

ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ НЬЮТОНОВСКИХ ПОЛИТРОП

Михеев С.А., Цветков В.П.

Тверской государственный университет

В работе доказано существование точек бифуркации ньютоновских вращающихся политроп для значений показателя политропы n близких к единице, в которых ответвляются асимметричные относительно оси вращения решения, описывающие распределение плотности.

In this research it's proved the existence of bifurcation points of Newtonian rotating polytropic curves for the values of the polytropic coefficient n , which are close to 1 and have forking asymmetrical relating to line of rotation nonzero solutions describing a density distribution.

Ключевые слова: конфигурация, уравнение состояния, политропа, точка бифуркации, асимметрия.

Keywords: configuration, equation of state, polytropy, bifurcation (point), asymmetry.

Задача о существовании точек бифуркации гравитирующих быстро вращающихся сверхплотных конфигураций при определенных значениях параметра определяющего быстроту вращения $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0}$ (ω - угловая скорость вращения конфигурации, G - гравитационная постоянная, ρ_0 - плотность в центре конфигурации) сводится к вопросу о вещественных решениях кубического уравнения для параметра X , определяющего порядок асимметрии распределения вещества относительно оси вращения конфигурации [1].

Для намагниченных конфигураций интенсивность влияния магнитного поля на параметр асимметрии X определяется величиной $\eta_m = \frac{B_0^2 \sin^2 \alpha}{8\pi G \rho_0 a_1^2}$ (B_0 - характерное значение магнитной индукции в центре конфигурации, a_1 , a_3 - длины большой и малой полуосей эллипсоида вращения, аппроксимирующего реальную поверхность конфигурации, α - угол наклона магнитной оси к оси вращения).

В работе [2] впервые показана важная роль параметра η_m вблизи точек бифуркации в этой кубической по X параболе.

Цель нашей работы - показать существование точек бифуркации ньютоновских гравитирующих вращающихся политроп со значениями показателя превышающими единицу не более чем на 0.08.

Как и в [1] для решения поставленной задачи будем использовать уравнение:

$$\Phi - \Phi_0 - K_0 \int_{p(\mathbf{r})}^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}(p)} - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_1^2}{a_1^2} = \Pi_{(m)}(\mathbf{r}'), \quad (1)$$

где $\Phi = -\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$, $\Phi_0 = \Phi(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$, $\Pi_{(m)}$ - вклад магнитных натяжений, $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$, ρ - плотность конфигурации, a_1, a_3 - полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации, $p = \frac{P}{P_0}$ - отношение давления к центральному значению давления, $K_0 = \frac{P_0}{2\pi G \rho_0^2 a_1^2}$, $\mathbf{r}_\perp = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$, $x_1 = \frac{x}{a_1}$, $x_2 = \frac{y}{a_1}$, $x_3 = \frac{z}{a_3}$, D - область R^3 , в которой $\tilde{\rho} \geq 0$.

Уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение с подвижной границей в R^3 . Эту границу δD будем искать в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности [1]:

$$\delta D: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i,j,k}^L Z_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = 1 \quad (2)$$

Полуоси аппроксимирующего сфероида a_1, a_3 и коэффициенты Z_{ijk} находятся из условия минимизации функционала [1]:

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \int_{\delta D} \tilde{\rho}^2 d\Omega, \quad (3)$$

что приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \quad a_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_1} = 0, \quad a_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_3} = 0 \quad (4)$$

Система уравнений (1), (4) представляет собой замкнутую систему для нахождения $a_1, a_3, Z_{ijk}, \tilde{\rho}$.

Представим плотность конфигурации $\tilde{\rho}$ в виде полинома степени P

$$\tilde{\rho} = \sum_{a,b,c}^P \rho_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c \quad (5)$$

Если выбрать P достаточно большим, то с любой степенью точности, согласно теореме Стоуна-Вейерштрасса, выражение (5) аппроксимирует плотность реальной конфигурации.

Коэффициенты ρ_{abc} и Z_{ijk} , определяющие структуру конфигурации, разобьем на симметричные $\rho_{(ab)c}$, $Z_{(ij)k}$ и антисимметричные $\rho_{[ab]c}$, $Z_{[ij]k}$ части относительно оси вращения и будем искать в виде разложения по малому параметру асимметрии X , подлежащему в дальнейшем определению:

$$\begin{aligned} \rho_{abc} &= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)!}{\left(\frac{a}{2}\right)! \left(\frac{b}{2}\right)!} \rho_{a+b,c} + \rho_{[ab]c} X + \rho_{1(ab)c} X^2, \\ Z_{ijk} &= \frac{\left(\frac{i+j}{2}\right)!}{\left(\frac{i}{2}\right)! \left(\frac{j}{2}\right)!} Z_{i+j,k} + Z_{[ij]k} X + Z_{1(ij)k} X^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и далее a, b, c и i, j, k являются четными, а вводимые вновь величины удовлетворяют соотношениям симметрии: $\rho_{1(ab)c} = \rho_{1(ba)c}$, $\rho_{[ab]c} = -\rho_{[ba]c}$, $Z_{1(ij)k} = Z_{1(ji)k}$, $Z_{[ij]k} = -Z_{[ji]k}$, а $\rho_{[20]0}$ нормируем на единицу.

Для имеющихся к настоящему времени оценок магнитного поля пульсаров по замедлению периода имеет место оценка $|\Pi_{(m)}| \sim 10^{-12} - 10^{-9}$ при $\rho_0 = 4 \cdot 10^{14}$ г/см³. Поэтому $\Pi_{(m)}$ имеет смысл учитывать только при нахождении асимметричных коэффициентов $\rho_{[ab]c}$, $Z_{[ij]k}$.

Аналитическое выражение $\Pi_{(m)}$ выберем в виде

$$\Pi_{(m)} = \frac{k}{2} \eta_m (x_1^2 - x_2^2) \tag{7}$$

где k - показатель скорости убывания магнитного поля при удалении от магнитной оси.

Для решения уравнения (1) мы должны знать конкретный вид уравнения состояния $P = P(\rho)$. В случае политропы имеем:

$$\int_p^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}} = (1+n) \tilde{\rho}^{\frac{1}{n}} \tag{8}$$

Аппроксимируем правую часть (9) многочленом второй степени:

$$(1+n) \tilde{\rho}^{\frac{1}{n}} \cong \delta_0 + \delta_1 (\tilde{\rho} - 1) + \delta_2 (\tilde{\rho} - 1)^2 \tag{9}$$

Коэффициенты δ_0 , δ_1 , δ_2 находятся минимизацией уклонения правой и левой частей (9) в метрике L_2 . При этом:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{4n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(3n+1)}, & \delta_1 &= -\frac{4n(n+1)(4n-7)}{(2n+1)(3n+1)}, \\ \delta_2 &= -\frac{20n(n^2-1)}{(2n+1)(3n+1)} \end{aligned} \tag{10}$$

Погрешность аппроксимации $n = 1.04$ составила $4 \cdot 10^{-3}$.

В нашей работе [1] создан комплекс символьно-численных программ, использование которого для решения (1),(4) позволяет свести задачу вычисления параметра асимметрии X к решению кубического уравнения для X :

$$A(e, n)X + B(e, n)X^3 = \eta_m, \tag{11}$$

где $e = \frac{a_3}{a_1}$, и этот параметр является основной характеристикой сплюснутости поверхности конфигурации вдоль оси вращения и также как ε характеризует степень быстроты вращения.

Кубический член в (11) существенен вблизи кривой $A(e, n) = 0$, которая определяет множество точек бифуркации $e_k = e_k(n)$. Поэтому $B(e, n)$ нужно вычислять только в точках $e_k(n)$, то есть $B_k(n) = B(e_k(n), n)$, что значительно упрощает вычисления.

Решение уравнения (11) может быть представлено с помощью функции

$$f_M(\lambda) = \left(108 + 12\sqrt{-12\lambda^3 + 81} \right)^{\frac{1}{3}},$$

найденной нами в системе символьной математики MAPLE, в виде:

$$X(\lambda) = \left(\frac{1}{6} f_M(\lambda) + 2\lambda f_M^{-1}(\lambda) \right) X_k, \quad (11a)$$

$$\lambda = -\frac{A(e, n)}{B_k(n)X_k^2}, \quad X_k = \left(\frac{\eta_m}{B_k(n)} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Вблизи точки бифуркации коэффициент $A(e, n)$ по определению является малым параметром, по степеням которого можно представить разложение решения (11a). В линейном по $A(e, n)$ приближении имеем:

$$X = X_k \left(1 - \frac{1}{3} \frac{A(e, n)}{B_k(n)X_k^2} \right). \quad (11b)$$

Отметим, что выражение (11b) справедливо только при $|A(e, n)| \ll \eta_m^{\frac{2}{3}}$.

В случае неоднородного сжимаемого распределения плотности вещества задача о гравитирующих конфигурациях решается приближенно. Проверить выполнение условия гидростатического уравнения во всех точках гравитирующей конфигурации невозможно. Поэтому Джинс [3] ввел условие стабильности конфигурации: радиальная компонента ускорения свободного падения g_e на экваторе должна быть больше нуля. В плоскости экватора имеем:

$$g(r, x_3 = 0) = \frac{\partial \Phi(r, x_3 = 0)}{\partial r} - 2\epsilon r > 0, \quad (12)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

На экваторе $r = r_e$, $\tilde{\rho}(r_e, x_3 = 0) = 0$. Тогда $g_e = g(r_e, x_3 = 0) = \frac{\partial \Phi(r_e, x_3 = 0)}{\partial r_e} - 2\epsilon r_e$.

Функция $\Phi(r, x_3 = 0)$ определяется нами внутри аппроксимирующего эллипсоида, вне его мы будем использовать ее аналитическое продолжение. При этом пренебрежение гравитационным влиянием масс за пределами аппроксимирующего эллипсоида дает погрешность $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1)$.

Из выше изложенного следует критерий для точек бифуркации равновесных конфигураций:

$$A(e_k, n) = 0, \quad g_e(e_k, n) > 0 \quad (13)$$

Проведенные нами символьно-численные вычисления функции $A(e, n)$ представлены на рисунках 1, 2.

Из рисунка 1 видно, что семейство кривых $A(e, n = \text{const})$, $1 \leq n \leq 1.0795$ пересекает ось абсцисс в интервале значений $0.575 \leq e \leq 1$ и определяет множество точек бифуркации по параметру e , в которых $A(e_k, n) = 0$.

Из рисунка 2 следует, что семейство кривых $A(e = \text{const}, n)$, $0.575 \leq e \leq 1$ пересекает ось абсцисс в интервале значений n $1 \leq n \leq 1.0795$ и определяет множество точек бифуркации по параметру n , в которых $A(e_k, n(e_k)) = 0$.

Зависимость $g_e(e_k, n)$ в диапазоне значений n : $1 \leq n \leq 1.0795$ приводится на рисунке 3, из которого следует, что $g_e(e_k, n = 1) = 3.07 \cdot 10^{-3}$, $g_e(e_k, n = 1.0795) = 0.187$.

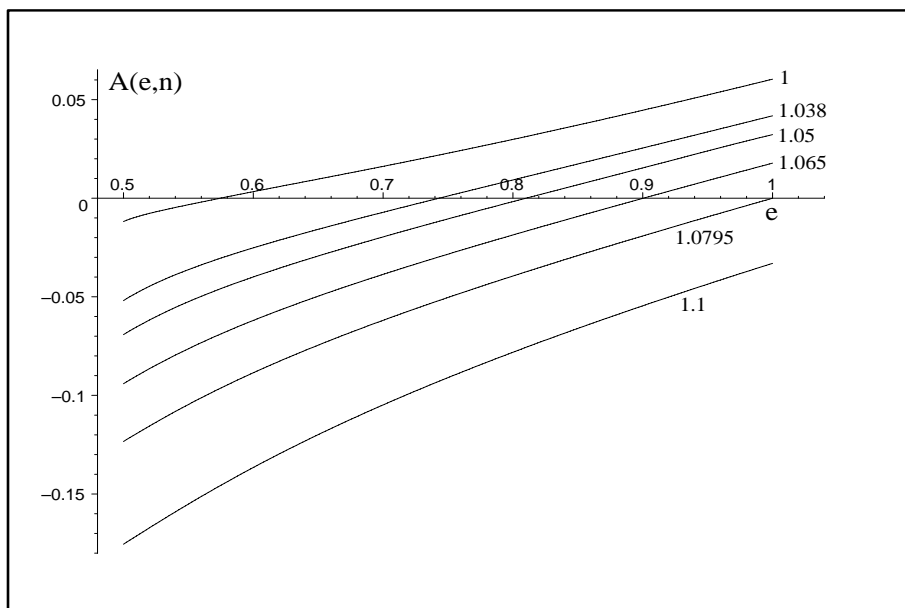


Рис. 1: Зависимость функции $A(e, n)$ от параметра e при фиксированных значениях показателя политропы n .

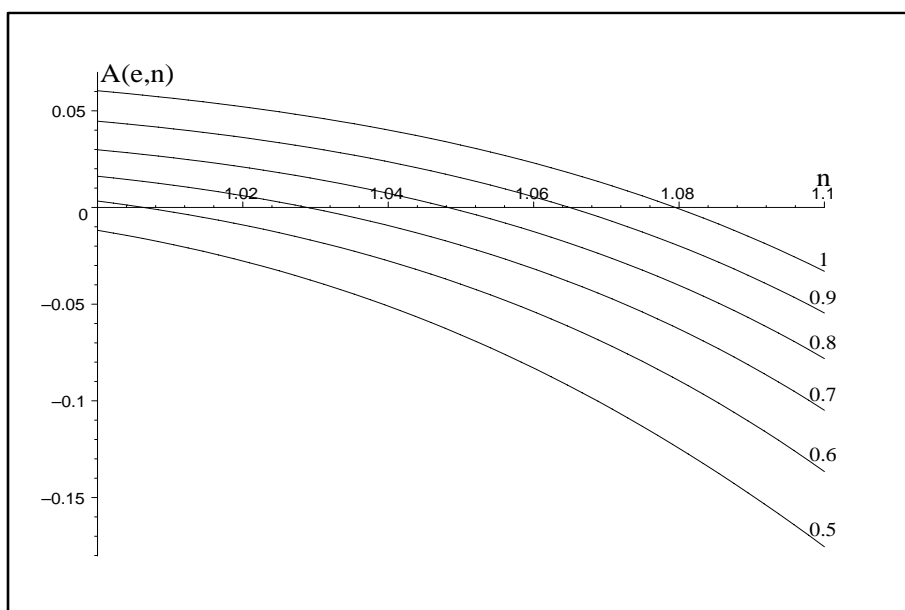


Рис. 2: Зависимость функции $A(e, n)$ от показателя политропы n при фиксированных значениях параметра e .

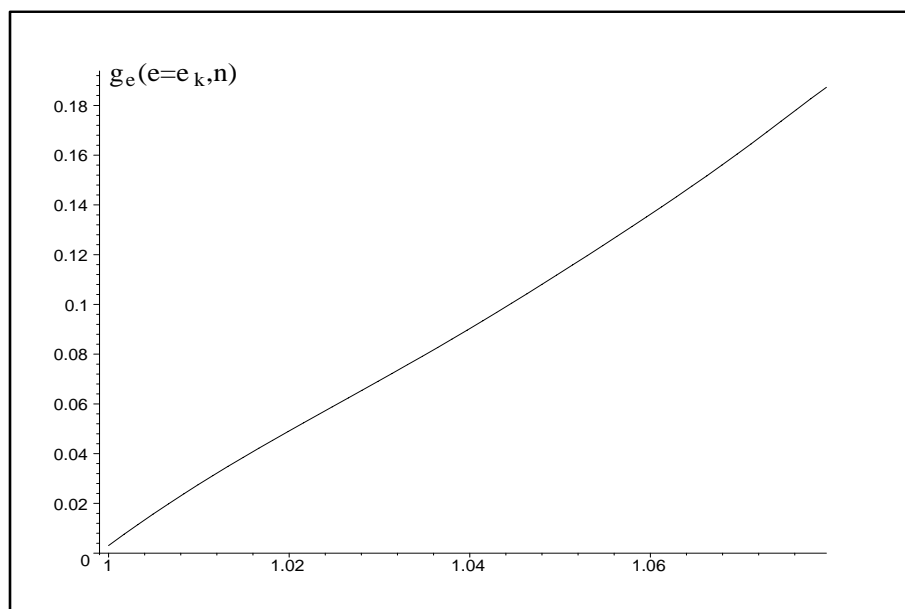


Рис. 3: Зависимость функции $g_e(e = e_k)$ от показателя поллитропы n .

Из проведенных нами оценок видно, что точки бифуркации существуют в интервале значений показателя поллитропы $1 \leq n \leq 1.0795$, для которых $A(e_k, n) = 0$ и $g_e(e_k, n) > 0$.

Оцениваемая нами точность выполнения граничного условия в точке бифуркации как $\sqrt{\Lambda}$ при $n = 1.04$ ($e_k = 0.756$) равна $2.42 \cdot 10^{-3}$, расстояние от точек экватора конфигурации до центра в этом случае $r_e = 1.00457$, а погрешность выполнения граничного условия будет приводить к погрешности в уравнениях порядка $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1) = 1.11 \cdot 10^{-5}$, что указывает на высокую точность аппроксимации поверхности $\tilde{\rho} = 0$ возмущенной эллипсоидальной поверхностью δD для значений показателя поллитропы из рассматриваемого промежутка $1 \leq n \leq 1.0795$.

На рисунке 4 приведено сечение плоскостью $x_2 = 0$ аппроксимирующего сфероида δD и найденной поверхности $\tilde{\rho}(r^2, x_3^2) = 0$ для значения $n = 1$ при котором $\sqrt{\Lambda}$ и r_e принимают максимальные значения, $1.17 \cdot 10^{-2}$ и 1.0661 соответственно, из интервала значений $1 \leq n \leq 1.0795$.

Погрешность метода решения уравнения (1) при $n = 1.04$ у нас составила $2.53 \cdot 10^{-4}$. Левее точки $n = 1.04$ погрешность немного убывает, а правее возрастает, но остается такого же порядка.

Найденные зависимости $e_k(n)$ и $\varepsilon_k(n) = \varepsilon(e_k(n))$ представлены на рисунке 5.

Функция $e_k(n)$ монотонно возрастает от $e_k = 0.575$ до 1 в интервале $1 \leq n \leq 1.0795$. В этом интервале значений n $\varepsilon_k(n)$ монотонно убывает от $\varepsilon_k = 0.0439$ до 0.

Этот результат очень важен для медленно вращающихся ньютоновских поллитроп. Для любого малого значения угловой скорости ω найдется значение n из интервала $1 \leq n \leq 1.0795$ для которого $\varepsilon = \varepsilon_k(n)$, и $A(e_k, n) = 0$.

При $n > n_k = 1.0795$ ни для каких значений e $A(e, n)$ в нуль не обращается, оно

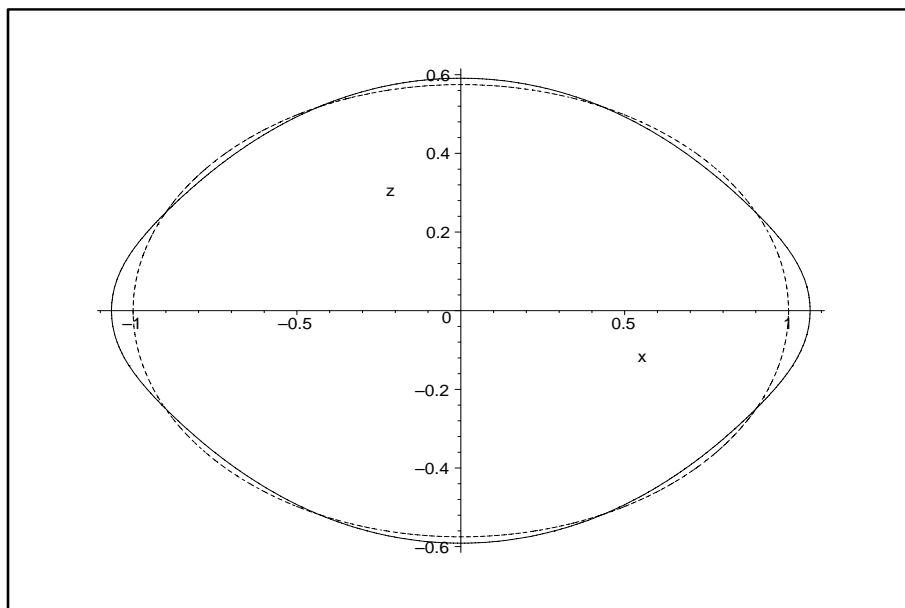


Рис. 4: Расчетная (сплошная линия) и аппроксимирующая (пунктирная линия) эллипсоидальные конфигурации при значениях $n = 1$, $e_k = 0.575$. На рисунке $x = x_1$, $z = \frac{1}{e_k}x_3$.

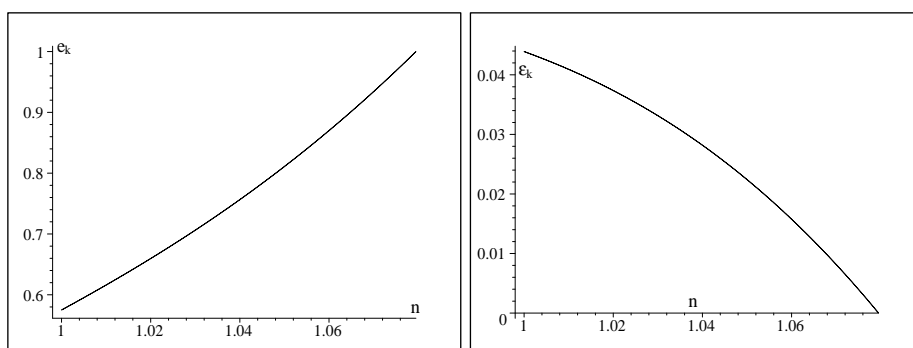


Рис. 5: На первом слева рисунке приводится зависимость функции e_k от показателя политропы n . На втором слева рисунке приводится зависимость функции ε_k от показателя политропы n .

уже для $e = 1$ отрицательно, и более того, с уменьшением e будет уменьшаться, удаляясь все больше от точки бифуркации $A(e, n) = 0$.

Список литературы

- [1] Беспалько Е.В., Михеев С.А., Пузынин И.В., Цветков В.П. Гравитирующая быстро вращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния. *Мат. моделирование*, 2006, т. 118, №3, с. 103-119.
- [2] Tsvetkov V.P. Gravitational Radiation of Rapidly Rotating Drop of Homogeneous Magnetized Gravitating Liquid Near Bifurcation Point. *Phys.Lett. A*. 1984. V.105. P.34-35.
- [3] Jeans J.H. *Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics*. Cambridge: At the Univ. Press, 1919.