УДК 519.72.92

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Кудинов А.Н., Катулев А.Н., Малевинский М.Ф., Соломаха Г.М.
Тверской государственный университет

Построен B-сплайновый интегральный оператор дифференцирования входного случайного поля и алгоритм его реализации в задачах выделения перепадов на случайных полях. Показано, что операторы-фильтры низких частот являются частным случаем предложенного оператора. Рассмотрены конкретные структуры B-сплайновых интегральных операторов дифференцирования и приведены результаты моделирования, подтверждающие высокую их эффективность.

B-spline integral operator of differentiation of input field is elaborated. Algorithm of it realization for tasks of distribution of sharp changes at random fields is elaborated too. The concrete structures of B-spline integral operators are suggested. The results of mathematical modelling are offered and high efficiency of algorithm is ascertained.

Ключевые слова: B-сплайн, граничные точки, оператор дифференцирования, алгоритм, изображение, случайное поле, спектр.
Keywords: B-spline, edge points, operator of differentiation, algorithm, image, random field, spectrum.

1. Введение. Известно ([1]; [2]; [3], гл.5, с.67-68), что основной проблемой при создании и совершенствовании алгоритмов сегментации изображений на случайных полях является проблема выбора метода выделения граничных точек. Она заключается в обосновании дифференциального оператора фильтрации высших частот и становится более сложной при решении задач выделения слабоконтрастных контуров на изображениях объектов, т.е. в условиях слабых сигналов от объектов, подлежащих обнаружению и распознаванию ([4]; [5], гл.9, с.634-687).

Действительно, выделение граничных точек областей осуществляется в известных работах в предположении, что граничные точки имеют большую величину модуля градиента функции яркости изображения, что не гарантируется при слабых сигналах. К тому же применяемые операторы дифференцирования приводят к расширению спектра частот изображения и, следовательно, к необходимости фильтрации дополнительно порожденных высших частот.

Идеальные же узкополосные дифференциаторы обладают весовой функцией бесконечной протяженности и поэтому их невозможно точно реализовать.

Доказательство этих фактов изложено в приложении.

Отмеченные недостатки схем вычисления производных исключаются при применении интегральных сглаживающих дифференциальных операторов, основанных на вейвлет-преобразовании ([6],гл.2, с.28-49;[7],гл.1, с.29-48;[8]). Это обусловлено тем, что базисные функции вейвлет-преобразования определяются на конечных носителях, что согласуется с финитностью спектральной функции изображения. При этом вейвлет может быть сконструирован в базисе B-сплайнов, а последние обладают следующими свойствами ([9], гл.3, с.96-146):

- являются финитными функциями с носителями минимальной длины;

- без погрешности аппроксимируют степенные полиномы (мономы) на конечном носителе, при этом коэффициенты линейной комбинации определяются из решения систем линейных алгебраических уравнений, имеющих ленточную структуру;

-интегральное преобразование Фурье от B- сплайнов с равномерым расположением узлов имеет достаточно простое аналитическое представление.

Цель статьи заключается в разработке интегрального B - сплайнового вейвлет-оператора дифференцирования входного контрастного (имеет место достаточно большое отношение сигнал/шум) или слабоконтрастного (малое отношение сигнал/шум) случайного поля при априорной неопределенности относительно свойств, параметров формы объектов и вероятностных характеристик объекта, подлежащего выделению, а также аддитивного шумового поля.

2. Постановка задачи. Задана выборка $\{Z(t,x,y)\}$ случайного поля на прямоугольнике $X \times Y$ значений пространственных координат $x \in [\xi_x - X, \xi_x] \subset [-c, c]$ и $y \in [\xi_y - Y, \xi_y] \subset [-d, d]$, где ξ_x, ξ_y — текущие значения координат x и y соответственно, $Z(t,x,y) = \Theta\psi(t,x,y) + \eta(t,x,y)$.

Полагаем, что выборка зафиксирована в текущий момент времени t , ниже будем ее считать дискретной объема $n_1 \times n_2$.

Если $\Theta = 1$, то выборка представляет аддитивную смесь изображения $\psi(t,x,y)$ с изотропным шумовым полем $\eta(t,x,y)$ с нулевым математическим ожиданием. Изображение $\psi(t,x,y)$ определено на локальном частотном носителе, т.е. функция ψ имеет спектр в полосе частот $[-\Omega_x, \Omega_x] \times [-\Omega_y, \Omega_y]$.

Если $\Theta = 0$, то будет иметь место только изотропное шумовое случайное поле

$$Z(t,x,y) = \eta(t,x,y).$$

Информация о конкретном значении параметра Θ в текущий момент времени t отсутствует.

Полагается, что частотный спектр поля $\eta(t,x,y)$ - ограниченный и перекрывает спектр изображения . Априорных данных о других свойствах и параметрах формы изображения и шумового поля не имеется, предполагается лишь, что имеется возможность формировать выборку шумового поля объема $X_1 \times Y_1$ по фрагментам из контролируемого пространства $[-c, c] \times [-d, d]$, всегда свободных от появления в них элементов полезного изображения, и переносить эту выборку на текущее положение прямоугольника $X \times Y$. То есть наряду с выборкой $Z(t,x,y)$ будет иметь место в один и тот же момент времени t выборка $\eta(t,x,y)$.

При $\Theta = 1$ выборка $Z(t,x,y)$ может быть получена либо по контрастному, либо по слабоконтрастному изображению, априорных сведений о конкретном характере изображения в момент t не имеется.

Требуется обнаружить граничные точки $(x,y)^* \in [\xi_x - X, \xi_x] \times [\xi_y - Y, \xi_y]$ областей поля $Z(t,x,y)$, порожденные изображением $\psi(t,x,y)$, при непревышении допустимого уровня вероятности ложного их обнаружения — κ.

В математических терминах для условий существования контрастного изображения соответствующее правило реализации этого требования при априорной неопределенности относительно значений Θ и параметров формы полезного поля на текущий момент времени t записывается в дискретной форме следующим образом:

- принимается решение о необнаружении граничной точки $(x,y)^*$, если

$$F_{\frac{\kappa}{2}} \geq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n_1}\sum\limits_{\mu=1}^{n_2}[D^p Z(t,x_\nu,y_\mu)]^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n_1}\sum\limits_{\mu=1}^{n_2}[D^p \eta(t,x_\nu,y_\mu]^2} \geq F_{1-\frac{\kappa}{2}}, \tag{2.1}$$

  где $x_\nu \in [\xi_x - X, \xi_x]$, $y_\mu \in [\xi_y - Y, \xi_y]$, $D^p Z(t,x_\nu,y_\mu) = \frac{\partial^p Z(t,x,y)}{\partial x^k \partial y^l}|_{x=x_\nu,y=y_\mu}-$

  значение смешанной производной $p=(k+l)$- порядка от функции $Z(t,x,y)$ по переменным x и y в точке $(x=x_\nu, y=y_\mu)$,

- и принимается решение об обнаружении граничной точки $(x,y)^*$ — при невыполнении (2.1).

В этом правиле F_γ,где $\gamma=\frac{\kappa}{2}$ или $\gamma = 1-\frac{\kappa}{2}$, квантиль статистики

$$F = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n_1}\sum\limits_{\mu=1}^{n_2}[D^p Z(t,x_\nu,y_\mu]^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n_1}\sum\limits_{\mu=1}^{n_2}[D^p \eta(t,x_\nu,y_\mu]^2}$$

и такая, что вероятность $P(F \geq F_\gamma \mid \Theta = 0) = \gamma$ вычисляется по F-распределению Фишера- Снедекора ([10], гл. 13, с.402-434) с числом степеней свободы $(n_1 - 1)\times(n_2-1)$, поскольку D^p - интегральный оператор дифференцирования порядка $p=k+l$ функций $Z(t,x,y)$ и $\eta(t,x,y)$ по пространственным переменным x и y нормализует случайные поля на его выходе при $\Theta=1$ и $\Theta=0$.

Структура оператора D^p принимается аналогичной структуре идеального интегрального оператора дифференцирования D^p:

$$D^p Z(t,\alpha,\beta) = \frac{\partial^{k+l} Z(t,x,y)}{\partial x^k \partial y^l}|_{x=\alpha,y=\beta} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^{k,l}(\alpha,x,\beta,y) Z(t,x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(\alpha-x)\delta^{(l)}(\beta-y) Z(t,x,y)dxdy, \tag{2.2}$$

где $\delta(x)$, $\delta(y)$ - дельта-функции от x и y, $\alpha \in [-c,c]$, $\beta \in [-d,d]$,

$$S^{k,l}(\alpha,x,\beta,y) = S^{k,l}(\alpha-x,\beta-y) = S^k(\alpha-x)S^l(\beta-y) = \delta^{(k)}(\alpha-x)\delta^{(l)}(\beta-y).$$

Эта весовая функция (функция Грина) относится к типу разделимых пространственно-инвариантных функций, т.е. при этом обнаружение граничных точек перепадов на входном поле можно осуществлять путем последовательной обработки выборочных данных $D^pZ(t,x_\nu,y_\mu)$ в зависимости от одной какой-либо координаты для каждого значения другой, например, в зависимости от $y_\mu \in [-d,d]$, $\mu = \overline{1,n_2}$ для произвольного x_ν из отрезка $[-c,c]$.

Функция Грина реального оператора D^p , в отличие от функции Грина идеального оператора D^p , подлежит синтезированию с учетом требования ее практической финитности по пространственным координатам x и y , сохранения частотного спектра выходного случайного поля при $\Theta = 1$ на конечном носителе $[-\Omega_x,\Omega_x]\times[-\Omega_y,\Omega_y]$ и подавления высокочастотных составляющих.

Теперь отметим, что с учетом структуры функции Грина $S^{k,l}$ выражение для вычисления статистики F можно записать в виде

$$F = \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{n_2}[D^pZ(t,x_\nu,y_\mu]^2}{\sum\limits_{\mu=1}^{n_2}[D^p\eta(t,x_\nu,y_\mu]^2}, \quad \forall x_\nu \in [-c,c].$$

Для формирования правила обнаружения граничных точек в случае преобразования интегральным оператором дифференцирования слабоконтрастного входного поля рассмотрим отношение правдоподобия

$$g = \frac{f(D^pZ(t,x,y)\mid H_1)}{f(D^pZ(t,x,y)\mid H_0)},$$

где H_0 - гипотеза о том, что $\Theta = 0$, т.е. гипотеза о наличии только шумовой составляющей в выборке $D^pZ(t,x,y)$, $\forall x \in [-c,c]$,

H_1 - гипотеза о наличиии аддитивной смеси полезного поля с шумовым,

$f(D^pZ(t,x,y)\mid H_i)$ - нормальные плотности вероятностей выборок $(i=0,1)$.

Очевидно, что в рассматриваемом случае гипотезы H_0 и H_1 являются близкими, поэтому (с учетом 2.2) имеет место выражение для g следующего вида

$$g = \frac{f(D^pZ(t,x,y)\mid \Theta = \Theta_0+\delta)}{f(D^pZ(t,x,y)\mid \Theta_0)}, \delta > 0, \forall x \in [-c,c],$$

которое достаточно просто преобразуется к виду ([11], гл.21, с.211-226;)

$$g = \frac{\partial ln f(D^pZ(t,x,y)\mid \Theta_0)}{\partial\Theta}\delta + 1, \forall x \in [-c,c]$$

или, с учетом того, что $f(D^pZ(t,x,y)\mid \Theta_0)$ - нормальная плотность вероятностей выборки и $\Theta_0 = 0$, в дискретной форме к виду

$$g = \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{n_2} D^pZ(t,x_\nu,y_\mu)}{\sigma^2}\delta + 1, \forall x_\nu \in [-c,c],$$

где σ^2 - дисперсия шумовой составляющей выборки $\{D^pZ(t,x_\nu,y_\mu)\}$, $\mu = \overline{1,n_2}$, $\nu = n_1+1, n_1+2, \ldots$, вычисляемой по фоновому фрагменту, свободному от элементов полезного поля на изображении.

В результате правило выбора решения об обнаружении граничной точки записывается в виде: если $g-1 \geq \rho(\kappa)$, то принимается решение об обнаружении граничной точки, иначе — решение о необнаружении граничной точки.

Для этого правила пороговое значение $\rho(\kappa)$ находится согласно допустимому уровню вероятности ложной тревоги κ по выражению

$$\int\limits_{\rho(\kappa)}^{\infty} \pi(g \mid H_0)dg = \kappa,$$

где $\pi(g \mid H_0)$ - нормальная плотность вероятностей $N(0, \sigma^2)$.

Значение величины δ в выражении для статистики g рассчитывается только тогда, когда алгоритм обнаружения граничной точки для контрастного изображения выдает решение о ее необнаружении. Если при этом F близко к единице и $F > 1$, то в качестве значения δ можно взять $\delta = F - 1$.

Итак, структура правила обнаружения граничных точек $(x, y)^*$, порожденных полезным полем $\psi(t, x, y)$, $\forall x \in [-c, c]$, должна обеспечивать реализацию правила обнаружения граничных точек как в условиях контрастных изображений, так и в условиях слабоконтрастных изображений, то есть структура правила должна быть двухканальной. Второй канал функционирует при выполнении условий (2.1).

Очевидно, что такая структура будет обладать большей мощностью $(1 - \zeta)$ при допустимом фиксированным уровне значимости κ по сравнению с каждой одноканальной структурой и $1 - \zeta = 1 - \zeta_k\zeta_{ck}$, где ζ_k - вероятность пропуска обнаружения граничной точки при контрастном изображении, ζ_{ck} - вероятность пропуска обнаружения граничной точки при слабоконтрастном изображении.

Для полного раскрытия структуры обнаружителя перейдем к выявлению функций Грина $S^k(x)$ и $S^l(y)$.

3. Функции Грина интегрального оператора дифференцирования случайных полей. Согласно общему виду идеального оператора дифференцирования D^p запишем выражение для вычисления $D^pZ(t,x,y) = W^{k,l}_{n,m}(t, \alpha, \beta, a_x, a_y, \gamma, \delta)$-смешанной производной порядка $p = (k + l)$ по пространственным переменным x и y от функции $Z(t, x, y)$ в точке $(x = \alpha, y = \beta)$

$$W^{k,l}_{n,m}(t, \alpha, \beta, a_x, a_y, \gamma, \delta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^k_n(\frac{\alpha - x + \gamma}{a_x})S^l_m(\frac{\beta - y + \delta}{a_y})Z(t,x,y)dxdy, \quad (3.1)$$

где $S^k_n(...)$, $S^l_m(...)$ — функции Грина оператора D^p.

Этот оператор суть непрерывное вейвлет-преобразование с параметрами сдвига — γ, δ и масштаба — a_x, a_y, а $S^k_n(x)$, $S^l_m(y)$ — обратные преобразования Фурье (с множителями j^k и j^l, $j = \sqrt{-1}$) линейных комбинаций B-сплайнов с равномерным расположением узлов для координат x и y соответственно. То есть в развернутом виде выражения для $S^k_n(x)$ и $S^l_m(y)$ записываются следующим образом

$$S^r_\Phi(u) = \frac{j^r h_u}{2\pi a_u^{r+1}}(\frac{sin(uh_u/2)}{uh_u/2})^{\Phi+1}\sum_{i=-E_R}^{E_R} a^r_i e^{jh_u ui}, \quad (3.2)$$

где $u = x$ или y , $\Phi = n$ или m - степени B-сплайнов по координате x или y, $r = k$ или l, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq m$ - порядок вычисляемой частной производной по координате x или y соответственно; $h_u = \frac{2\Omega_u}{R}$, Ω_u - верхняя граничная частота спектра выходных значений оператора (3.1) по координате x или y; R равно N или M - количество подынтервалов равномерного разбиения отрезка $[-\Omega_u, \Omega_u]$, $E_R = [R/2]-$ наименьшее целое число, которое больше или равно $R/2$, a_i^r - постоянные коэффициенты, при $r = k$, $i = \overline{-E_N, E_N}$, при $r = l$, $i = \overline{-E_M, E_M}$ линейной комбинации B-сплайнов Φ -ой степени с равномерным расположением узлов в частотной области $[-\Omega_u, \Omega_u]$ и интерполирующей моном ω_u^r.

Следовательно,

$$\omega_u^r = \sum_{i=-E_R}^{E_R} a_i^r B_\Phi(\omega_u/h_u - i), \;\; -\Omega_u \leq \omega_u \leq \Omega_u, \tag{3.3}$$

где

$B_\Phi(\omega) = \frac{1}{\Phi!}\sum_{i=0}^{\Phi+1}(-1)^i C_{\Phi+1}^i(\omega + \frac{\Phi+1}{2} - i)_+^\Phi$;

$C_{\Phi+1}^i = \frac{(\Phi+1)!}{i!(\Phi+1-i)!}$;

$$\omega_+^\Phi = \begin{cases} \omega^\Phi, & \text{при } \omega \geq 0, \\ 0, & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Для каждого индекса $r = \overline{0, \Phi}$ коэффициенты a_i^r, $i = \overline{-E_R, E_R}$ вычисляются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\omega_{ul}^r = \sum_{i=-E_R}^{E_R} a_i^r B_\Phi(\omega_{ul}/h_u - i), \;\; l = \overline{0, 2E_R}$$

где $\omega_{ul} = -\Omega_u + \frac{l\Omega_u}{E_R}$, $l = \overline{0, 2E_R}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Оператор (3.1) осуществляет вычисление смешанных производных $p = (k + l)$ порядков по пространственным переменным x и y от входного сигнала $Z(t, x, y)$ с устранением из его спектра составляющих с частотами вне диапазона

$|\omega_x| \leq \Omega_x + nh_x$, $|\omega_y| \leq \Omega_y + mh_y$.

Доказательство. Найдем двумерное преобразование Фурье от свертки (3.1):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{n,m}^{k,l}(t, \alpha, \beta, a_x, a_y, \gamma, \delta)e^{-j(\omega_x\alpha + \omega_y\beta)}d\alpha d\beta =$$

$$= \tilde{W}_{n,m}^{k,l}(t, \omega_x, \omega_y, a_x, a_y, \gamma, \delta) = a_x\tilde{S}_n^k(a_x\omega_x)a_y\tilde{S}_m^l(a_y\omega_y)\tilde{Z}(t, \omega_x, \omega_y)e^{j(\omega_x\gamma + \omega_y\delta)},$$

где $\tilde{S}_n^k(\omega_x)$, $\tilde{S}_m^l(\omega_y)$, $\tilde{Z}(t, \omega_x, \omega_y)$ - преобразования Фурье от $S_n^k(\omega_x)$, $S_m^l(\omega_y)$, $Z(t, \omega_x, \omega_y)$ соответственно. С учетом (3.3)

$$e^{j\omega_x\gamma}a_x\tilde{S}_n^k(a_x\omega_x) =$$

$$= e^{j\omega_x\gamma}\frac{j^k h_x}{2\pi a_x^{k+1}}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{sin(xh_x/2)}{xh_x/2})^{n+1}\sum_{i=-E_N}^{E_N} a_i^k e^{jh_x xi}e^{-j\omega_x a_x x}dx =$$

$$
= \begin{cases} (j\omega_x)^k e^{j\omega_x\gamma}, & \text{при } |\omega_x| \le \Omega_x, \\ e^{j\omega_x\gamma} \frac{j^k}{a_x^k} \sum\limits_{i=-E_N}^{E_N} a_i^k B_n(\frac{a_x\omega_x}{h_x} - i), & \text{при } \Omega_x < |\omega_x| < \Omega_x + nh_x, \\ 0, & \text{при } |\omega_x| \ge \Omega_x + nh_x. \end{cases} \quad (3.4)
$$

Аналогичные выражения получаются и для $a_y\tilde{S}_m^l(a_y\omega_y)$. Здесь использовано соотношение

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_n(\frac{\omega_x}{h_x} - i)e^{-j\omega_x x}d\omega_x = h_x e^{-jxih_x}(\frac{sin(xh_x/2)}{xh_x/2})^{n+1}.
$$

Таким образом, на основании (3.4) функция $\tilde{W}_{n,m}^{k,l}(t,\omega_x,\omega_y,a_x,a_y,\gamma,\delta)$ в частотной области $|\omega_x| \le \Omega_x$, $|\omega_y| \le \Omega_y$ соответствует операции вычисления k -ой производной по переменной x и l -ой производной по переменной y от входного поля $Z(t,x,y)$ с подавлением в спектре высокочастотных составляющих, т.е. частот со значениями вне диапазонов $|\omega_x| \le \Omega_x + nh_x$, $|\omega_y| \le \Omega_y + mh_y$. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Из выражения (3.2) как частный случай следует весовая функция фильтра низких частот.

Действительно, используем B-сплайн нулевой степени $n = 0$ для получения сглаженного поля $k = 0$. Из выражений (3.2) и (3.3) при $N = 1$ получим, что

$$
S_0^0(x) = \frac{\Omega_x}{\pi}\frac{sin x\Omega_x}{x\Omega_x}.
$$

Известно ([14], гл.8, с.193), что выражение для $S_0^0(x)$ является весовой функцией фильтра низких частот.

Вейвлет $S_n^k(x)S_m^l(y)$ обладает оптимальными свойствами, предъявляемыми к непрерывным вейвлетам. Он финитен в частотной области. С увеличением степеней n и m увеличивается скорость убывания (стремления к нулю) множителя

$$
(\frac{sin(xh_x/2)}{xh_x/2})^{n+1} \times (\frac{sin(yh_y/2)}{yh_y/2})^{m+1}
$$

при $|x| \to \infty$, $|y| \to \infty$.

Поэтому подбором степеней n и m можно добиться такого свойства данного вейвлета, что он будет практически (с достаточной степенью точности) финитен и по пространству.

Следствие 2. С помощью вейвлет-преобразований (3.1) путем каскадного и параллельного их соединения можно реализовать любую структурную схему линейного оператора дифференцирования.

Например, в первом каскаде производится подавление высокочастотных составляющих в самом входном поле, затем во втором каскаде производится вычисление производной, в третьем каскаде происходит сглаживание первой производной, в четвертом - вычисление второй производной и т.д.

Частным случаем вейвлет-преобразования (3.1) явдяется линейный дифференциальный оператор вида

$$a_{11}\frac{\partial^2 Z(t,x,y)}{\partial^2 x} + a_{12}\frac{\partial^2 Z(t,x,y)}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 Z(t,x,y)}{\partial^2 y} +$$
$$+a_{10}\frac{\partial Z(t,x,y)}{\partial x} + a_{01}\frac{\partial Z(t,x,y)}{\partial y} + a_{00}Z(t,x,y), \qquad (3.5)$$

где $a_{ik},\ i,k = 0,1,2$ - заданные коэффициенты,

первое слагаемое в (3.5) реализуется интегральным оператором (3.1) при $k = 2$, $l = 0$, второе слагаемое - при $k = 1$, $l = 1$, третье - при $k = 0$, $l = 2$, четвертое - при $k = 1$, $l = 0$, пятое - при $k = 0$, $l = 1$ и шестое - при $k = 0$, $l = 0$.

Если, например, в выражении (3.5) положить $a_{11} = a_{22} = 1$, а остальные коэффициенты - равными нулю, то получим оператор Лапласа, который широко используется в обработке изображений ([5], гл.32, с.192-200).

4. Варианты функций Грина интегрального интегрального оператора дифференцирования. Ниже рассмотрены функции Грина для различных значений параметров оператора из (3.1)-(3.2).

4.1. При $l = 0$, , $N = 2$, $\delta = 0$, $a_y = 1$ (сглаживание входного поля) и использовании B-сплайна первой степени из (3.2) получаем выражение для функции Грина

$$S_1^0(x) = \frac{\Omega_x}{2\pi}(\frac{sin\Omega_x x/2}{\Omega_x x/2})^2(1 + 2cos\Omega_x x).$$

4.2. При $n = 1$, $N = 2$, $k = 1$, $a_x = 1$ (вычисление сглаженного значения производной входного сигнала) имеем

$a_{-1}^1 = -\Omega_x$, $a_0^1 = 0$, , $a_1^1 = \Omega_x$,

$$S_1^1(x) = -\frac{{\Omega_x}^2}{\pi}(\frac{sin\Omega_x x/2}{\Omega_x x/2})^2 sin\Omega_x x.$$

4.3. При $n = 2$, $N = 3$, $a_x = 1$, $k = 0$ (сглаживание входного поля) получаем

$$S_2^0(x) = \frac{\Omega_x}{3\pi}(2cos\frac{4\Omega_x}{3}x + 1 + 2cos\frac{2\Omega_x x}{3})(\frac{sin\Omega_x x/3}{\Omega_x x/3})^3.$$

4.4. При $k = 1$ и остальных параметрах из п.4.3 (вычисление сглаженной производной входного поля) имеем

$a_{-2}^1 = -\frac{4}{3}\Omega_x$, $a_{-1}^1 = -\frac{2}{3}\Omega_x$, $a_1^0 = 0$, $a_1^1 = \frac{2}{3}\Omega_x$, $a_2^1 = \frac{4}{3}\Omega_x$,

$$S_2^1(x) = \frac{-4\Omega_x^2}{9\pi}(2sin\frac{4\Omega_x}{3}x + sin\frac{2\Omega_x x}{3})(\frac{sin\Omega_x x/3}{\Omega_x x/3})^3.$$

4.5. При $k = 2$ и остальных параметрах из п.4.3 (расчет сглаженных значений второй производной входного поля) находим

$a_{-2}^2 = a_2^2 = \frac{5}{3}{\Omega_x}^2$, $a_{-1}^2 = a_1^2 = \frac{1}{3}{\Omega_x}^2$, $a_0^2 = -\frac{1}{9}{\Omega_x}^2$,

$$S_2^2(x) = \frac{-\Omega_x^3}{9\pi}(10cos\frac{4\Omega_x}{3}x - \frac{1}{3} + 2cos\frac{2\Omega_x x}{3}).$$

Отметим, что поскольку для B-сплайнов используется расширенная сетка узлов, которые принимают значения и вне частотного диапазона $|\omega_u| \le \Omega_u$, то возникают ошибки аппроксимации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) идеального узкополосного дифференциатора при $\Omega_u < |\omega_u| < \Omega_u + \Phi h_u$.

ω	1	1,2	1,4	1,5	1,8	2	$\omega > 2$
$\Delta_{1,2}(\omega)$	1	0,8	0,6	0,5	0,2	0	0
$\Delta_{1,4}(\omega)$	1	0,6	0,2	0	0	0	0
$\Delta_{1,10}(\omega)$	1	0	0	0	0	0	0
$K_1(\omega)$	1	1,2	1,4	1,5	1,8	2	> 2

Таблица 1: *Изменение амплитудно-частотной характеристики фильтра вычисления первой производной вне заданного диапазона частот.*

Для таких значений ω_u ошибки аппроксимации вычисляются по правой части формулы (3.3).

Так, для вычисления сглаженных значений производной первого порядка с использованием B-сплайнов первой степени изменения амплитудно - частотных характеристик $\Delta_{1,2}(\omega)$, $\Delta_{1,4}(\omega)$ и $\Delta_{1,10}(\omega)$ вне заданного диапазона нормированных частот для $N = 2$, $N = 4$ и $N = 10$ соответственно приведены в таблице.

В последней строке таблицы приведены значения амплитудно-частотной характеристики идеального дифференциатора первого порядка.

Из приведенных в таблице данных видно, что при увеличении числа узлов N амплитудно-частотная характеристика предложенного фильтра стремится к АЧХ идеального узкополосного фильтра.

Моделированием оценена эффективность предложенного двухканального фильтра выделения граничных точек контуров изображений при значениях отношения сигнал-шум 3,3 (случай контрастного изображения) и 1,7 (случай слабокотрастного изображения). Установлено, что такой фильтр обеспечивает обнаружение граничных точек с вероятностью не менее 0,7 при вероятности ложной тревоги единичного перепада не более 0,07-0,1.

5. Заключение.

1. На основе линейной комбинации B-сплайнов в частотной области получен интегральный оператор дифференцирования случайных полей, подавляющий высокочастотные составляющие входного изображения.

2. За счет расширения сетки узлов за границы отрезка $[-\Omega_x, \Omega_x]$ линейная комбинация B-сплайнов фактически будет тождественно равна нулю только вне отрезка $[-\Omega_x - nh_x, \Omega_x + nh_x]$, хотя на отрезках $[-\Omega_x - nh_x, -\Omega_x]$ и $[\Omega_x, \Omega_x + nh_x]$ она быстро стремится к нулю. Поэтому выбором количества узлов N_x можно уменьшить шаг $h_x = 2\Omega_x/N_x$ и тем самым уменьшить спектральный интервал. В результате построенный B - сплайновый вейвлет-фильтр будет обладать полосой пропускания частот только в требуемом диапазоне.

3. Выбор соответсвующих параметров интегрального оператора дифференцирования позволяет получить выражения для функций Грина при решении различных задач обработки случайных полей.

4. Результаты моделирования подтверждают высокую эффективность предложенного двухканального фильтра по выделению граничных точек изображений из шумов различной интенсивности.

6. Приложение. Доказательство факта расширения спектра. Пусть в некоторый фиксированный момент времени t имеется выборка двумерного изображения, описываемая уравнением наблюдения

$$Z(t,x,y) = \psi(t,x,y) + \eta(t,x,y),$$
$$-c \leq x \leq c,\ -d \leq y \leq d,$$

где

- c, d — граничные точки прямоугольника, в котором наблюдается изображение в произвольный момент времени t;
- $\psi(t,x,y)$ — двумерная функция яркости (идеальное изображение), представляющая изображения объектов, подлежащих обнаружению;
- $\eta(t,x,y)$ — однородное по пространству случайное поле с нулевым математическим ожиданием.

Требуется по полученной в каждый момент времени t выборке $Z(t,x,y)$ выделить границы однородностей изображения $\psi(t,x,y)$.

Для этого обычно [1] вычисляют частные производные $\frac{\partial Z(t,x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial Z(t,x,y)}{\partial y}$ по пространственным переменным x и y или оператор Лапласа. В спектральной области соответствующие соотношения записываются в виде [1]

$$\tilde{W}_x(t,\omega_x,\omega_y) = -j\omega_x \tilde{Z}(t,\omega_x,\omega_y), \tag{1}$$

$$\tilde{W}_y(t,\omega_x,\omega_y) = -j\omega_y \tilde{Z}(t,\omega_x,\omega_y), \tag{2}$$

$$\tilde{W}_l(t,\omega_x,\omega_y) = -(\omega_x^2 + \omega_y^2)\tilde{Z}(t,\omega_x,\omega_y), \tag{3}$$

где

- ω_x, ω_y — пространственные частоты;
- $\tilde{W}_x(t,\omega_x,\omega_y)$, $\tilde{W}_y(t,\omega_x,\omega_y)$; — преобразования Фурье пространственных производных первого порядка от функции $Z(t,x,y)$;
- $\tilde{W}_l(t,\omega_x,\omega_y)$ — преобразование Фурье лапласиана;
- $\tilde{Z}(t,\omega_x,\omega_y)$ — преобразование Фурье функции $Z(t,x,y)$.

Из (1)-(3) непосредственно видно расширение спектра изображения, и естественно возникает необходимость фильтрации дополнительно порожденных высших частот.

Аналогичное проявление имеет место и при вычислении производных через разности [2]. Так, с помощью решетчатых функций первые разности, аппроксимирующие производные $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ в точке (i,k) , записываются в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial x}[t,i,k] = Z[t,i,k+1] - Z[t,i,k], \tag{4}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}[t,i,k] = Z[t,i+1,k] - Z[t,i,k], \tag{5}$$

а разностный оператор Лапласа представляется в следующей форме

$$\Delta^2 Z[t,i,k] = Z[t,i+1,k] + Z[t,i-1,k] + Z[t,i,k+1] + Z[t,i,k-1] - 4Z[t,i,k]. \tag{6}$$

Теперь, взяв двумерное дискретное преобразование Фурье от выражений (4)-(6), получим соответственно

$$D_x(t,\overline{\omega}_x,\overline{\omega}_y) = [cos\overline{\omega}_x - 1 + jsin\overline{\omega}_x]D_z(t,\overline{\omega}_x,\overline{\omega}_y), \tag{7}$$

$$D_y(t,\overline{\omega}_x,\overline{\omega}_y) = [cos\overline{\omega}_y - 1 + jsin\overline{\omega}_y]D_z(t,\overline{\omega}_x,\overline{\omega}_y), \tag{8}$$

$$D_{\Delta^2}(t,\overline{\omega}_x,\overline{\omega}_y) = -4[sin^2\frac{\overline{\omega}_x}{2} + sin^2\frac{\overline{\omega}_y}{2}]D_z(t,\overline{\omega}_x,\overline{\omega}_y), \tag{9}$$

$$-\pi \leq \overline{\omega_x} \leq \pi,\ -\pi \leq \overline{\omega_y} \leq \pi,$$

где $D_z(t,\overline{\omega}_x,\overline{\omega}_y) = \sum\limits_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} e^{-jn_1\overline{\omega}_x} e^{-jn_2\overline{\omega}_y} Z[t,n_1,n_2] -$

двумерное дискретное преобразование Фурье от дискретного изображения $Z[t,n_1,n_2]$.

Из (7)-(9) следует, что разностные операторы не только не подавляют в спектре изображения $Z(t,x,y)$ высокочастотные составляющие, но и дополнительно порождают их.

Если же для устранения высокочастотных составляющих входного случайного поля $Z(t,x,y)$ использовать дифференциальный оператор низких частот с идеальной частотной характеристикой

$$W(j\omega) = \begin{cases} (j\omega)^k, & \text{при } |\omega| \leq \Omega, \\ 0, & \text{при } |\omega| > \Omega, \end{cases}$$

где k -порядок производной, то соответствующий фильтр должен обладать большой и практически неприемлемой памятью.

Лемма 1. Идеальные узкополосные дифференциаторы k - го ($k \geq 0$) порядка по пространственной переменной (x или y) обладают весовой функцией бесконечной протяженности.

Доказательство. Весовая функция $S_u^k(x)$ идеального узкополосного дифференциатора k-го порядка определяется выражением

$$S_u^k(x) = \frac{j^k}{2\pi}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega} \omega^k e^{j\omega x} d\omega = \frac{j^k}{2\pi}[R_k(x) + jM_k(x)],$$

где

$R_k(x) = \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} \omega^k cos(\omega x) d\omega,\ M_k(x) = \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} \omega^k sin(\omega x) d\omega.$

Функции $R_k(x)$ и $M_k(x)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$R_k(x) = C_k(\Omega, x) - C_k(-\Omega, x);\ M_k(x) = S_k(\Omega, x) - S_k(-\Omega, x);$$

$$C_i(\omega, x) = \begin{cases} \omega^i \frac{sin\omega x}{x} - \frac{i}{x} S_{i-1}(\omega, x), & \text{при } x \neq 0, \\ \frac{\omega^{i+1}}{i+1}, & \text{при } x = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$S_i(\omega, x) = \begin{cases} -\omega^i \frac{cos\omega x}{x} + \frac{i}{x} C_{i-1}(\omega, x), & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0; \end{cases} \tag{11}$$

при $i = \overline{1, k}$,

$$C_0(\omega, x) = \begin{cases} \frac{sin\omega x}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ \omega, & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$S_0(\omega, x) = \begin{cases} -\frac{cos\omega x}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Из выражений (10)-(12) видно, что $S_u^k(x)$ содержит функции $\frac{sin\Omega x}{x}$ и $\frac{cos\Omega x}{x}$, которые имеют медленную сходимость к нулю и не равны тождественно нулю вне любого конечного отрезка $[-T, T]$, $|T| < \infty$.

Следовательно, весовая функция $S_u^k(x)$ идеального узкополосного дифференциатора для любого $k \geq 0$ имеет бесконечную протяженность. Лемма доказана.

Список литературы

[1] Бакут П.А., Колмогоров Г.С. Сегментация изображений: методы выделения границ областей// Зарубежная радиоэлектроника. 1987. N10. С.25-47.

[2] Денисов Д.А., Низовкин В.А. Сегментация изображений на ЭВМ // Зарубежная радиоэлектроника. 1985. N10. С.5-30.

[3] Яншин В.В. Анализ и обработка изображений: принципы и алгоритмы. - М.: Машиностроение, 1995. 112 с.

[4] Кондратьев В.В., Утробин В.А. Формирование описания изображения в условиях неопределенности // ДАН РФ. 1996. Т.347. N3. С.316-318.

[5] Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В.А. Сойфера. - М.:Физматлит, 2001. 780 с.

[6] Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет преобразования. - С-Пб.: ВУС, 1999. 203 с.

[7] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам.- Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 463 с.

[8] Кюркчан А.Г., Анютин А.П. Метод продолжения граничных условий и вейвлеты.// ДАН РФ. 2002. Т.385. N3. С.309-313.

[9] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн- функций. - М.: Наука, 1980. 352 с.

[10] Уилкс С. Математическая статистика. - М.: Наука, 1967. 632 с.

[11] Козлов М.П., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику. - М.: МГУ, 1987. 264 с.

[12] Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. - М.: Мир, 1978. 500 с.

[13] Гоноровский И.С., Демин М.П. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Радио и связь, 1994. 481.

[14] Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 1988. 448 с.