УДК 519.711

РЕТРОСПЕКТИВНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОПРОТИВЛЯЕМОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Дедков В.К., Северцев Н.А.
Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН

В данной статье излагаются основные положения метода прогнозирования причин аварии после факта ее совершения («прогнозирование обращенное в прошлое»).

The basic statements of a method for prediction of reasons of accident after the fact of its fulfillment («prediction versed in the past») are presented.

Ключевые слова: надежность, модель, уравнение, объект.
Keywords: reliability, model, equation, object.

Наряду с прямыми задачами оценивания надежности, нередко возникают обстоятельства, когда по истечении определенного времени эксплуатации требуется «вернуться к прошлому», т.е. «восстановить» исходные характеристики комплекса условий эксплуатации (испытаний) $\widehat{\vartheta} = \vartheta(\widehat{u},\widehat{x})$. Во многих случаях к решению такой задачи побуждает поиск причины, возникшей аварии или просто отказа технического объекта [3].

Известно, что исходная величина сопротивляемости объекта $\widehat{x}$, от которой в значительной мере зависит возможность его отказа, неопределенна, т.е. «не наблюдаема» непосредственно. Она оценивается только косвенно, по результатам испытаний объектов, аналогичных данному. Сам процесс эксплуатации — это и есть последовательная цепь испытаний совокупности объектов, аналогичных рассматриваемому объекту, который является составной частью этой совокупности. По предположению, наиболее вероятная причина возникшего отказа (аварии) — невысокий уровень сопротивляемости объекта (естественно, по отношению к величине нагрузки). Но исходная величина сопротивляемости $\widehat{x}$ не может однозначно указывать на наступление отказа в данном n-м нагружении (испытании), она должна объяснять весь ход изменения показателя надежности на рассматриваемом отрезке времени эксплуатации [0,T].

Ретроспективное прогнозирование «ненаблюдаемой» сопротивляемости, т.е. одной из составляющих комплекса $\widehat{\vartheta}$, осуществляется по наблюдениям фактов, в которых проявляется величина сопротивляемости. Такими фактами являются отказы, а точнее, — частота их появления при заданной (известной) величине нагрузки $\widehat{u}$, что и отражается соответствующими статистическими оценками показателей надежности.

Прогнозирование, «обращенное в прошлое», нередко называют «поставарийной диагностикой», т.е. поиском причины аварии после факта ее свершения [3]. Постановку задачи поставарийной диагностики можно описать следующим выражением:

$$B\varphi_{\hat{x}}(x) = \varphi_{\hat{r}}(r), \tag{1}$$

где

- B — оператор, трансформирующий ненаблюдаемую функцию $\varphi_{\hat{x}}(x)$ (искомую) в наблюдаемую информацию $\varphi_{\hat{r}}(r)$,
- $\varphi_{\hat{x}}(x)$ — ненаблюдаемая функция плотности распределения сопротивляемости $\hat{x}$,
- $\varphi_{\hat{r}}(r)$ — наблюдаемая информация о частоте отказов (плотность распределения числа нагружений (испытаний) до отказа).

Точный вид функций $\varphi_{\hat{r}}^{true}(r)$ и $\varphi_{\hat{x}}^{true}(x)$, также как и оператора B^{true}, — неизвестен. Обозначим через BX множество всех X-ов, отображаемых с помощью оператора B в совокупность всех элементов $B\varphi_{\hat{x}}(x)$. Очевидно, что

$$\varphi_{\hat{r}}^{true}(r) \in BX. \tag{2}$$

Задача заключается в том, чтобы по результатам измерений функции $\varphi_{\hat{r}}^{true}(r)$ определить характеристики функции $\varphi_{\hat{x}}^{true}(x)$, для чего надо решить уравнение $B\varphi_{\hat{x}}^{true}(x) = \varphi_{\hat{r}}^{true}(r)$ относительно искомой функции $\varphi_{\hat{x}}^{true}(x)$. Очевидно, что уравнение $B\varphi_{\hat{x}}(x) = \varphi_{\hat{r}}(r)$ имеет решение, принадлежащее множеству X-в, только для таких наблюдаемых элементов функции $\varphi_{\hat{r}}(r)$, которые принадлежат множеству $B\varphi_{\hat{x}}(x)$. Заметим, что функция $\varphi_{\hat{r}}(r)$ получается опытным путем, и потому известна лишь приближенно. Функция $\varphi_{\hat{r}}(r)$ строится по результатам регистрации отказов (аварий), с последующей их статистической обработкой и получением числовых характеристик. При этом как на этапе регистрации, так и при статистической обработке данных трудно избежать ошибок и погрешностей. Обозначая приближенное значение функции $\varphi_{\hat{r}}(r)$ через $\tilde{\varphi}_{\hat{r}}(r)$, следует рассматривать решение уравнения

$$B\varphi_{\hat{x}}(x) = \tilde{\varphi}_{\hat{r}}(r), \tag{3}$$

на основе которого возможен поиск приближенного значения функции $\varphi_{\hat{x}}(x)$. Однако значения функции $\tilde{\varphi}_{\hat{r}}(r)$ могут в общем случае и не принадлежать множеству BX. Следовательно, точного решения уравнения (3), понимаемого в обычном смысле, не существует, и поэтому нельзя принимать точное решение уравнения (3) в качестве приближения $\tilde{\varphi}_{\hat{x}}(x)$ к $\varphi_{\hat{x}}^{true}(x)$, т.е.

$$\tilde{\varphi}_{\hat{x}}(x) = B^{-1}\tilde{\varphi}_{\hat{r}}(r), \tag{4}$$

где B^{-1} — оператор, обратный оператору B.

Кроме того, оператор B^{-1}, используемый при проведении постдиагностики, не является непрерывным, т.е. малым изменениям наблюдаемой информации $\varphi_{\hat{r}}(r)$ могут соответствовать большие изменения результатов постдиагноза $\varphi_{\hat{x}}(x)$. (Иными словами, «чувствительность» наблюдаемой статистической информации $\varphi_{\hat{r}}(r)$ к изменениям искомой функции $\varphi_{\hat{x}}(x)$ во многих случаях чрезвычайно мала).

Именно это затрудняет, а иногда делает невозможными однозначные результаты постдиагноза. Таким образом, при решении задач постдиагностики возникает принципиальный вопрос: что понимать под их «приближенным решением», т.е. в какой форме следует искать решение обратной задачи постдиагностики?

Если ответ на этот вопрос получен, то возникает задача нахождения таких алгоритмов решения обратной задачи постдиагностики, которые обладают свойством устойчивости (робастности) к малым изменениям исходных данных $\tilde{\varphi}_{\hat{r}}(r)$, т.е. таких, при которых малым изменениям исходных данных соответствуют малые изменения решения.

Решение этой проблемы составляет содержание задачи ретроспективного прогнозирования сопротивляемости или обратной задачи постдиагностики, которая в рассматриваемом случае называется «обратной задачей теории надежности» [1].

Поскольку переменные, посредством которых формулируются модели комплекса обстановки испытаний $\widehat{\vartheta}$, являются характеристиками сопротивляемости $\hat{x}$ и характеристиками нагрузки $\hat{x}$, то обратная задача может формулироваться либо как задача определения одной переменной, либо другой. В большинстве случаев, встречающихся на практике, управление переменными, характеризующими внешнее воздействие (нагрузку), оказывается невозможным. Поэтому хотя определение нагрузки, отвечающей заданным требованиям к надежности устройства при заданных характеристиках его сопротивляемости, не лишено смысла, однако такая постановка задачи не может являться типичной.

Изложенная выше постановка задачи постдиагностики, т.е. «обратной задачи теории надежности» может быть сформулирована и в иных аспектах, соответствующих различным целям исследования [1].

Одним из приложений обратной задачи теории надежности является задача об измерении динамической прочности, т.е. динамической сопротивляемости, технического объекта «ударным» нагрузкам.

Ниже излагается косвенный метод измерения сопротивляемости объектов, подверженных воздействию динамических нагрузок, основанный на использовании зависимости между величиной сопротивляемости и действующей нагрузки, с одной стороны, и частотой отказов или показателем надежности испытываемых устройств, с другой. Зависимость между показателем надежности $R_{\hat{n}}(n)$в последовательной серии независимых испытаний (нагружений) технических объектов и вероятностными характеристиками нагрузки $\hat{u}$ и сопротивляемости $\hat{x}$ имеет вид [1]

$$P\left(\hat{u}_{(n)} \leq \hat{x}\right) = P\left(\hat{n} > n\right) = R_{\hat{n}}\left(n\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\hat{u}}^{n}\left(x\right) dF_{\hat{x}}\left(x\right), \tag{5}$$

где

- $\widehat{u}_{(n)}$ — наибольшее случайное значение нагрузки в последовательности из n испытаний (нагружений) ($\wedge$ — символ случайного объекта);
- $\hat{x}$ — случайное значение сопротивляемости произвольного объекта испытываемой выборки;
- $R_{\hat{n}}\left(n\right)$ — статистическая функция надежности (вероятность того, что за n испытаний ни разу случайная величина нагрузки $\hat{u}$ не превысит случайного значения сопротивляемости $\hat{x}$ произвольного объекта испытываемой вы-

борки, или вероятность того, что число испытаний $\hat{n}$ до отказа превысит заданное число испытаний n);

- $F_{\hat{u}}(u)$ — функция распределения наибольшего (в пределах длительности одного нагружения) случайного значения нагрузки $\hat{u}$;
- $F_{\hat{x}}(x)$ — функция распределения сопротивляемости $\hat{x}$.

Уравнение (5) называется уравнением измерения. Косвенное измерение сопротивляемости при динамических нагружениях, как следует из выражения (5), можно осуществить, определив функцию надежности $R_{\hat{n}}(n)$ по результатам статистических испытаний выборки однотипных объектов и измерив (в статистическом смысле) наибольшее значение действующей нагрузки $\hat{u}$ в серии последовательных испытаний, что принципиальных трудностей не представляет.

Уравнение типа (5) называется интегральным уравнением Фредгольма первого рода. Чтобы решить это уравнение относительно $\varphi_{\hat{x}}(x)$, его необходимо представить в виде системы линейных алгебраических уравнений, для чего интеграл по бесконечным пределам заменяется конечной суммой, а результаты каждого из n испытаний — самостоятельным уравнением. Образованная таким путем система имеет вид

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{m} \varphi_{\hat{x}}(x_j)\ dx_j = 1; \\
\sum_{j=1}^{m} F_{\hat{u}}(x_j)\ \varphi_{\hat{x}}(x_j)\ dx_j = R_{\hat{n}}(1); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\
\sum_{j=1}^{m} F_{\hat{u}}^{n}(x_j)\ \varphi_{\hat{x}}(x_j)\ dx_j = R_{\hat{n}}(n),
\end{gathered} \tag{6}$$

где

- $\varphi_{\hat{x}}(x_j)$ — искомая функция, выраженная в форме значений плотности распределения сопротивляемости $\hat{x}$ в точках $\hat{x}_j$;
- $\hat{x}_j$ — значение аргумента в j-й точке;
- m — число разбиений интервала Δx возможных значений искомой величины $\hat{x}$ на отрезки $[j = 1, ..., m]$;
- n — общее число испытаний;
- i — текущий номер испытания $[i = 1, ..., n]$.

В изложенной постановке задача определения сопротивляемости технического объекта при динамических нагружениях имеет смысл «обратной задачи теории надежности»: по известным (заданным) характеристикам надежности ($R_{\hat{n}}(n)$) и заданным в статистическом смысле условиям эксплуатации ($F_{\hat{u}}(u)$) определить значение сопротивляемости, обеспечивающей заданную надежность. Решение интегрального уравнения (5) — некорректная задача [1].

Таким образом, практическое решение задачи о косвенном измерении сопротивляемости $\hat{x}$ при динамическом нагружении связано с тем, насколько удастся преодолеть трудности, обусловленные ее некорректностью.

Для удобства изложения способа нахождения решения системы (6) представим ее в форме матричного уравнения вида

$$B_{[m]} X_{<m>} = Y_{<m>}, \tag{7}$$

где

- $B_{[m]} \stackrel{d}{=} \left\| F_{\hat{u}}^{i} (x_j) \right\|_m^m$ — квадратная матрица порядка m, составленная из коэффициентов при неизвестных $\varphi_{\hat{x}} (x_j)$;
- $X_{<m>}$ — m-мерный вектор значений искомой плотности $\varphi_{\hat{x}}(x_j)$ распределения сопротивляемости $\hat{x}$;
- $Y_{<m>}$ — m-мерный вектор значений $R_{\hat{n}} (n)$ эмпирической функции надежности.

Вследствие некорректности обратной задачи теории надежности, как и многих других обратных задач физики и техники, система уравнений, описываемая матричной формой (7), оказывается плохо обусловленной, что проявляется в вычислительной неустойчивости ее решения. Различного рода ошибки как в операторе $B_{[m]}$,так и в правой части $Y_{<m>}$ могут привести к такому искажению решения плохо обусловленной системы, что оно становится абсурдным.

Можно выделить два рода погрешностей, приводящих систему (7) к вычислительной неустойчивости. Погрешности первого рода связаны с искажением модели относительно описываемого ею физического процесса, т. е. вместо уравнения (7) решается другое уравнение вида

$$\left(B_{[m]} + \Delta B_{[m]}\right) X_{<m>} = Y_{<m>} + \Delta Y_{<m>}, \tag{8}$$

где

- $\Delta B_{[m]}$ — искажения в операторе $B_{[m]}$;
- $\Delta Y_{<m>}$ — искажения в правой части матричного уравнения (7).

Искажения $\Delta B_{[m]}$ связаны с ограниченностью объема выборки, по результатам которой определены характеристики закона $F_{\hat{u}} (u)$ распределения случайной величины нагрузки $\hat{u}$ в серии последовательных испытаний, а также с ошибками аппроксимации статистического распределения аналитическим выражением и т.п.

Искажения в правой части $\Delta Y_{<m>}$ связаны с ограниченностью объема выборки испытываемых технических объектов, с отсутствием однозначности в некоторых случаях между проявлением отказа и его причинами и т. п.

Погрешности второго рода появляются в процессе решения уравнения (7) и связаны с погрешностями метода и вычислительными погрешностями, возникающими, например, вследствие конечномерности или ограниченности пространства, на котором определен оператор $B_{[m]}$ и т. п.

Не вникая в анализ вычислительных аспектов поиска решения системы уравнений (6) и обусловленности матрицы ее коэффициентов $B_{[m]}$, отметим, что для преодоления отмеченных выше трудностей существует эффективный метод, предложенный А. Н. Тихоновым [2], который позволяет получать регуляризированные решения некорректных или слабо устойчивых задач. Существо этого метода достаточно полно изложено в литературе, например, в [2]. Матричная форма системы уравнений (6) с учетом регуляризирующего функционала, обеспечивающего выполнение дополнительного требования к решению системы, а именно, требования минимума суммы квадратов производной от искомой функции, имеет вид

$$(B_{[m]}^T B_{[m]} + \alpha H_{[m]}) X_{<m>} = B_{[m]}^T Y_{<m>}, \qquad (9)$$

где

- $B_{[m]}^T$ — транспонированная матрица $B_{[m]}$;
- $H_{[m]}$ — матрица регуляризирующего дифференциального оператора;
- α — параметр регуляризации (число).

Таким образом, уравнение связи между сопротивляемостью $\hat{x}$ и определяемой по результатам статистических испытаний надежностью $R_{\hat{n}}(n)$, являющееся уравнением измерения сопротивляемости, оказывается решенным.

Для случая динамических нагружений технических объектов, когда измерение их сопротивляемости не может быть осуществлено ни одним из прямых способов, разработанный метод, открывает возможность измерения важной группы физико-механических свойств технических объектов.

Список литературы

[1] Дедков В. К. Обратная задача теории надежности. – М.: ВЦ им. А.А, Дородницына РАН. 2004. 244с.

[2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.

[3] Меньшиков В.А. Полигонные испытания. М.: КОСМО, 1999. 237 с.