УДК 519.711

ЗАДАЧА ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ И СОХРАНЕНИИ РЕСУРСОВ

Андреева Е.А.
Тверской государственный университет

В работе рассматривается экономическая модель об использовании и сохранении возобновляемых природных ресурсов с учетом обмена между отдельными запасами. Необходимые условия оптимальности управления получены с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина.

In the article the economical model of utilizing of natural resources is considered. Necessary conditions of optimal control is obtained with the help of the maximum principle.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Л.С. Понтрягина, моделирование, экономические модели об использовании ресурсов.
Keywords: optimal control, maximum principle, modelling, economical model, natural resources.

Важным направлением научных исследований является моделирование и оптимальное управление процессами в экономике, медицине, экологии, биологии и др. В предлагаемой статье на примере задачи об использовании и сохранении ресурсов рассматривается общий подход к исследованию детерминированных управляемых динамических систем и построению оптимального управления.

На первом этапе динамическая система исследуется с точки зрения особенностей поведения её траекторий, устойчивости, наличия положений равновесия в зависимости от параметров динамической системы.

Следующий этап состоит в анализе необходимых условий оптимальности, применении принципа максимума Л.С.Понтрягина. Наиболее часто динамика модели описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальными уравнениями с запаздыванием, с разрывной правой частью и др. Использование принципа максимума позволяет построить краевую задачу принципа максимума, понять структуру оптимального управления, исследовать возможность существования особого оптимального управления, скользящих режимов, минимизирующих последовательностей. В ряде случаев удается, используя достаточные условия оптимальности, двойственный метод или принцип оптимальности, построить синтез оптимального управления.

Третий этап заключается в выборе аппроксимации непрерывной задачи оптимального управления дискретной задачей управления. Этот переход связан с необходимостью построения приближенного оптимального решения с использованием численных методов оптимизации. Здесь важной задачей является выбор точности аппроксимации (а соответственно и схемы) и оценка скорости сходимости метода.

Записываются необходимые условия оптимальности в дискретной задаче оптимального управлении, которая может рассматриваться как частный случай задачи нелинейного программирования большой размерности. При этом для её решения можно использовать численные методы нелинейного программирования. Необходимо исследовать, как зависит решение дискретной задачи оптимального управления от точности аппроксимации. Требуется показать, что решение дискретной задачи сходится к решению непрерывной задачи с заданной точностью, используя свойства функции Понтрягина, функции переключения, функцию Беллмана.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о сохранении и использовании природных ресурсов. Предполагается существование N возобновляемых ресурсов, со слабой миграцией, скорость которой между любой парой бассейнов пропорциональна плотности их запаса:

$$\frac{dx_n}{dt} = F(x_n) - q_n + \sum_{m \neq n} \sigma_{nm}(x_m - x_n), \quad m, n = \overline{1, N},\ \sigma_{nm} = \sigma_{mn}$$

Здесь $x_n(t)$ – остаточный запас ресурса в момент времени t, $q_n(t)$ – скорость добычи n-го ресурса, $F(x_n)$ – функция роста ресурса, имеющая вид:

$$F(x_n) = r_n x_n (1 - k_n x_n),$$

r_n – коэффициент возобновляемости n-го ресурса, k_n – соревновательный фактор. В бассейнах осуществляется независимая добыча отдельными предпринимателями. Задача для каждого предпринимателя заключается в выборе скорости добычи $q_n(t)$ максимизирующей прибыль:

$$V(q) = \sum_{n=1}^{N} \int_0^T e^{-\delta \cdot t} \left[P_n - c(x_n)\right] \cdot q_n dt$$

при динамических ограничениях:

$$\frac{dx_n}{dt} = F(x_n) - q_n + \sum_{m \neq n} \sigma_{nm}(x_m - x_n), \quad m, n = \overline{1, N}, \quad \sigma_{nm} = \sigma_{mn},$$

начальных и терминальных условиях:

$$x_n(0) = a_n, \quad x_n(T) \geq A_n,$$

ограничениях на управление:

$$0 \leq q_n \leq q, \quad n = \overline{1, N}.$$

Здесь $c(x_n)$ – функция затрат n – го предпринимателя на добычу единицы ресурса, имеющая вид:

$$c_n(x_n) = \frac{1 + b_n x_n}{x_n},$$

где b_n – наименьшие затраты на добычу единицы ресурса, P_n – стоимость ресурса.

2. Принцип максимума Понтрягина. Учитывая терминальное ограничение с помощью штрафных функций, перейдем к новому функционалу, включающему в себя как максимизацию прибыли, так и сохранение ресурса на уровне не ниже A_n.

Требуется найти минимум функционала:

$$V(q) = -\sum_{n=1}^{N}\int_0^T e^{-\delta\cdot t}\cdot\left[P_n - \frac{1+b_n x_n}{x_n}\right]\cdot q_n\cdot dt + \\ + D_k\sum_{n=1}^{N}\left(\max\left\{A_n - x_n\left(T\right),0\right\}\right)^2,$$

где D_n положительные штрафные коэффициенты при ограничениях:

$$\frac{dx_n}{dt} = r_n x_n(1-k_n x_n) - q_n + \sum_{m\neq n}\sigma_{nm}(x_m - x_n),\quad m,n=\overline{1,N},\quad \sigma_{nm}=\sigma_{mn},$$

$$0\le q_n\le q,\quad n=\overline{1,N}.$$

Составим функцию Понтрягина для данной задачи:

$$H(\lambda_0,x,(t),q,t) = \lambda_0\cdot\sum_{n=1}^{N}e^{-\delta\cdot t}[P_n - \frac{1+b_n x_n}{x_n}]\cdot q_n + \\ + \sum_{n=1}^{N}p_n[r_n x_n(1-k_n x_n) - q_n + \sum_{m\neq n}\sigma_{n\,m}(x_m - x_n)],$$

Оптимальный процесс $(\overline{x_n}(\cdot),\overline{q_n}(\cdot))$ удовлетворяет следующим условиям:

$$H(t,\bar{x}(t),\bar{q}(t),p(t),\lambda_0) = \max_{q\in U}H(t,\bar{x}(t),q,p(t),\lambda_0),\quad \text{п.в.}\quad t\in[0,T];$$

или

$$\lambda_0\cdot\sum_{n=1}^{N}e^{-\delta\cdot t}\left[P_n - \frac{1+b_n\overline{x_n}}{\overline{x_n}}\right]\cdot\overline{q_n} + \\ + \sum_{n=1}^{N}p_n\left(r_n\overline{x_n}\left(1-k_n\overline{x_n}\right) - \overline{q_n} + \sum_{m\neq n}\sigma_{n\,m}\left(\overline{x_m}-\overline{x_n}\right)\right) = \\ = \max_{0\le q_n\le q}[\lambda_0\cdot\sum_{n=1}^{N}e^{-\delta\cdot t}[P_n - \frac{1+b_n\overline{x_n}}{\overline{x_n}}]\cdot q_n + \\ + \sum_{n=1}^{N}p_n(r_n\overline{x_n}(1-k_n\overline{x_n}) - q_n + \sum_{m\neq n}\sigma_{n\,m}(\overline{x_m}-\overline{x_n}))]$$

Функция Понтрягина линейна по q, поэтому для каждого управления q_n можно построить функцию переключения:

$$\phi_n(t) = \lambda_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \left[P_n - \frac{1 + b_n \overline{x_n}}{\overline{x_n}} \right] - p_n.$$

Оптимальное управление находится из условия:

$$\overline{q_n} = \begin{cases} 0, & \text{при } \phi_n(t) < 0, \\ q, & \text{при } \phi_n(t) > 0, \\ [0, q], & \text{при } \phi_n(t) = 0. \end{cases}$$

Сопряженные функции $p_n(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$p_n(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_n}(t, \bar{x}(t), \bar{q}(t), p(t), \lambda_0);$$

или

$$\dot{p_l}(t) = -\lambda_0 \cdot \overline{q_l} \cdot e^{-\delta \cdot t} \frac{1}{\overline{x_l^2}} - p_l(r_l - 2r_l k_l \overline{x_l}) + p_l \sum_{m \neq l} \sigma_{ml} - \sum_{n \neq l} \sigma_{\ln} p_n, \quad l, m, n = \overline{1, N}.$$

На правом конце выполнены условия трансверсальности:

$$p_n(T) = \begin{cases} 2\lambda_0 D_k \left(A_n - \overline{x_n}(T) \right), & A_n - \overline{x_n}(T) > 0 \\ 0, \quad A_n - \overline{x_n}(T) \leq 0, \end{cases} ; \; n = \overline{1, N}.$$

3. Дискретная аппроксимация. Разобьем отрезок $[0, T]$ точками $t_i = t_0 + i\Delta t, \quad i = \overline{0, q}$ на q частей. Введём обозначения

$$x(t_i) = x^i, \quad q(t_i) = q^i, \quad f(t_i, x(t_i), q(t_i)) = f^i(x^i, q^i).$$

Для вычисления интеграла можно воспользоваться формулой левых прямоугольников или формулой трапеции и для вычисления производной формулой Эйлера или формулой Рунге–Кутта. В зависимости от точности аппроксимации имеем две дискретные задачи оптимального управления:

$$V(q) = -\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{q-1} e^{-\delta \cdot \Delta t \cdot i} \cdot \left[P_n - \frac{1 + b_n x_n^i}{x_n^i} \right] \cdot q_n^i \cdot \Delta t + D_k \sum_{n=1}^{N} \left(\max\left\{ A_n - x_n^q, 0 \right\} \right)^2$$

$$x_n^{i+1} = x_n^i + \Delta t \left(r_n x_n^i - r_n k_n \left(x_n^i \right)^2 - q_n^i + \sum_{m \neq n} \sigma_{nm} \left(x_m^i - x_n^i \right) \right),$$

$$i = \overline{0, q-1}, \; n = \overline{1, N},$$

$$x_n^0 = a_n, \quad n = \overline{1, N+1},$$

$$0 \leq q_n^i \leq q, \quad n = \overline{1, N}, \quad i = \overline{0, q-1}.$$

Используя метод Рунге – Кутта второго порядка получим следующие дискретные соотношения для аппроксимации динамической системы:

$$\frac{x_n^{i+1}-x_n^i}{\Delta t}=k_{2,n}=r_n^i\left(x_n^i+\frac{\Delta t}{2}k_{1,n}\right)\left(1-k_{1,n}\left(x_n^i+\frac{\Delta t}{2}k_{1,n}\right)\right)-q_n^i+$$

$$+\sum_{m\neq n}\sigma_{mn}\left(\left(x_m^i+\frac{\Delta t}{2}k_{1,m}\right)-\left(x_n^i+\frac{\Delta t}{2}k_{1,n}\right)\right),\quad m,n=\overline{1,N}.$$

$$k_{1,n}=r_nx_n^i-r_n{k_n}_n^i-q_n^i+\sum_{m\neq n}\sigma_{nm}\left(x_m^i-x_n^i\right),\quad i=\overline{0,q-1},\ n=\overline{1,N}.$$

Для аппроксимации интеграла используем формулу трапеций:

$$V(q)=-\Delta t\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\left[P_n-\frac{1+b_nx_n^0}{x_n^0}\right]\cdot q_n^0-e^{-\delta\cdot T}\left[P_n-\frac{1+b_nx_n^q}{x_n^q}\right]\cdot q_n^q\right)-$$

$$-\Delta t\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=0}^{q-1}e^{-\delta\cdot\Delta t\cdot i}\cdot\left[P_n-\frac{1+b_nx_n^i}{x_n^i}\right]\cdot q_n^i+D_k\sum_{n=1}^{N}\left(\max\left\{A_n-x_n^q,0\right\}\right)^2.$$

В этом случае дискретная задача оптимального управления примет вид:

$$V(q)=-\Delta t\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\left[P_n-\frac{1+b_nx_n^0}{x_n^0}\right]\cdot q_n^0-e^{-\delta\cdot T}\left[P_n-\frac{1+b_nx_n^q}{x_n^q}\right]\cdot q_n^q\right)-$$

$$-\Delta t\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=0}^{q-1}e^{-\delta\cdot\Delta t\cdot i}\cdot\left[P_n-\frac{1+b_nx_n^i}{x_n^i}\right]\cdot q_n^i+D_k\sum_{n=1}^{N}\left(\max\left\{A_n-x_n^q,0\right\}\right)^2.$$

$$x_n^{i+1}=x_n^i+\Delta t\left[r_n\left(x_n^i+\frac{\Delta t}{2}k_{1,n}\right)\left(1-k_n\left(x_n^i+\frac{\Delta t}{2}k_{1,n}\right)\right)-q_n^i+\right.$$

$$\left.+\sum_{m\neq n}\sigma_{mn}\left(\left(x_m^i+\frac{\Delta t}{2}k_{1,m}\right)-\left(x_n^i+\frac{\Delta t}{2}k_{1,n}\right)\right)\right.,\quad m,n=\overline{1,N}.$$

$$k_1^i=r_nx_n^i(1-x_n^i)-q_n^i+\sum_{m\neq n}\sigma_{nm}\left(x_m-x_n^i\right),\quad m,n=\overline{1,N},\quad i=\overline{0,q-1},$$

$$x_n^0=a_n,\quad n=\overline{1,N}\quad ,$$

$$0\leq q_n^i\leq q,\quad n=\overline{1,N},\quad i=\overline{0,q}.$$

$$A^i = \begin{pmatrix} 1+\Delta t\left(r_1 - 2r_1k_1x_1^i - \sigma_{12}\right) & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & 1+\Delta t\left(r_2 - 2r_2k_2x_2^i - \sigma_{21}\right) \end{pmatrix}, \quad i=\overline{0,q-1}$$

Будем рассматривать эту задачу как задачу оптимального управления с нефиксированным временем. Для численного ее решения введем переменную x_{N+1}, такую что $\frac{dx_{N+1}}{dt}=1$. Тогда исходная задача преобразуется в задачу с фиксированным временем вида:

$$V[q] = \sum_{n=1}^{N}\int_0^T e^{-\delta\cdot x_{N+1}}\cdot[P_n - \frac{1+b_nx_n}{x_n}]\cdot q_n\cdot dt,$$

$$\frac{dx_n}{dt} = r_nx_n(1-k_nx_n) - q_n + \sum_{m\neq n}\sigma_{nm}(x_m - x_n), \quad m,n=\overline{1,N}, \quad \sigma_{nm}=\sigma_{mn},$$

$$\frac{dx_{N+1}}{dt} = l,$$

$$x_n(0) = a_n,$$

$$x_n(T) \geq A_n,$$

$$q_n \in [0,q] = U, \quad n=\overline{1,N}.$$

Функции, входящие в постановку задачи являются измеримыми по t, непрерывно дифференцируемыми по x и непрерывными по u. Будем решать эту задачу методом штрафных функций. Включим фазовые ограничения в функционал с помощью штрафного слагаемого и перейдем к следующей последовательности задач:

$$V(q) = -\sum_{n=1}^{N}\int_0^T e^{-\delta\cdot x_{N+1}(t)}\cdot\left[P_n - \frac{1+b_nx_n(t)}{x_n(t)}\right]\cdot q_n(t)\cdot dt + \\ + D_k\sum_{n=1}^{N}\left(\max\left\{A_n - x_n(T), 0\right\}\right)^2,$$

$$\frac{dx_n}{dt} = r_nx_n(1-k_nx_n) - q_n + \sum_{m\neq n}\sigma_{nm}(x_m - x_n), \quad m,n=\overline{1,N}, \quad \sigma_{nm}=\sigma_{mn},$$

$$\frac{dx_{N+1}}{dt} = l,$$

$$x_n(0) = a_n,$$

$$0 \leq q_n \leq q, \quad n=\overline{1,N}.$$

где $k=1,2,3\ldots, D_K>0, \quad \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} D_k = \infty.$

Дискретная задача оптимального управления, аппроксимирующая непрерывную задачу, имеет вид

$$V(q) = -\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=0}^{q-1} e^{-\delta\cdot x^i_{N+1}}\cdot\left[P_n - \frac{1+b_n x^i_n}{x^i_n}\right]\cdot q^i_n\cdot\Delta t + D_k\sum_{n=1}^{N}\left(\max\left\{A_n - x^q_n, 0\right\}\right)^2,$$

$$x^{i+1}_n = x^i_n + \Delta t\left(r_n x^i_n - r_n k_n\left(x^i_n\right)^2 - q^i_n + \sum_{m\neq n}\sigma_{nm}\left(x^i_m - x^i_n\right)\right),\quad i=\overline{0,q-1},$$

$$n=\overline{1,N}$$

$$x^{i+1}_{N+1} = x^i_{N+1} + \Delta t,\quad \Delta t = l(t_{i+1}-t_i),$$

$$x^0_n = a_n,\quad n=\overline{1,N+1},$$

$$0\le q^i_n\le q,\quad n=\overline{1,N},\quad i=\overline{0,q-1}.$$

Функция Лагранжа задачи запишется в виде

$$L(x,q,p,\lambda_0) = -\lambda_0\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=0}^{q-1} e^{-\delta\cdot x^i_{N+1}}\cdot\left[P_n - \frac{1+b_n x^i_n}{x^i_n}\right]\cdot q^i_n\cdot\Delta t +$$

$$+\lambda_0 D_k\sum_{n=1}^{N}\left(\max\left\{A_n - x^q_n, 0\right\}\right)^2 +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=0}^{q-1} p^{i+1}_n\cdot\left[x^{i+1}_n - x^i_n - \Delta t\cdot\left(r_n x^i_n(1-k_n x^i_n) - q^i_n + \sum_{m\neq n}^{\sigma_{mn}(x^i_m - x^i_n)}\right)\right] +$$

$$+\sum_{i=0}^{q-1} p^{i+1}_{N+1}\left(x^{i+1}_{N+1} - x^i_{N+1} - \Delta t\right).$$

Получим рекуррентные формулы для вычисления сопряженных переменных и градиента минимизируемой функции:

$$p^i_l = \lambda_0 e^{-\delta\cdot x^i_{N+1}}\cdot q^i_l\cdot\Delta t\frac{1}{\left(x^i_l\right)^2} + p^{i+1}_l + \Delta t\cdot p^{i+1}_l\cdot\left(r_l - 2k_l r_l x^i_l - \sum_{m\neq l}^{\sigma_{ml}}\right) +$$

$$+\Delta t\sum_{n\neq l}\sigma_{\ln}p_n,\quad l=\overline{1,n}$$

$$p^{i+1}_{N+1} = p^i_{N+1} - \lambda_0\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\left[P_n - \frac{1+b_n x^i_n}{x^i_n}\right]\cdot q^i_n\right)\cdot\delta\cdot\Delta t\cdot e^{-\delta\cdot x^i_{N+1}},\quad i=\overline{0,q-1},$$

$$p_{N+1}^q = 0,$$

$$p_n^q = \begin{cases} 2\lambda_0 D_k \left(A_n - x_n^q\right), & A_n - x_n^q > 0 \\ 0, \quad A_n - x_n^q \leq 0, \end{cases} ; \; n = \overline{1, N}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_n^i} = -\lambda_0 e^{-\delta \cdot x_{N+1}^i} \cdot \Delta t \left[P_n - \frac{1 + b_n x_n^i}{x_n^i} \right] + p_n^{i+1} \Delta t, \quad i = \overline{0, q-1}, \; n = \overline{1, N}$$

Четвертый этап состоит в выборе метода оптимизации и исследовании влияния параметров метода на оптимальное решение, возможности существования локальных решений, поиске глобального оптимального решения. Заметим, что при выборе метода оптимизации необходимо исследовать влияние параметров метода (таких, как выбор начального приближения, шага градиентного спуска, штрафных коэффициентов, точности) на вычисление оптимального управления.

Задача решается методом функций штрафа, исследуется влияние параметров задачи на оптимальное управление.

Полученные численные решения оптимального управления согласуются с теоретическими результатами, основанными на использовании принципа максимума Л.С.Понтрягина.

Пятый этап заключается в анализе полученного оптимального решения в зависимости от начальных данных, параметров задачи оптимального управления и целевого функционала. Этот этап может приводить к коррекции исходной динамической системы, учету дополнительных факторов, влияющих на решение задачи, необходимости учета случайных возмущений и способов управления. Во многих задачах об использовании и сохранении ресурсов минимизируемый (максимизируемый) функционал является по существу свёрткой двух или более функционалов, например, в задаче требуется максимизировать прибыль и сохранить используемый ресурс на заданном уровне. В этом случае необходимо построить и исследовать множество Парето. Полученные результаты необходимо описать не только на «формальном» математическом языке, но и придать им «физический» реальный смысл.

Список литературы

[1] Андреева Е.А. Оптимальное управление динамическими системами. — Тверь: ТвГУ, 1999.

[2] Андреева Е.А., Цирулёва В.М. Математическое моделирование. — Тверь: ТвГУ, 2004

[3] Андреева Е.А., Семыкина Н.А. Оптимальное управление. — Тверь: Изд. ТФ МЭСИ, 2006.

[4] Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации. — Москва, Высшая школа, 2006.