

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГЕОНЫ

Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В.

Кафедра математических методов современного естествознания,
Тверской государственной университет

Обсуждается понятие топологического геона — частицеподобного решения уравнений Эйнштейна с нетривиальной топологией пространственно-временного многообразия. Изучены геометрические условия существования таких решений и их связь с топологическими ручками для сферически-симметричного пространства-времени. Получено и исследовано точное локальное вакуумное решение, содержащее геон.

The notion of topological geon, that is a particle-like solution of the Einstein equations endowed with a non-trivial topology, is discussed. Geometrical conditions for existence of such solutions and connection with wormholes are studied in the case of spherically symmetric space-time. An exact local vacuum solution containing geon is obtained and investigated.

Ключевые слова: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}P^3$, пространство-время, топологический геон.

Keywords: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}P^3$, space-time, topological geon.

Введение. Кроме однородных космологических моделей среди известных классов пространственно-временных многообразий с нетривиальной топологией определен интерес, помимо чисто математического, представляют топологические ручки (кратовые норы, wormholes) и топологические геоны. Топологические ручки впервые рассмотрены в работах [1, 2] качественно — как модель элементарной частицы и основа для введения пенообразной структуры пространства-времени. Как решение уравнений Эйнштейна топологическая ручка, связывающая два асимптотически плоских многообразия, появилась в работах [3, 4]. Известные к настоящему времени решения такого типа обладают сферической симметрией и при этом или имеют горизонт событий, или, в противном случае, поддерживаются необычной (фантомной) формой материи, нарушающей все энергетические условия для тензора энергии-импульса [5, 6]. Топологический геон является, грубо говоря, частицей, образованной из нетривиальной топологии пространства-времени и сосредоточенной, в отличие от топологической ручки, в ограниченной области пространства. Класс топологических геонов предложен в работе [7] и к настоящему времени представлен единственным точным вакуумным решением [8], полученным факторизацией решения Шварцшильда по центру группы изометрий.

Мы будем называть *топологическим геоном* вещественно-аналитическое решение уравнений Эйнштейна, вакуумных или связанных с гравитирующим физическим полем, если пространственно-временное многообразие M асимптотически плоское, имеет отличную от нуля кривизну и гомеоморфно $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \Sigma$, где

обозначает связную сумму многообразий, а Σ – связное компактное трехмерное многообразие, топологически отличное от \mathbb{S}^3 и, следовательно, неодносвязное. Пространственно-временное многообразие M может иметь горизонт событий и не быть геодезически полным. Данное определение имеет чисто априорный статус, однако его формулировка учитывает накопленный опыт исследования и интерпретации решений уравнений Эйнштейна. В топологической части оно эквивалентно определению геона $\mathbb{R} \times \Sigma \setminus \{point\}$ из работы [7], но более явно учитывает связь топологии с геометрией многообразия, в частности, с плоской асимптотикой метрики. Отметим также, что вполне плоские решения, в которых Σ принадлежит одному из десяти топологически различных классов компактных трехмерных многообразий, допускающих плоскую метрику [9], исключаются как нефизические.

Целью нашего сообщения является исследование общих свойств и условий существования сферически симметричных топологических геонов, а также их связи с топологическими ручками. Мы получим решение для вакуумного геона в специальных координатах в окрестности топологической особенности и найдем функции перехода к координатам Шварцшильда и Крускала; это способствует более глубокому пониманию геометрии вакуумного геона и развивает новый метод, пригодный для изучения геонов, связанных с гравитирующими полями.

1. Метрика, кривизна и уравнения Эйнштейна. В окрестности любой точки сферически-симметричного пространства-времени метрику можно записать в виде

$$ds^2 = A^2 dt^2 - B^2 dr^2 - C^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

оставляя свободу в выборе калибровочного условия. Метрические функции A , B и C зависят только от координат t и r . Компоненты рассматриваемых тензорных полей далее будем относить к локальным ортонормированным базисам векторных полей, 1-форм и 2-форм:

$$e_0 = \frac{1}{A} \partial_t, \quad e_1 = \frac{1}{B} \partial_r, \quad e_2 = \frac{1}{C} \partial_\theta, \quad e_3 = \frac{1}{C \sin \theta} \partial_\varphi,$$

$$e^0 = A dt, \quad e^1 = B dr, \quad e^2 = C d\theta, \quad e^3 = C \sin \theta d\varphi,$$

$$\alpha^1 = e^0 \wedge e^1, \quad \alpha^2 = e^0 \wedge e^2, \quad \alpha^3 = e^0 \wedge e^3, \quad * \alpha^1 = e^3 \wedge e^2, \quad * \alpha^2 = e^1 \wedge e^3, \quad * \alpha^3 = e^2 \wedge e^1.$$

При анализе и решении уравнений Эйнштейна будем следовать методу, развитому в работах [10, 11]. Для полноты изложения приведем полученное там выражение для кривизны (далее индекс в скобках означает соответствующую производную вдоль базисного поля, например, $C_{(1)} \equiv e_1 C = (1/B) \partial_r C$)

$$\begin{aligned} R = & \left(\frac{B_{(0)(0)}}{B} - \frac{A_{(1)(1)}}{A} \right) \alpha^1 \otimes \alpha^1 + \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} * \alpha^1 \otimes * \alpha^1 \\ & + \left(\frac{C_{(1)(0)}}{C} - \frac{A_{(1)} C_{(0)}}{AC} \right) (\alpha^3 \otimes * \alpha^2 + * \alpha^2 \otimes \alpha^3 - \alpha^2 \otimes * \alpha^3 - * \alpha^3 \otimes \alpha^2) \\ & + \left(\frac{C_{(0)(0)}}{C} - \frac{A_{(1)} C_{(1)}}{AC} \right) (\alpha^2 \otimes \alpha^2 + \alpha^3 \otimes \alpha^3) + \left(\frac{C_{(1)(1)}}{C} - \frac{B_{(0)} C_{(0)}}{BC} \right) (* \alpha^2 \otimes * \alpha^2 + * \alpha^3 \otimes * \alpha^3), \end{aligned} \quad (2)$$

а также независимые уравнения Эйнштейна

$$-2 \frac{C_{(1)(1)}}{C} + 2 \frac{B_{(0)} C_{(0)}}{BC} - \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} = \varkappa T_{00}, \quad (3)$$

$$-2\frac{C_{(0)(0)}}{C} + 2\frac{A_{(1)}C_{(1)}}{AC} + \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} = \varkappa T_{11}, \quad (4)$$

$$-2\frac{C_{(0)(1)}}{C} + 2\frac{B_{(0)}C_{(1)}}{BC} \equiv -2\frac{C_{(1)(0)}}{C} + 2\frac{A_{(1)}C_{(0)}}{AC} = \varkappa T_{01}. \quad (5)$$

2. Сферически-симметричный топологический геон. Единственным трехмерным связным компактным многообразием с группой изометрий $SO(3)$, отличным от S^3 , является проективное пространство $\mathbb{R}P^3$, поэтому сферически симметричный геон гомеоморфен многообразию $M \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}P^3$.

Пространственноподобное сечение геона M гомеоморфно $\mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}P^3$ и может быть получено из \mathbb{R}^3 вырезанием открытого шара B^3 и отождествлением противоположных точек граничной сферы. Другими словами, это фактормногообразие $(\mathbb{R}^3 \setminus B^3)/\mathbb{Z}_2$ с тривиальным действием группы \mathbb{Z}_2 всюду, кроме точек граничной сферы. Очевидно, что на M существует естественный атлас, составленный не менее чем из трех карт со сферическими координатами (t, r, θ, φ) , в которых угловые координаты ограничены значениями $\theta, \varphi \in (0, \pi)$ на трех парах противоположных стандартных полусфер граничной сферы нефакторизованного многообразия $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$. Ниже будет видно, что трех карт достаточно для вакуумного геона при подходящем выборе координат, например, координат Крускала, соответствующих калибровочному условию $A = B$. В общем случае тремя картами всегда можно покрыть такую окрестность (открытое подмногообразие в M) топологической особенности, которая гомеоморфна всему многообразию M .

Пока не сделан выбор конкретных калибровочных условий, уравнения Эйнштейна (3) – (5) и динамические уравнения для гравитирующих полей имеют одинаковый вид в любой карте естественного атласа. Не теряя общности, мы можем выбрать радиальную координату r равной нулю для каждой пары отождествленных точек граничной сферы и потребовать, чтобы калибровка не нарушала инвариантности уравнений относительно преобразования $r \mapsto -r$. При этом остаются инвариантными и метрические функции, которые, вследствие этой инвариантности и невырожденности метрики, должны удовлетворять условиям (штрих означает производную по r)

$$A'|_{r=0} = 0, \quad B'|_{r=0} = 0, \quad C'|_{r=0} = 0, \quad C''|_{r=0} > 0. \quad (6)$$

Рассмотрим сумму уравнений (3) и (4) в точках гиперповерхности, гомеоморфной $\mathbb{R} \times \mathbb{R}P^2$ и заданной уравнением $r = 0$ в каждой координатной карте естественного атласа. В силу (6) мы имеем

$$\left(\frac{C''}{B^2C}\right)_{r=0} = \left(-\varkappa \frac{T_{00} + T_{11}}{2}\right)_{r=0} + \left(\frac{B_{(0)}C_{(0)}}{BC} - \frac{C_{(0)(0)}}{C}\right)_{r=0}. \quad (7)$$

В статическом случае функция $C(r)$ имеет минимум в точках гиперповерхности $r = 0$ только при $(T_{00} + T_{11})_{r=0} < 0$, т. е. при нарушении слабого энергетического условия. Если метрика не статическая, то правая часть в (7) содержит дополнительные члены и может, вообще говоря, быть положительной в любой момент времени без нарушения каких-либо энергетических условий. В частности, именно такая ситуация имеет место для стационарного вакуумного решения, которое будет рассмотрено ниже.

3. Теорема взаимности. Сферически-симметричная топологическая ручка — это глобальное, космологическое решение, в силу своей геометрической структуры, с топологией $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$. Попытки построить из топологической ручки со сферической симметрией частицеподобное решение посредством изометрических топологических операций, например посредством отождествления областей, симметричных относительно горловины, приводят к нехаусдорфовой топологии. С другой стороны, общий анализ [1, 12, 13] влияния топологии на геометрию показывает, что топологические ручки во многом аналогичны топологическим частицеподобным решениям. В частности, необходимые условия существования топологической ручки [4, 14, 15] могут быть приведены к виду условий (6) и (7) для геона, хотя метрика в окрестности горловины ручки (двумерной сферы с радиальной координатой $r = 0$) не является, вообще говоря, инвариантной относительно преобразования $r \mapsto -r$.

Отсюда вытекает *теорема взаимности: если сферически-симметричная топологическая ручка обладает зеркальной симметрией относительно горловины, то разрез по горловине и отождествление противоположных точек граничной сферы одной из двух частей ручки дает сферически-симметричный топологический геон; обратно, из сферически-симметричного топологического геона можно получить симметричную относительно горловины топологическую ручку*. Детали топологических перестроек, с помощью которых получают взаимные многообразия, вполне очевидны из рассуждений раздела 2.

Важность теоремы взаимности заключается в том, что класс топологических ручек, симметричных относительно горловины, интенсивно изучался на протяжении последних десяти лет и включает в себя много известных решений. В частности, для гравитирующего нейтрального скалярного поля с отрицательным кинетическим членом связь геонов с топологическими ручками обнаружена в работе [16].

Отметим, что векторные расслоения над M , в которых принимают значения гравитирующие поля, могут быть нетривиальными, поскольку нетривиальна топология базы. Поэтому, в отличие от метрических функций, произвольная полевая функция ψ может быть, вообще говоря, как четной, так и нечетной относительно радиальной переменной, т. е. $\psi \mapsto \pm \psi$ при $r \mapsto -r$. Четные и нечетные полевые функции должны, соответственно, удовлетворять условиям $\psi'|_{r=0} = 0$ и $\psi|_{r=0} = 0$. В простейшем случае нечетные полевые функции являются сечениями одномерного вещественного векторного расслоения $\Phi = (M, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_2)$ со структурной группой \mathbb{Z}_2 . Нерв накрытия, рассмотренный в [16] для частного случая, является универсальным для сферически-симметричного геона.

4. Вакуумный геон: локальное решение. Удобно выбрать «квазистатическую» локальную калибровку $B^2 = 1/C$, в которой $C(1) = C'\sqrt{C}$ и выполняется тождество $2B_{(0)}C_{(0)}/B = -C_{(0)}^2/C$ (здесь и далее точка и штрих означают частные производные по t и r соответственно). Тогда уравнение (3) принимает вид

$$2CC_{(1)(1)} + C_{(1)}^2 - 1 = 0$$

и легко интегрируется: $C_{(1)}^2 = 1 - \mu(t)/C$. С учетом условий (6) мы имеем

$$C' = \frac{\sqrt{C - \mu}}{C}, \quad C(t, 0) = \mu(t) > 0, \quad C'(t, 0) = 0, \quad (8)$$

где корень $\sqrt{C - \mu}$ считается двузначной функцией, принимающей положительные (отрицательные) значения при $r > 0$ ($r < 0$). Отметим, что

$$C''(t, 0) = \mu^2(t)/2 > 0.$$

Решение задачи (8) дает

$$C = a_+^{2/3} + a_-^{2/3} - \mu, \quad a_{\pm} = \sqrt{\mu^3 + (3r/4)^2} \pm 3r/4. \quad (9)$$

Уравнение (5) в нашей калибровке принимает вид

$$2C_{(0)(1)} + C_{(0)}C_{(1)}/C = 0,$$

и имеет нетривиальное решение $C_{(0)} = \beta(t)/\sqrt{C}$. Непосредственно из формул (9) вычислим $\dot{C} = \dot{\mu}(2\mu - C)/C$ и, пользуясь тождеством $A = \dot{C}/C_{(0)}$, последовательно найдем

$$A = \frac{\dot{\mu}(2\mu - C)}{\beta\sqrt{C}}, \quad \frac{A_{(1)}}{A} = -\frac{C_{(1)}}{2\mu - C} - \frac{C_{(1)}}{2C}. \quad (10)$$

Подстановка формул (10) и полученных выше выражений для $C_{(1)}$ и $C_{(0)}$ в уравнение Эйнштейна (4) дает связь между функциями β и μ :

$$2\beta\dot{\beta}/\dot{\mu} + 1 = 0 \quad \implies \quad \beta^2 = 2m - \mu,$$

где m – положительная постоянная. Простой анализ показывает, что без потери общности мы можем считать функцию $\mu(t)$ четной и определенной на \mathbb{R} , где она достигает максимума $\mu(0) = 2m$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Любое решение с другим качественным поведением функции $\mu(t)$ приводится к решению (или его части) указанного вида подходящим преобразованием $t \mapsto f(t)$. Подставляя $\beta = \sqrt{2m - \mu}$ в (10), получим

$$A = \frac{\dot{\mu}(2\mu - C)}{\sqrt{2m - \mu}\sqrt{C}}, \quad (11)$$

где корень $\sqrt{2m - \mu}$ считается двузначной функцией, принимающей положительные (отрицательные) значения при $\dot{\mu} > 0$ ($\dot{\mu} < 0$), т. е. при $t < 0$ ($t > 0$) для принятых калибровочных ограничений на $\mu(t)$.

Таким образом, формулы (9), (11) и калибровочное условие $B = 1/\sqrt{C}$ представляют локальное вакуумное решение уравнений Эйнштейна (3) – (5), удовлетворяющее условиям (6) и, следовательно, совместимое с топологией $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}P^3$ пространственно-временного многообразия. Решение имеет смысл при $\mu \leq C < 2\mu$, поэтому в каждой из трех карт в окрестности топологической особенности область изменения координат

$$t \in \mathbb{R}, \quad -(8/3)\mu^{3/2}(t) < r < (8/3)\mu^{3/2}(t), \quad \theta, \varphi \in (0, \pi) \quad (12)$$

является максимально возможной.

Вычисляя конкретные значения компонент кривизны в (2), получим выражение

$$R = \frac{2m}{C^3}(2\alpha^1 \otimes \alpha^1 - \alpha^2 \otimes \alpha^2 - \alpha^3 \otimes \alpha^3 - 2*\alpha^1 \otimes *\alpha^1 - *\alpha^2 \otimes *\alpha^2 - *\alpha^3 \otimes *\alpha^3), \quad (13)$$

которое совпадает с выражением для кривизны пространства-времени Шварцшильда в соответствующем ортонормированном базисе и имеет смысл при всех $C \geq \mu > 0$. Однако, $C \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$, а из (11) следует, что топологическая особенность существует конечное собственное время

$$\bar{s} = \int_{\mathbb{R}} A(t, 0) dt = 2 \int_0^{2m} \frac{\sqrt{\mu} d\mu}{\sqrt{(2m - \mu)}} = \pi m. \quad (14)$$

Можно предположить, что отмеченные локальные свойства решения являются следствием глобальных свойств многообразия: M имеет горизонт событий и скрытую под горизонтом сингулярность, оно локально изометрично пространству-времени Шварцшильда, а вне горизонта (при $C > 2m$) совпадает с ним. Для доказательства этого утверждения и дальнейшего изучения топологической особенности нам необходимо найти максимальное аналитическое продолжение полученного решения.

5. Аналитическое продолжение решения. В первую очередь необходимо найти связь между координатами (12) и шварцшильдовыми координатами.

Переход к координатам $\tau = \tau(t, r)$, $C = C(t, r)$ с якобианом $\sigma = \dot{\tau}C' - \tau'\dot{C}$, где $C(t, r)$ является известной функцией (9), приводит метрику (1) к виду

$$ds^2 = \frac{(AC')^2 - (B\dot{C})^2}{\sigma^2} d\tau^2 - \frac{(B\dot{\tau})^2 - (A\tau')^2}{\sigma^2} dC^2 - 2 \frac{A^2C'\tau' - B^2\dot{C}\dot{\tau}}{\sigma^2} d\tau dC - C^2 d\Omega^2.$$

Из условия ортогональности координат $A^2C'\tau' - B^2\dot{C}\dot{\tau} = 0$ следует

$$\dot{\tau} = p A^2 C', \quad \tau' = p B^2 \dot{C}, \quad \sigma = p (A^2 C'^2 - B^2 \dot{C}^2),$$

где p – интегрирующий множитель, а функции A, B определены выше. Посредством стандартных вычислений получим

$$p = \frac{\sqrt{(2m - \mu)} C^2}{\dot{\mu} (2\mu - C)(C - 2m)}, \quad \dot{\tau} = \frac{\dot{\mu} (2\mu - C) \sqrt{C - \mu}}{\sqrt{2m - \mu} (C - 2m)}, \quad \tau' = \frac{\sqrt{2m - \mu}}{C - 2m}, \quad (15)$$

а интегрирование уравнений (15) дает

$$\tau = 2\sqrt{2m - \mu} \sqrt{C - \mu} + 2m \ln \left(\frac{\sqrt{C - \mu} - \sqrt{2m - \mu}}{\sqrt{C - \mu} + \sqrt{2m - \mu}} \right). \quad (16)$$

Это выражение получено и имеет смысл при условии $2m < C < 2\mu$, которое в области изменения координат (12) выделяет две непересекающиеся связанные подобласти

$$t \in (-t_m, t_m), \quad -(4/3)(2m - \mu(t))^{3/2} + 4m(2m - \mu(t))^{1/2} < |r| < (8/3)\mu^{3/2}(t),$$

где t_m – положительный корень уравнения $\mu(t) = m$. В каждой подобласти рассматриваемое преобразование (16), (9) приводит к метрике Шварцшильда в стандартной форме

$$ds^2 = (1 - 2m/C) d\tau^2 - (1 - 2m/C)^{-1} dC^2 - C^2 d\Omega^2.$$

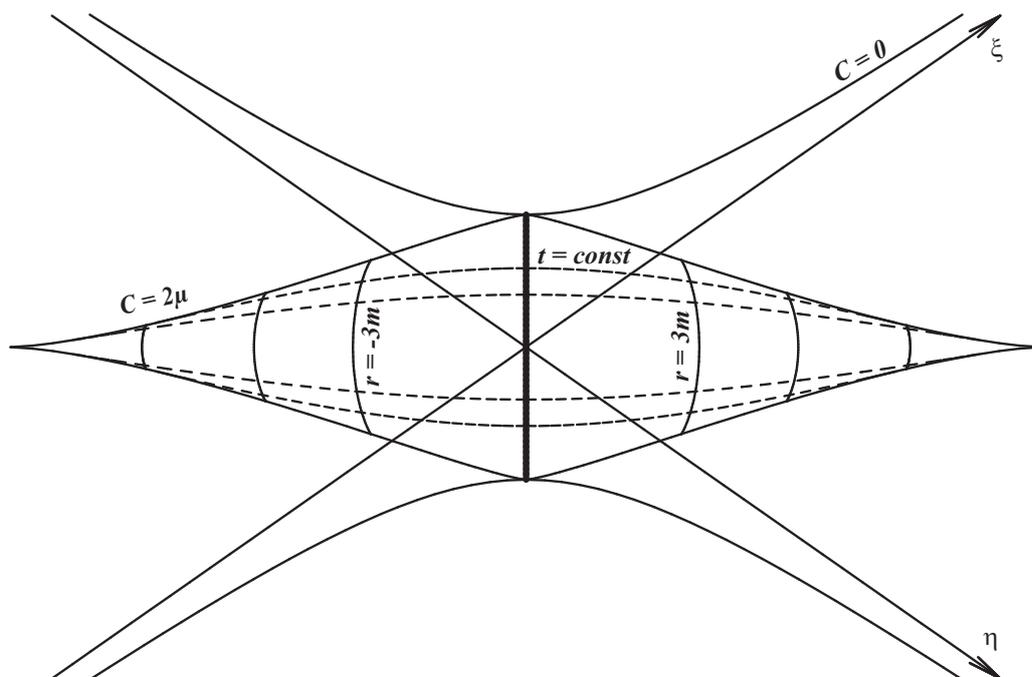


Рис. 1: Область определения ($C < 2\mu$) исходного решения в координатах Крускала.

Переход к координатам Крускала (ξ, η) и метрике

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{C} \exp\left(-\frac{C}{2m}\right) d\xi d\eta - C^2 d\Omega^2, \quad C = C(\xi, \eta) : \xi\eta = \left(\frac{C}{2m} - 1\right) \exp\frac{C}{2m},$$

можно осуществить аналогичным способом, однако существенно проще воспользоваться композицией преобразования (16), (9), а также хорошо известного преобразования от координат Шварцшильда к координатам Крускала. Окончательный результат удобно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{C - \mu} \mp \sqrt{2m - \mu}}{\sqrt{2m}} \exp\left(\frac{C \pm 2\sqrt{2m - \mu} \sqrt{C - \mu}}{4m}\right), \quad (17)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют ξ и η , а корни $\sqrt{C - \mu}$ и $\sqrt{2m - \mu}$ считаются, как и выше, двужначными функциями, принимающими положительные (отрицательные) значения при $r > 0$ ($r < 0$) и $t < 0$ ($t > 0$) соответственно.

Многообразие M может быть покрыто тремя картами Крускала с областью изменения координат, заданной условиями $\xi\eta > -1$ и $\theta, \varphi \in (0, \pi)$. Область, которую занимают исходные координаты (12) на карте Крускала, показана на Рис. 1. Точки топологической особенности $C = \mu$ — гиперповерхности с топологией $\mathbb{R} \times \mathbb{RP}^2$ — представлены отрезком вертикальной прямой $\xi = -\eta$. В таком атласе у любой пары различных карт пересечение носителей имеет четыре связных компонента, гомеоморфных \mathbb{R}^4 . Мы не приводим функций перехода в явном виде вследствие

их громоздкости и, в то же время, очевидности построения. Также вполне очевидным способом определяется регулярный атлас (например, из двенадцати карт), у которого все пересечения носителей карт гомеоморфны \mathbb{R}^4 .

Заключение. Топологический геон является чрезвычайно привлекательной моделью элементарной частицы, поскольку ее масса, заряд и спин, могут быть, в принципе, определены в рамках этой модели как топологические характеристики пространственно-временного многообразия. В сферически-симметричном случае геоны являются взаимными многообразиями с топологическими ручками, симметричными относительно горловины. Это наблюдение является новым важным результатом в теории топологических частицеподобных решений, поскольку весь обширный класс решений для топологических ручек, образованных фантомной формой материи, автоматически включается в класс топологических геонов без горизонта событий.

Вакуумный геон и геоны, связанные с обычной (не нарушающей слабое энергетическое условие) гравитирующей материей, возникают как взаимные многообразия из стационарных черных дыр с топологией ручки $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$. Действительно, в этих случаях условия (6) могут выполняться только для топологической ручки, у которой горловина скрыта под горизонтом событий. Полученное локальное решение помогает лучше понять геометрию таких геонов и взаимных топологических ручек. С точки зрения внешнего наблюдателя мы имеем многообразие черной дыры, полное в том смысле, что все геодезические или могут быть неограниченно продолжены, или оканчиваются на сингулярности. При этом топологический геон действительно можно назвать частицеподобным многообразием, поскольку горизонт имеет топологию цилиндра $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ и для любого пространственноподобного сечения топологическая особенность расположена в ограниченной области под горизонтом.

Пользуясь языком аналогий, мы можем интерпретировать полученное решение для вакуумного геона следующим образом: частица, представляющая собой неодносвязный топологический объект в пространстве-времени, рождается и исчезает на пространственноподобной сингулярности, существуя в течение конечного промежутка собственного времени, равного πm (в геометрических единицах). Она порождает горизонт событий и массу, измеряемую внешним наблюдателем, для которого частица существует бесконечно время. По нашему мнению именно такая интерпретация топологических геонов является наиболее оправданной с физической точки зрения. В связи с этим уместно обсуждать возможность реального существования таких частиц, например, в виде темной материи [17, 18], поскольку вакуумный или связанный с нейтральным скалярным полем геон обладает основным свойством темной материи — он проявляет себя посредством только гравитационного взаимодействия.

Для геонов и топологических ручек уместно обсуждать также квантовые эффекты, термодинамику и т. п. [12, 13, 15], однако эти вопросы выходят далеко за рамки данной статьи. В заключение отметим, что класс физически интересных топологических частицеподобных решений может быть достаточно широк, поскольку наша постановка задачи допускает очевидные обобщения: включение нелинейных гравитирующих полей [19, 20], другая топология многообразия Σ , отказ от сферической симметрии.

Список литературы

- [1] R.W. Fuller, J.A. Wheeler. Causality and multiply connected space-time//Phys. Rev., 1962, V. 128, p. 919.
- [2] J.A. Wheeler. Geometrodynamics. New York, Academic Press, 1962.
- [3] M.S. Morris, K.S. Thorne, U. Yurtsever. Wormholes, time machines, and the weak energy condition// Phys. Rev. Lett., 1988, V. 61, p. 1446.
- [4] M.S. Morris, K.S. Thorne. Wormholes in space-time and their use for interstellar travels// Am. J. Phys., 1988, V. 56, p. 395.
- [5] M. Visser. Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking. New York, AIP Press, 1995.
- [6] C. Barcelo, M. Visser. Scalar fields, energy conditions and transversable wormholes// Phys. Lett. B, 1999, V. 466, p. 127; arXiv:gr-qc/9908029.
- [7] R.D. Sorkin. Introduction to topological geons. Proc. Adv. Study Inst. on Topological Properties and Global Structure of Space-Time, Erice, Italy, May 12-22, 1985, p. 249.
- [8] J. L. Friedman, K. Schleich, D. M. Witt. Topological censorship// Phys. Rev. Lett., 1993, V. 71, p. 1486; arXiv:gr-qc/9305017
- [9] Дж. Вольф. Пространства постоянной кривизны. М.:Мир, 1989. Пер. с англ.: J.A. Wolf. Spaces of constant curvature. Berkley, University of California, 1972.
- [10] A.N. Tsirulev. Gravitational fields with Yang-Mills curvature// Proc. 15th Int. Conf. «High Energy Physics and Quantum Field Theory», Moscow, 2001, p.382.
- [11] A.N. Tsirulev. Curvature decomposition and the Einstein-Yang-Mills equations// Part.Nucl.JINR, 2004, V. 1, N12(119), p. 99.
- [12] V.P. Frolov, I.D. Novikov. Physical effects in wormholes and time machine, Phys. Rev. D, 1990, V. 42, p. 1057.
- [13] Н.Р. Хуснутдинов. Квазиклассические кротовые норы с гладкой горловиной// ТМФ, 2004, Т. 138, с. 297.
- [14] S. Sushkov. Wormholes supported by a phantom energy// Phys. Rev. D, 2005, V. 70, 043520.
- [15] S. Krasnikov. Evaporation induced traversability of the Einstein-Rosen wormhole//2005, arXiv:gr-qc/0507079.
- [16] В.В. Никонов, А.Н. Цирулев, Ю.В. Чемарина. Спектральная краевая задача для гравитирующего скалярного поля в пространстве-времени с топологией $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}P^3$ // Вестник ТвГУ, сер. "Прикладная математика 2006, №4(21), с. 106.
- [17] M. Turner. Dark matter: the critical questions//2002, arXiv:astro-ph/0207297.

- [18] M.C. Bento, O. Bertolami, A.A. Sen. The revival of the unified dark energy – dark matter// Phys. Rev. D, 2004, V. 70, 083519.
- [19] M.S. Volkov, D.V. Galt'tsov. Gravitating non-Abelian solutions and black holes with Yang-Mills fields// Phys. Rep., 1999, V. 319, p. 1.
- [20] И.В. Волобуев, В.О. Малышенко. Точные решения типа кротовых нор в системах Эйнштейна-Янга-Миллса с дополнительными измерениями пространства-времени//Фунд. прикл. матем., 1998, Т. 4, с. 233.