УДК 524.354.6:531.5

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СТАБИЛЬНЫЕ ВРАЩАЮЩИЕСЯ НЬЮТОНОВСКИЕ ПОЛИТРОПЫ

Михеев С.А., Резников А.М.
Тверской государственный университет

В работе впервые получены оценки предельных значений параметра быстроты вращения ньютоновских вращающихся политроп в интервале значений показателя политропы $0 < n \leq 1.1$, при больших значениях которого стабильных конфигураций не существует.

This investigation has obtained for the first time estimations of limiting values for the parameter of rotation rapidity of Newtonian rotating polytropic curves over the range of the polytropic coefficient $0 < n \leq 1.1$, in greater values of which stable configurations didn't exist

Ключевые слова: политропа, гравитирующая конфигурация, ускорение свободного падения.
Keywords: polytropic, gravitating configuration, gravitational acceleration.

Точные аналитические решения уравнения, которое описывает гравитирующие вращающиеся конфигурации, получены только для эллипсоидальных фигур равновесия однородной несжимаемой жидкости [1, 2, 3]. При этом решения зависят только от параметра, определяющего быстроту вращения $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G\rho_0}$ (ω — угловая скорость вращения конфигурации, G — гравитационная постоянная, ρ_0 — плотность конфигурации.)

В значительно более сложном случае, когда уравнение описывает конфигурацию сжимаемой вращающейся гравитирующей жидкости, а его решение будет зависеть не только от параметра ε, но и от параметров уравнения состояния гравитирующей материи, возможности найти точных аналитических решений нет. Распределение плотности таких конфигураций можно вычислить, применяя приближенные методы для решения уравнений их описывающих. Но тогда становится невозможным проверить условие гидростатического равновесия во всех точках гравитирующей конфигурации. Поэтому Джинс [4] ввел условие стабильности конфигурации — не отрицательность радиальной компоненты ускорения свободного падения на экваторе $g_{eq} > 0$. Используя это условие при исследовании одного из основных вопросов теории вращающихся гравитирующих конфигураций об ответвлении асимметричных относительно оси вращения решений уравнения, описывающего распределение плотности ньютоновской вращающейся не намагниченной политропы, Джеймс [5] показал существование точек бифуркации вращающихся политроп в интервале значений их показателя $0 \leq n \leq 0.808$.

Политропой обычно называют гравитирующие конфигурации, уравнения состояния вещества которых имеет вид политропы:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

где P — давление, ρ — плотность, n — показатель политропы.

Физической причиной отсутствия точек бифуркации ньютоновских политроп при $n > 0.808$ является истечение вещества с экватора конфигурации при той ее сплюснутости, которая необходима для достижения точки бифуркации.

Также введенное Джинсом условие стабильности вращающихся гравитирующих конфигураций было использовано в работе [6], где, применяя принципиально новые символьно-численные методы и реализованный на их основе в пакете символьной математики MAPLE комплекс символьно-численных программ [7], впервые доказано существование критических точек ньютоновских вращающихся политроп в интервале значений показателя политропы $0.9989 < n \leq 1.0795$.

Цель нашей работы — определить области существования стабильных ньютоновских вращающихся политроп по параметру быстроты вращения ε для значений показателя политропы $0 < n \leq 1.1$.

В плоскости экватора, в безразмерных координатах $x_1 = \frac{x}{a_1}$, $x_2 = \frac{y}{a_1}$, $x_3 = \frac{z}{a_3}$ (a_1, a_3 — полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации) имеем:

$$g(r, x_3 = 0) = \frac{\partial \Phi(r, x_3 = 0)}{\partial r} - 2\varepsilon r, \qquad (1)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\Phi = -\frac{1}{2\pi a_1^2} \int\limits_D \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$, $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$, ρ — плотность конфигурации, ρ_0 — плотность в центре конфигурации.

Очевидно, что Φ является функцией координат x_k, отличающейся от ньютоновского гравитационного потенциала на константу.

Ньютоновский гравитационный потенциал явно зависит от неизвестной нам границы конфигурации $\rho(x, y, z) = 0$. Как правило, эта граница имеет сложный вид, затрудняющий аналитические вычисления. Ее легко учесть, если эта граница представляет собой эллипсоид и в частном случае сферу в отсутствии вращения конфигурации, когда решение можно искать зависящим от одной сферической координаты r. Эллипсоидальная граница может иметь место для случая несжимаемой конфигурации в ньютоновском приближении, что в нашем случае не выполняется.

Как и в работах [6, 7], мы аппроксимируем реальную границу конфигурации возмущенной эллипсоидальной поверхностью

$$\delta D : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i,j,k}^{L} Z_{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k = 1.$$

Для достаточно гладких поверхностей выбором полуосей a_1 и a_3 можно коэффициенты Z_{ijk} сделать достаточно малыми, чтобы использовать метод разложения функций, зависящих от формы поверхности конфигурации, в ряд Бурмана-Лагранжа [8] по степеням малых коэффициентов Z_{ijk}.

Эти ряды использованы нами непосредственно при составлении программы символьных вычислений ньютоновского гравитационного потенциала и, соответственно, функции Φ [9]. Условие малости Z_{ijk} необходимо для сходимости соответствующих рядов.

Использования разложений интересующих нас аналитических функций в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням аналитической функции, представляющей возмущение эллипсоидальной поверхности $\sum\limits_{i,j,k}^{L} Z_{ijk}x_1^i x_2^j x_3^k$, позволяет нам учесть с нужной степенью точности, сохраняя нужное число членов разложения до определенного номера члена ряда Бурмана-Лагранжа s, влияние границы конфигурации на решение уравнений, определяющих эту конфигурацию.

Полуоси эллипсоида и коэффициенты Z_{ijk}, возмущающие эллипсоидальную конфигурацию, выбираются из условия минимума квадрата плотности на этой поверхности. Это условие можно сформулировать введением функционала $\Lambda = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\delta D}\tilde{\rho}^2 d\Omega$ [7]. Очевидно, что величина $\sqrt{\Lambda}$ представляет меру погрешности при замене точной поверхности конфигурации на δD в уравнениях, определяющих конфигурацию.

В случае несжимаемой однородной гравитирующей вращающейся конфигурации или в случае, когда распределение плотности конфигурации слабо отличается от константы (для политропы с $n \ll 1$), неизвестной функцией является распределение давления. Величина погрешности при замене точной поверхности $p(x,y,z) = 0$ ($p = \frac{P}{P_0}$, P — распределение давления конфигурации, P_0 — давление в ее центре) на δD в уравнениях, определяющих конфигурацию, может быть вычислена по формуле $\sqrt{\Lambda} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\delta D} p^2 d\Omega}$.

В результате внутренний ньютоновский гравитационный потенциал был представлен в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по малым коэффициентам Z_{ijk}, коэффициенты разложения при которых являются полиномами степени $P+s(L-2)+2$ координат x_k, $k=1,2,3$. Здесь P — степень полинома $\sum\limits_{a,b,c}^{P}\tilde{\rho}_{abc}x_1^a x_2^b x_3^c$, которым мы аппроксимировали плотность конфигурации $\tilde{\rho}$. Выбрав P достаточно большим, согласно теореме Стоуна-Вейерштрасса, $\tilde{\rho}$ может быть аппроксимирована указанным полиномом с любой степенью точности.

На экваторе $r = r_e$, $\tilde{\rho}(r_e, x_3 = 0) = 0$. Тогда из (1) следует, что:

$$g_{eq} = g(r_e, x_3 = 0) = \frac{\partial\Phi(r_e, x_3 = 0)}{\partial r_e} - 2\varepsilon r_e \tag{2}$$

Функция $\Phi(r, x_3 = 0)$ вычисляется нами внутри аппроксимирующей поверхности δD, вне этой поверхности мы будем использовать ее аналитическое продолжение. При этом погрешность, с которой мы пренебрегаем гравитационным влиянием масс за пределами аппроксимирующей поверхности, определяется нами как $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1)$ [6].

Разработанный и реализованный в системе символьной математики MAPLE комплекс символьно-численных программ позволил вычислить параметры математической модели вращающейся ньютоновской политропы в области значений показателя политропы $0 < n \leq 1.1$.

Погрешность метода решения уравнения, описывающего вращающиеся ньютоновсие политропы при $0.9 < n \leq 1.1$, у нас составила $\sim 10^{-4}$, при значениях $n \ll 1$ точность используемого метода является величиной $\sim n^2$, а при остальных значениях n из рассматриваемого в работе промежутка $\sim 10^{-3}$.

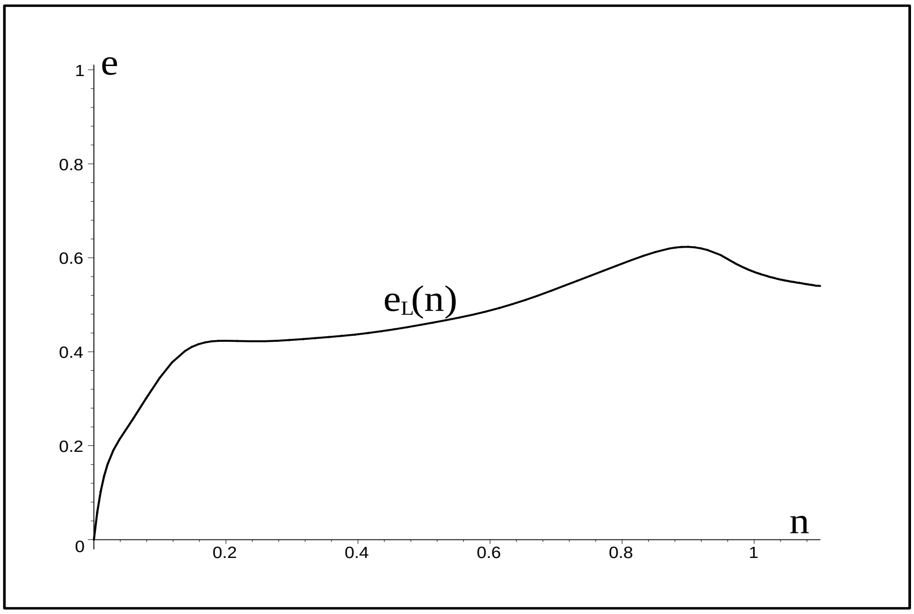

Рис. 1: График функции $e_L(n)$, определяющей значения параметра сплюснутости вращающейся ньютоновской политропы, при которых ускорение свободного падения на экваторе становится равным нулю.

Точность выполнения граничного условия $\sqrt{\Lambda}$ не превосходит величину $\sim 10^{-2}$. Так при $n \ll 1$ она совпадает с точностью метода решения задачи, а при $n \sim 1$ $\sqrt{\Lambda} \sim 10^{-3}$.

Необходимо отметить, что в отличии от [5], в нашем подходе решения задачи о гравитирующих вращающихся конфигурациях, параметр быстроты вращения ε вычисляется, а свободным параметром, из удобств вычислений, является параметр сплюснутости конфигурации $e = \frac{a_3}{a_1}$, который также характеризует степень быстроты вращения гравитирующей конфигурации.

Кривая $g_{eq}(e, n) = 0$ определяет множество точек $e_L = e_L(n)$, таких, что при значениях $e < e_L$ стабильные вращающиеся ньютоновские политропы не существуют. Проведенные нами символьно-численные вычисления функции $e_L(n)$ приводятся на рисунке 1.

Кривая $e_L(n)$ делит область значений параметров e и n $\{(e, n)|0 < e \leq 1; 0 \leq n \leq 1.1\}$ на две: $\{(e, n)|e_L(n) < e \leq 1; 0 \leq n \leq 1.1\}$, для которых существуют стабильные ньютоновские вращающиеся политропы и $\{(e, n)|0 < e < e_L(n); 0 \leq n \leq 1.1\}$, где равновесных конфигураций не существует.

Из графика рисунка 1 видно, что стабильные конфигурации вращающихся ньютоновских политроп при $n \ll 1$ существуют при очень высокой степени их сплюснутости. Функция $e_L(n)$ монотонно возрастает в области значений показателя политропы $0 < n \leq 0.897$. При $0 < n \leq 0.198$ $e_L(n)$ растет достаточно быстро и принимает значения от 0 до 0.423, а при $n > 0.198$ эта функция растет достаточно медленно и достигает своего максимального значения 0.623 при $n = 0.897$. Далее,

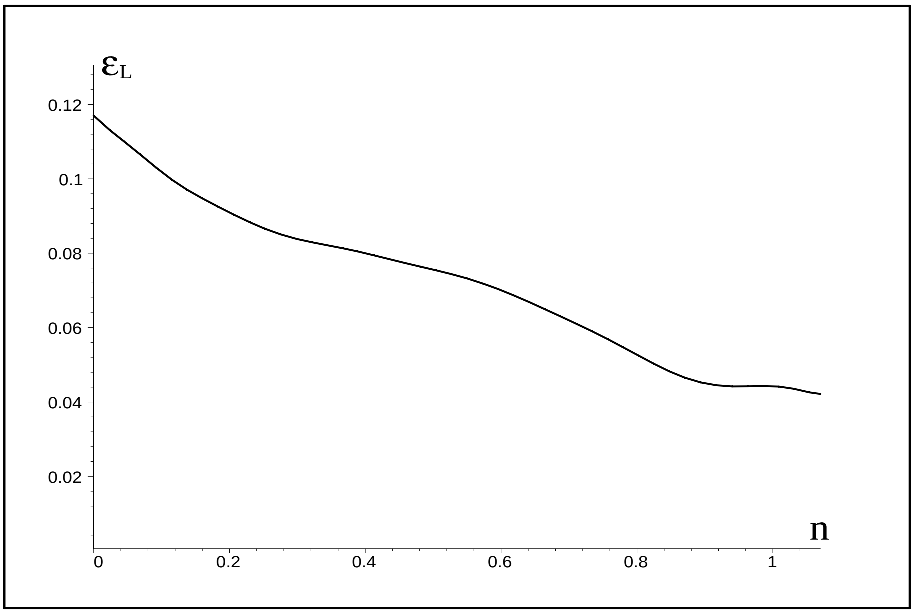

Рис. 2: График функции $\varepsilon_L(n)$, определяющей значения параметра быстроты вращения ньютоновской политропы, при которых ускорение свободного падения на экваторе становится равным нулю.

при $n > 0.897$, наблюдается медленное убывание до значения $e_L(n = 1.1) = 0.540$.

Полученная с помощью разработанного комплекса символьно-численных программ зависимость $\varepsilon_L = \varepsilon_L(n)$, определяющая область значений параметров быстроты вращения ньютоновской политропы ε и показателя политропы n $\{(\varepsilon, n)|0 \leq \varepsilon < \varepsilon_L(n); 0 \leq n \leq 1.1\}$, для которых конфигурации стабильны, приводится на рисунке 2.

Из графика рисунка 2 видно, что при увеличении значения показателя политропы n от 0 до 1.1 интервал допустимых значений параметра быстроты вращения ε ньютоновской политропы уменьшается примерно в два раза. Если считать центральную плотность конфигурации одинаковой для всех значений показателя политропы из рассматриваемого в работе промежутка, то это будет означать, что сжимаемые ньютоновские политропы могут вращаться с меньшей угловой скоростью по сравнению с несжимаемыми однородными конфигурациями примерно в 1.5 раза.

Список литературы

[1] Аппель П.Э. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Пер. с фран. Л.: Глав. ред. обще-техн. л-ры, 1936. с.376.

[2] Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1982.

Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven: Yale Univ. Press, 1969.

[3] Тассуль Ж.Л. Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982, 472 с.

Tassoul J.L. Theory of rotating stars. Princeton University Press, Princeton, New Jarsy, 1978.

[4] Jeans J.H. Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Cambridge: At the Univ. Press, 1919.

[5] James R.A. The structure and stability of rotating gas masses. The Astrophysical Journal, 1964, v. 140, p. 552.

[6] Михеев С.А., Цветков В.П. Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем близким к единице. Препринт ОИЯИ Р11-2007-114. Письма в ЭЧАЯ (в печати).

[7] Беспалько Е.В., Михеев С.А., Пузынин И.В., Цветков В.П. Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния. Мат. моделирование, 2006, т. 118, №3, с. 103-119.

[8] Уиттекер Э.Р., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, М.:Физматгиз, т.1, 1962.

[9] Беспалько Е.В., Михеев С.А., Цветков В.П., Цирулев А.Н., Пузынин И.В. Вычисление ньютоновского потенциала гравитирующей конфигурации с поверхностью, близкой к сфероиду, с помощью символьных и численных методов. Препринт Р11-2005-121. Вестник РУДН, сер. Прикладная и компьютерная математика, 2005, т.4, №2, с. 208-219.