Molecular Dynamics) [18] с учетом взаимодействия частиц с материалами детекторов смоделированного программой GEANT [19].

На рис. 3 показано, что метод Таубина дает наилучшую оценку параметров кольца с точки зрения критерия  $\chi^2$  в особенности для находящихся на краю фотодетектора колец, где сильно сказываются геометрические искажения. В то же

<sup>2</sup><http://root.cern.ch>

<sup>3</sup><http://cbmroot.gsi.de>

время этот метод позволяет оценивать параметры колец с удовлетворительной точностью при имеющихся на сегодня параметрах RICH детектора, а именно: ошибок измерения, количества точек на окружности, геометрических искажений, соотношения сигнал-шум и т.д. На рис. 4 видно, что робастный алгоритм подгонки колец черенковского излучения даёт достаточно хорошую оценку радиуса, и позволяет хорошо отделить различного типа частицы в зависимости от их импульса. На сегодняшний день при идентификации частиц коллаборация CBM использует именно этот метод [20, 21].

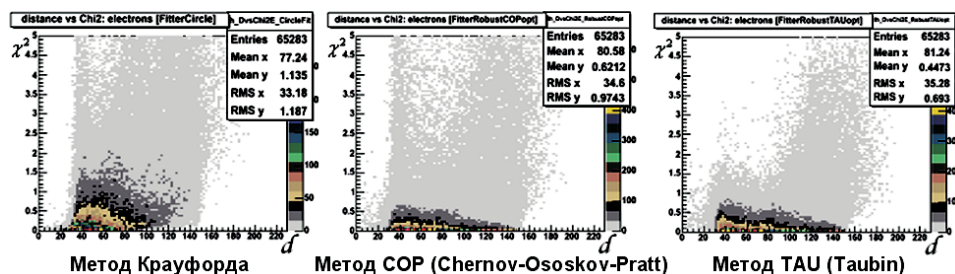


Рис. 3:  $\chi^2$  в зависимости от расстояний центров колец от центра фотодетектора.

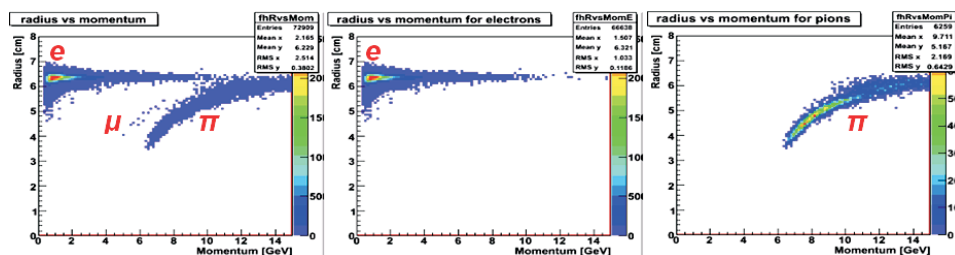


Рис. 4: Радиусы колец в зависимости от их импульса для метода TAU.

### Список литературы

- [1] CBM collaboration, Compressed Baryonic Matter Experiment, Technical Status Report, 2005.
- [2] CERN Program Library Long Writeup D506. James. F. MINUIT. CERN, Geneva, Switzerland.
- [3] С.Н. Соколов, И.Н. Силин. Сообщение ОИЯИ, Д810, Дубна, 1961.
- [4] N. Chernov and C. Lesort, Fitting circles and lines by least squares: theory and experiment, Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 23 , issue 3 s (2005) 239-252.
- [5] W. Gander and G. H. Golub and R. Strebел, Least-Squares Fitting of Circles and Ellipses, Numerical analysis (1996) p. 63-84.

- [6] J.F.Crawford, A non-iterative method for fitting circular arcs to measured points, Nucl. Instr. and Meth. 211 (1983) 223-225.
- [7] А.С.Айриян, Г.А.Ососков, «Робастный алгоритм фитирования точек окружностью в RICH эксперименте CBM», Сборник трудов IX конференции молодых ученых и специалистов, Дубна, 2005.
- [8] V. Pratt, Direct least-squares fitting of algebraic surfaces, Computer Graphics 21, 1987, 145-152.
- [9] N. I. Chernov, G. A. Ososkov, Effective algorithms for circle fitting, «Computer Physics Communications»
- [10] G.J. Agin, Representation and Description of Curved Objects, PhD Thesis, AIM-173, Stanford AI Lab, 1972.
- [11] G. Taubin, Estimation Of Planar Curves, Surfaces And Nonplanar Space Curves Defined By Implicit Equations, With Applications To Edge And Range Image Segmentation, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 13, 1991, 1115-1138.
- [12] G.Ososkov, I.Puzynin, A.Polyanskij Modern methods of data processing in high energy physics experiments, "Particles and Nucleus vol.33 (2002), #3.
- [13] Mosteller F., Tukey W.Data Analysis and Regression: a Second Course in Statistics. N. Y., Addison-Wesley, 1977.
- [14] H. Cramer, Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, Princeton, N-Y (1946).
- [15] P. Huber, Robust statistics, Wiley, N-Y (1981).
- [16] F. Fletcher, J.A. Grant, and M.D. Hebden, The calculation of linear best  $L_p$ -approximations, The Computer Journal, 1971, vol. 14, No 3, p. 276-279.
- [17] G.A. Ososkov, Robust regression for the heavy contamination sample, Proceedings of the Second International Tampere Conference in Statistics, Tampere, Finland, 1987.
- [18] S. A. Bass, M. Belkacem, M. Bleicher, M. Brandstetter, L. Bravina, C. Ernst, L. Gerland, M. Hofmann, S. Hofmann, J. Konopka, G. Mao, L. Neise, S. Soff, C. Spieles, H. Weber, L. A. Winkelmann, H. Stocker, W. Greiner, Ch. Hartnack, J. Aichelin and N. Amelin: Microscopic Models for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions Prog. Part. Nucl. Phys. 41 (1998) 225-370.
- [19] J. Allison et al., Geant4 developments and applications, Nuclear Science, IEEE Transactions on Nuclear Science, vol. 53, (2006) 270-278.
- [20] S. Dass, Electron Identification with RICH, Collaboration meeting, Strasburg, 2006.
- [21] C. Höhne, A. Maevskaya, S. Das, S. Lebedev, A. Ayriyan, P. Stolpovsky, G. Ososkov, V. Ivanov, Electron identification and  $J/\psi$  detection in CBM, GSI Scientific Report 2006, p. 13. 2007.