УДК 519.2

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА СДВИГА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА С МАЛЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ[1]

Бенинг В.Е.
кафедра математической статистики,
факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, Москва

Поступила в редакцию 21.06.2007, после переработки 14.10.2007.

В работе приводится математическое обоснование возможности использования распределения Стьюдента в задачах описательной статистики. Приведены типичные схемы, в которых возникает распределение Стьюдента. При этом отдельно выделен случай, когда параметр распределения Стьюдента («число степеней свободы») мал, и значит, рассматривается семейство распределений с тяжелыми хвостами, включающее, например, распределение Коши, и удобное при математическом описании многих физических явлений, поскольку для него многие формулы, в частности, функция правдоподобия, приобретают явный вид.

In this paper we discuss a possible explanation of the emergence of heavy-tailed distributions observed in practice instead of the expected normal laws. Limit theorems for statistics constructed from samples with random sizes are the base for this explanation. As examples of the application of general theorems, conditions are presented for the convergence of the distributions of asymptotically normal statistics to Student distributions. New statistical estimations of the location parameter of this distribution are presented.

Ключевые слова: распределение Стьюдента, асимптотическая нормальность, оценки параметра сдвига.
Keywords: Student distribution, asymptotic normality, estimators of location parameter.

> There are more things in heaven and earth,
> Than are dreamt of in your philosophy.
>
> *W. Shakespeare. «Hamlet»*

1. Введение

Хорошо известно, что распределением Стьюдента называется абсолютно непрерывное распределение вероятностей, задаваемое плотностью

$$p_\gamma(x) \;=\; \frac{\Gamma\big((\gamma+1)/2\big)}{\sqrt{\pi\gamma}\,\Gamma(\gamma/2)}\Big(1+\frac{x^2}{\gamma}\Big)^{-\frac{\gamma+1}{2}}, \qquad -\infty<x<\infty. \tag{1.1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00949, 02-01-01080, 03-01-00428 и INTAS, проект 03-51-5018.

Здесь $\gamma > 0$ – параметр, $\Gamma(\,\cdot\,)$ – эйлерова гамма-функция,

$$\Gamma(z) \;=\; \int_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy, \qquad z > 0.$$

В частности, при $\gamma = 1$ плотность (1.1) имеет вид

$$p_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

что соответствует распределению Коши. Несложно видеть, что у распределения Стьюдента с параметром γ отсутствуют моменты порядка $\delta \geq \gamma$.

Если $\gamma = n$ – натуральное число, $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие одно и то же стандартное нормальное распределение, то, как известно, случайная величина

$$Y \;=\; \frac{\sqrt{n}\cdot X}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} \tag{1.2}$$

имеет распределение Стьюдента с параметром n, который в таком случае называется *числом степеней свободы*. На представлении (1.2) основан критерий проверки гипотез о среднем значении нормальных выборок, предложенный в 1908 г. У. С. Госсеттом (W. S. Gossett), который подписал свою статью «*On the probable error of the mean*» псевдонимом «Student» (Student, 1908).

Как известно, случайная величина $X_1^2 + \cdots + X_n^2$, фигурирующая в (1.2), имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы, задаваемое плотностью

$$h_n(x) \;=\; \frac{x^{n/2} e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, \qquad x > 0.$$

Пусть $G_{\alpha,\lambda}(x)$ – функция гамма-распределения с параметром формы α и параметром масштаба λ,

$$G_{\alpha,\lambda}(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x e^{-\lambda y} y^{\alpha-1} dy & \text{при x>0.} \end{cases}$$

Несложно видеть, что распределение хи-квадрат с n степенями свободы является гамма-распределением с параметром формы $\alpha = \frac{n}{2}$ и параметром масштаба $\lambda = \frac{1}{2}$. Следовательно, в представлении (1.2) случайная величина $\frac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$ имеет гамма-распределением с параметром формы $\alpha = \frac{n}{2}$ и параметром масштаба $\lambda = \frac{n}{2}$. При этом по теореме Фубини из представления (1.2) вытекает возможность записать функцию распределения Стьюдента $P_n(x)$ с n степенями свободы, $P_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_n(y) dy$, в виде

$$P_n(x) \;=\; \mathsf{P}(Y < x) \;=\; \mathsf{P}\Big(\, X < x\sqrt{n^{-1}(X_1^2 + \ldots + X_n^2)}\,\Big) \;=$$

$$= \int_0^\infty \Phi(x\sqrt{y}) dG_{n/2,n/2}(u) \;=\; \mathsf{E}\Phi\Big(\, x\sqrt{U_{n/2}}\,\Big), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.3}$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, а случайная величина $U_{n/2}$ имеет гамма-распределением с параметром формы $\alpha = \frac{n}{2}$ и параметром масштаба $\lambda = \frac{n}{2}$. Таким образом, распределение Стьюдента с целочиленным параметром $\gamma = n$ принадлежит к семейству масштабных смесей нормальных законов.

Общеизвестна важная роль, которую распределение Стьюдента играет в математической статистике при анализе нормальных выборок. Здесь параметр γ тесно связан с объемом выборки и принимает натуральные значения. Однако можно сказать, что в таких задачах роль распределения Стьюдента в значительной мере вспомогательна, оно является в определенном смысле абстрактной, идеальной теоретической моделью.

Вместе с тем, в описательной статистике распределение Стьюдента практически не используется в качестве аналитической модели, «подгоняемой» к экспериментальным данным[2]. Лишним подтверждением этого служит то обстоятельство, что ни в одном руководстве по теории (или практике) статистического оценивания не рассматривается задача оценивания параметра распределения Стьюдента.

По-видимому, недостаточное доверие прикладных статистиков к распределению Стьюдента как к модели, описывающей статистическое поведение реальных данных, связано с тем, что, в отличие от, скажем, нормального или пуассоновского распределений, фигурирующих в качестве предельных соответственно в центральной предельной теореме и теореме Пуассона о редких событиях, распределение Стьюдента не считается асимптотической аппроксимацией. В прикладной математике вообще и в статистике в частности, принято считать, что адекватной может быть лишь та аналитическая модель, в основе которой лежит какая-либо предельная теорема с довольно простыми и общими условиями, в то время как та асимптотическая схема, которая используется для обоснования возможности применения распределения Стьюдента в качестве предельной аппроксимации (в тех редких случаях, когда распределение Стьюдента используется в таком качестве) и связана с его безграничной делимостью (кстати, установленной сравнительно недавно), довольно сложна. А именно, известно, что любое безгранично делимое распределение может быть слабым пределом для распределений сумм независимых равномерно предельно малых случайных величин. Поэтому в принципе, если при статистическом анализе реальных данных можно предположить, что каждое наблюдение является результатом суммарного воздействия большого числа случайных факторов, которые вносят примерно одинаковый (в определенном смысле) вклад в наблюдаемое значение, то при выполнении условий, гарантирующих сходимость распределений сумм независимых равномерно предельно малых случайных величин к распределению Стьюдента, последнее вполне может быть использовано в качестве модели, описывающей статистическое поведение экспериментальных данных. Однако упомянутые условия формулируются в терминах элементов так называемого канонического представления безгранично делимой характеристической функции и имеют сложный вид, что серьезно затрудняет их практическую проверку. В результате в рамках такого подхода до сих пор не удалось найти достаточного обоснования возможности более или менее широкого приме-

[2]Лишь относительно недавно появились работы, в которых распределение Стьюдента применяется (впрочем, без надлежащего теоретического обоснования) для описания динамики некоторых финансовых индексов, в частности, приращений логарифмов биржевых цен. В первую очередь здесь следует упомянуть работы П. Прэтца [2] и Р. Блаттберга и Н. Гоундса [3].

нения распределения Стьюдента в задачах описательной статистики.

Следует особо подчеркнуть, что распределение Стьюдента в силу относительной простоты представления (1.1) могло бы быть удобной аналитической моделью, описывающей вероятностно-статистические свойства больших рисков, так как оно имеет более тяжелые хвосты, нежели нормальный закон. Например, оно могло бы стать удобной альтернативой устойчивым законам, часто применяемым в таком качестве (см., например, [7], [8]). Преимущество распределения Стьюдента перед устойчивыми моделями заключается, например, в том, что статистический анализ стьюдентовских моделей намного проще, так как для них функция правдоподобия выписывается в явном виде в терминах элементарных функций, в то время как для устойчивых законов это невозможно (за четырьмя исключениями). Вместе с тем, для $0 < \gamma \leq 2$ асимптотическое поведение хвостов распределения Стьюдента (при $|x| \to \infty$) совпадает с аналогичным поведением хвостов устойчивых законов.

Цель данной заметки – указать довольно простую асимптотическую схему, непосредственно приводящую к распределению Стьюдента как к предельному, и, как следствие, дать обоснование возможности более широкого использования распределения Стьюдента в задачах описательной статистики. В качестве примера рассмотрена задача оценивания центра распределения Стьюдента в случае, когда число степеней свободы мало.

В разделе 2 приводятся вспомогательные результаты, в разделах 3 и 4 обосновывается возникновение распределения Стьюдента как предельной аппроксимации, в разделе 5 приводятся основные результаты, касающиеся асимптотической эффективности эквивариантных оценок центра распределения, в разделах 6 и 7 рассмотрены линейные комбинации порядковых статистик, М - оценки, оценки Ходжеса - Лемана и оценки максимального правдоподобия как оценки центра распределения Стьюдента с малым числом степеней свободы.

Помимо введённых ранее, используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – действительная прямая, символ $\Longrightarrow$ будет обозначать слабую сходимость, $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – функция распределения и плотность стандартного нормального закона, $No.(\mu, \sigma^2)$ – нормальное распределение в $\mathbb{R}$ с указанными параметрами. Символ $\square$ означает конец доказательства.

2. Вспомогательные результаты

Наши дальнейшие рассуждения будут основаны на следующих рассуждениях.

Рассмотрим случайные величины $N_1, N_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$, определенные на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Пусть на $\mathcal{A}$ задано семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Предположим, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n принимает только натуральные значения и независима от последовательности $X_1, X_2, \ldots$ относительно каждой из семейства мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Пусть $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ – некоторая статистика, то есть измеримая функция от случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Для каждого $n \geq 1$ определим случайную величину T_{N_n}, положив $T_{N_n(\omega)} = T_{N_n(\omega)}\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N_n(\omega)}(\omega)\big)$ для каждого элементарного исхода $\omega \in \Omega$. Будем говорить, что статистика T_n асимптотически нормальна, если существуют функции $\delta(\theta)$ и $t(\theta)$ такие, что при каждом $\theta \in \Theta$

$$\mathsf{P}_\theta\left(\delta(\theta)\sqrt{n}\big(T_n - t(\theta)\big) < x\right) \Longrightarrow \Phi(x) \quad (n \to \infty). \tag{2.1}$$

Примеры асимптотически нормальных статистик хорошо известны. Свойством асимптотической нормальности обладают, например, выборочное среднее (при условии существования дисперсий), центральные порядковые статистики или оценки максимального правдоподобия (при достаточно общих соответствующих условиях регулярности) и многие другие статистики.

Лемма 2.1. *Пусть $\{d_n\}_{n\geq 1}$ – некоторая неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что $N_n \to \infty$ по вероятности при $n \to \infty$ относительно каждой вероятности из семейства $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Пусть статистика T_n асимптотически нормальна в смысле (2.1). Для того чтобы при каждом $\theta \in \Theta$ существовала такая функция распределения $F(x,\theta)$, что*

$$\mathsf{P}_\theta\Big(\delta(\theta)\sqrt{d_n}\big(T_{N_n} - t(\theta)\big) < x\Big) \Longrightarrow F(x,\theta) \quad (n \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство функций распределения $\mathcal{H} = \{H(x,\theta):\ \theta \in \Theta\}$, удовлетворяющее условиям

$$H(x,\theta) = 0, \quad x < 0, \quad \theta \in \Theta;$$

$$F(x,\theta) = \int\limits_0^\infty \Phi\Big(\,x\sqrt{y}\,\Big)d_yH(y,\theta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta;$$

$$\mathsf{P}_\theta(N_n < d_n x) \Longrightarrow H(x,\theta), \quad n \to \infty, \quad \theta \in \Theta.$$

При этом, если функции распределения случайных величин N_n не зависят от θ, то не зависят от θ и функции распределения $H(x,\theta)$, то есть семейство $\mathcal{H}$ состоит из единственного элемента.

Доказательство. Данная лемма по сути лишь переобозначениями отличается от Теоремы 3 из работы [5], доказательство которой, в свою очередь, основано на общих теоремах о сходимости суперпозиций независимых случайных последовательностей [4], [6]. □

Пусть $N_{p,r}$ – случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение,

$$\mathsf{P}(N_{p,r} = k) \;=\; C^{k-1}_{r+k-2}p^r(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Здесь $r > 0$ и $p \in (0,1)$ – параметры, и для нецелых r величина C^{k-1}_{r+k-2} определяется как

$$C^{k-1}_{r+k-2} \;=\; \frac{\Gamma(r+k-1)}{(k-1)!\cdot\Gamma(r)}.$$

В частности, при $r = 1$ соотношение (2.2) задает геометрическое распределение. Известно, что

$$\mathsf{E}N_{p,r} \;=\; \frac{r(1-p)+p}{p},$$

так что $\mathsf{E}N_{p,r} \to \infty$ при $p \to 0$.

Отрицательное биномиальное распределение с натуральным r допускает наглядную интерпретацию в терминах испытаний Бернулли. А именно, случайная величина с распределением (2.2) – это число испытаний Бернулли, проведенных до осуществления r-й по счету неудачи, если вероятность успеха в одном испытании равна $1-p$.

Лемма 2.2. *Для любого фиксированного* $r > 0$

$$\lim_{p\to 0} \mathsf{P}\left(\frac{N_{p,r}}{\mathsf{E}N_{p,r}} < x\right) \;=\; G_{r,r}(x)$$

при каждом $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Характеристическая функция случайной величины $N_{p,r}$ равна

$$\mathsf{E}\exp\{itN_{p,r}\} \;=\; e^{it}\left[\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right]^r, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, используя представление $e^z = 1 + z + o(|z|)$ $(|z| \to 0)$, при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ мы имеем

$$\mathsf{E}\exp\left\{it\frac{N_{p,r}}{\mathsf{E}N_{p,r}}\right\} \;=\; \mathsf{E}\exp\left\{\frac{itpN_{p,r}}{r(1-p)+p}\right\} \;=$$

$$=\; \exp\left\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\right\}\left[\frac{p}{1-(1-p)\exp\left\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\right\}}\right]^r \;=$$

$$=\; \exp\left\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\right\}\left[\frac{1}{p}\Big(1-\exp\left\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\right\}\Big)+\exp\left\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\right\}\right]^{-r} \;=$$

$$=\; \exp\left\{\frac{itp}{r(1-p)+p}\right\}\left[-\frac{1}{p}\Big(\frac{itp}{r(1-p)+p}+o(p)\Big)+1+o(p)\right]^{-r} \;\longrightarrow\; \left[1-\frac{it}{r}\right]^{-r}$$

при $p \to 0$. Но правая часть этого соотношения в точности совпадает с характеристической функцией гамма-распределения $G_{r,r}(x)$. Ссылка на теорему о непрерывности соответствия между распределениями и соответствующими им характеристическими функциями завершает доказательство. □

3. Распределение Стьюдента как асимптотическая аппроксимация

В подавляющем большинстве ситуаций, связанных с анализом экспериментальных данных, можно признать, что число случайных факторов, влияющих на наблюдаемые величины, само является случайным и изменяется от наблюдения к наблюдению. Поэтому вместо различных версий центральной предельной теоремы, обосновывающих нормальность распределения наблюдаемых случайных величин в классической статистике, в таких ситуациях следует опираться на их аналоги для выборок случайного объема (см. Лемму 2.1).

Теорема 3.1. *Пусть* $\gamma > 0$ *произвольно и* $\{d_n\}_{n\ge 1}$ – *некоторая неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что* $N_n \to \infty$ *по вероятности при* $n \to \infty$ *относительно каждой вероятности из семейства* $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. *Пусть статистика* T_n *асимптотически нормальна в смысле (2.1). Для того чтобы при каждом* $\theta \in \Theta$

$$\mathsf{P}_\theta\left(\delta(\theta)\sqrt{d_n}\big(T_{N_n}-t(\theta)\big) < x\right) \;\Longrightarrow\; P_\gamma(x) \qquad (n \to \infty),$$

где $P_\gamma(x)$ – функция распределения Стьюдента с параметром γ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathsf{P}_\theta(N_n < d_n x) \Longrightarrow G_{\gamma/2,\gamma/2}(x), \quad n \to \infty, \quad \theta \in \Theta.$$

Доказательство. Несложно убедиться в том, что при произвольном $\gamma > 0$ плотность $p_\gamma(x)$ распределения Стьюдента с параметром γ представима в виде

$$p_\gamma(x) \;=\; \mathsf{E}\sqrt{U_{\gamma/2}}\phi\big(x\sqrt{U_{\gamma/2}}\,\big),$$

где $\phi(x)$ – стандартная нормальная плотность, а $U_{\gamma/2}$ – случайная величина с функцией распределения $G_{\gamma/2,\gamma/2}(x)$. Действительно,

$$\mathsf{E}\sqrt{U_{\gamma/2}}\phi\big(x\sqrt{U_{\gamma/2}}\,\big) \;=\; \frac{\gamma^{\gamma/2}}{2^{(\gamma+1)/2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma/2)}\int_0^\infty \exp\Big\{-u\Big(\frac{x^2+\gamma}{2}\Big)\Big\}u^{(\gamma-1)/2}du \;=$$

$$= \frac{\gamma^{\gamma/2}}{2^{(\gamma+1)/2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma/2)}\Big(\frac{x^2+\gamma}{2}\Big)^{-(\gamma+1)/2}\int_0^\infty \exp\{-z\}z^{(\gamma+1)/2-1}dz \;=$$

$$= \frac{\gamma^{\gamma/2}}{2^{(\gamma+1)/2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma/2)}\Big(\frac{x^2+\gamma}{2}\Big)^{-(\gamma+1)/2}\Gamma\Big(\frac{\gamma+1}{2}\Big) \;=$$

$$= \frac{\Gamma\big((\gamma+1)/2\big)}{\sqrt{\pi\gamma}\,\Gamma(\gamma/2)}\Big(1+\frac{x^2}{\gamma}\Big)^{-\frac{\gamma+1}{2}} = p_\gamma(x).$$

Но плотность

$$p_\gamma(x) = \mathsf{E}\sqrt{U_{\gamma/2}}\phi\big(x\sqrt{U_{\gamma/2}}\,\big)$$

соответствует функции распределения $\mathsf{E}\Phi\big(x\sqrt{U_{\gamma/2}}\big)$ (для натуральных γ этот факт был отмечен во введении). Теперь требуемое утверждение вытекает из Леммы 2.1 с учетом идентифицируемости масштабных смесей нормальных законов. □

Следствие 3.1. *Пусть $r > 0$ произвольно. Предположим, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $p = \frac{1}{n}$ и r. Пусть статистика T_n асимптотически нормальна в смысле (2.1). Тогда при каждом $\theta \in \Theta$*

$$\mathsf{P}_\theta\left(\delta(\theta)\sqrt{rn}\big(T_{N_n} - t(\theta)\big) < x\right) \;\Longrightarrow\; P_{2r}(x) \qquad (n \to \infty)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$, где $P_{2r}(x)$ – функция распределения Стьюдента с параметром $\gamma = 2r$.

Доказательство. В силу Леммы 2.2 мы имеем

$$\frac{N_n}{nr} \;=\; \frac{N_n}{\mathsf{E}N_n}\cdot\frac{\mathsf{E}N_n}{nr} \;=\; \frac{N_n}{\mathsf{E}N_n}\cdot\frac{r(n-1)+1}{nr} \;=\; \frac{N_n}{\mathsf{E}N_n}\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \;\Longrightarrow U_r$$

при $n \to \infty$, где U_r – случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром формы, совпадающим с параметром масштаба и равным r. Теперь требуемое утверждение непосредственно вытекает из Теоремы 3.1. □

Замечание 3.1. Распределение Коши ($\gamma = 1$) возникает в ситуации, описанной в Следствии 3.1, когда объем выборки N_n имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $p = \frac{1}{n}$, $r = \frac{1}{2}$ и n велико.

Замечание 3.2. В ситуации, когда объем выборки N_n имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $p = \frac{1}{n}$, $r = 1$ (то есть геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{n}$), то в пределе при $n \to \infty$ мы получаем распределение Стьюдента с параметром $\gamma = 2$, которому соответствует функция распределения

$$P_2(x) \; = \; \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}}\right), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Такое распределение впервые описано как предельное для выборочной медианы, построенной по выборке случайного объема, в которой объем выборки является случайной величиной с геометрическим распределением, по-видимому, в работе [9] (следует отметить, что при этом в упомянутой работе не указано, что функция распределения, стоящая в правой части (3.1), соответствует распределению Стьюдента).

Таким образом, основной вывод из приведенных выше результатов сформулировать можно следующим образом. Если число случайных факторов, определяющих наблюдаемое значение случайной величины, само является случайной величиной, распределение которой может быть приближено гамма-распределением с одинаковыми параметрами (например, является отрицательным биномиальным с вероятностью успеха, близкой к единице, см. Лемму 2.2), то те функции от значений случайных факторов, которые в классической ситуации считаются асимптотически нормальными, в действительности являются асимптотически стьюдентовскими. Следовательно, в силу довольно широкой применимости гамма-моделей с одинаковыми параметрами и отрицательных биномиальных моделей распределение Стьюдента может рассматриваться в задачах прикладной (описательной) статистики как вполне разумная модель.

Необходимо отметить, что в пользу большего внимания прикладных статистиков к распределению Стьюдента также свидетельствует и так называемый энтропийный подход, согласно которому в условиях неопределенности математическую модель стохастической ситуации следует выбирать так, чтобы выбранная модель соответствовала максимально возможной (при некоторых разумных условиях) неопределенности. При этом в качестве меры неопределенности выбирается (дифференциальная) энтропия абсолютно непрерывного вероятностного распределения. Хорошо известно, что при соответствующих ограничениях на носитель и моменты плотности $p(x)$ «наиболее неопределенными» в смысле классической дифференциальной энтропии

$$H[p] \; = \; -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx \tag{3.2}$$

являются равномерное, показательное и нормальное распределения. Вместе с тем, как показано в работе [26], если вместо (3.2) в качестве меры неопределенности рассмотреть обобщенную q-энтропию

$$H_q[p] \; = \; \frac{1}{q-1}\left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} p^q(x) dx\right], \quad q \in \mathbb{R},$$

то для $1 \le q \le 3$ максимум функционала $H_q[p]$ при условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p^q(x)dx = 1$$

доставляет распределение Стьюдента с плотностью

$$p_q(x) = \sqrt{\frac{1-q}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)} \left(1 + (q-1)x^2\right)^{-1/(q-1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Случай малого параметра $\gamma = 2r$

Выше мы уже упоминали, что отрицательное биномиальное распределение (как мы убедились, тесно связанное с распределением Стьюдента Следствием 3.1), при натуральном r может быть интерпретировано в терминах испытаний Бернулли, проведенных до r-й неудачи. В то же время, особенно в задачах, связанных с анализом больших рисков, большой интерес представляет изучение распределения Стьюдента с малым параметром r, то есть с очень тяжелыми хвостами. Более того, можно показать, что при $\gamma = 2r \to 0$ максимум плотности $p_\gamma(x)$ распределения Стьюдента (см. (5.1)) стремится к нулю как $O(\sqrt{\gamma})$. Одновременно хвосты распределения Стьюдента становятся все более и более тяжелыми. Поэтому распределение Стьюдента с малым параметром может рассматриваться как некий аналог равномерного распределения на бесконечном интервале.

Чтобы Следствие 3.1 можно было использовать и в такой ситуации, следует разобраться, что из себя представляет отрицательное биномиальное распределение, то есть как оно может быть проинтерпретировано, при $0 < r < 1$. Мы приведем два примера такой интерпретации.

Пример 1. Этот пример хорошо знаком. Скажем, в книге [12] он приведен со ссылкой на работу [13]. Рассмотрим случайную величину $M_{p,r}$, имеющую смешанное пуассоновское распределение

$$\mathsf{P}(M_{p,r} = k) \;=\; \mathsf{E}\exp\{-U_{r,p/(1-p)}\}\frac{U^k_{r,p/(1-p)}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $U_{r,p/(1-p)}$ – случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром формы r и параметром масштаба $p/(1-p)$. Легко убедиться, что безусловное распределение случайной величины $M_{p,r}$ имеет вид

$$\mathsf{P}(M_{p,r} = k) \;=\; C^k_{r+k-1}p^r(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

Несложно убедиться, что при этом $M_{p,r} = N_{p,r} - 1$, где, как и ранее, $N_{p,r}$ – случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и p (см. (2.2)).

Таким образом, если сначала реализуется значение u случайной величины $U_{r,p/(1-p)}$ с гамма-распределением $G_{r,p/(1-p)}$, а затем реализуется значение случайной величины $M_{p,r}$, имеющей пуассоновское распределение, параметр которого равен полученному значению u, то, прибавив единицу к итоговой реализации случайной величины $M_{p,r}$, мы получаем реализацию отрицательной биномиальной случайной величины $N_{p,r}$ с параметрами r и p. При этом требуемая асимптотика $p \to 0$ (гарантирующая применимость Следствия 3.1) и $r \to 0$ для $N_{p,r}$ и $P_{2r}(x)$ естественно возникает как аналогичная асимптотика для $U_{r,p/(1-p)}$.

Пример 2. Вновь наряду со случайной величиной $N_{p,r}$, введенной выше, рассмотрим случайную величину $M_{p,r} = N_{p,r} - 1$, имеющую распределение (4.1). Рассмотрим независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины $Z_1, Z_2, \ldots$, каждая из которых имеет производящую функцию

$$p(z) \;=\; \frac{\log[1-(1-p)z]}{\log p}, \qquad |z| \le 1,$$

где $p \in (0,1)$. Эта производящая функция задает так называемое логарифмическое распределение Фишера

$$\mathsf{P}(Z_1 = k) \;=\; \frac{(1-p)^k}{k \log p}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(см. [12]). Пусть N – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\mu > 0$, независимая от случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots$ Положим

$$S \;=\; Z_1 + \ldots + Z_N.$$

Если $N = 0$, то полагаем $S = 0$.

Можно показать (см. [10], [11]), что в таком случае числа q_n в представлении обобщенной пуассоновской производящей функции случайной величины S

$$\mathsf{E}z^S \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \;=\; \exp\big\{\mu\big(p(z) - 1\big)\big\}, \qquad |z| \le 1,$$

равны

$$q_n \;=\; C_{n+r-1}^{n} p^r (1-p)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$r \;=\; -\frac{\mu}{\log p}. \tag{4.2}$$

Другими словами, в рассматриваемом случае распределение пуассоновской случайной суммы S совпадает с распределением (4.1) случайной величины $M_{p,r}$ при r, удовлетворяющем соотношению (4.2).

Таким образом, отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и p можно интерпретировать как сдвинутое на единицу распределение суммы случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин, в которой слагаемые имеют логарифмическое распределение с параметром p, а число слагаемых имеет пуассоновское распределение с параметром $\mu = r \log \frac{1}{p}$. При этом требуемое соотношение $r < 1$ выполняется, если $\mu < \log \frac{1}{p}$, а распределение Стьюдента с $\gamma = 2r \to 0$ может выступать в качестве асимптотической аппроксимации, основанной на Следствии 3.1, если $\mu = \mu(p) = o\big(\log \frac{1}{p}\big)$ при $p \to 0$.

5. Асимптотическая эффективность эквивариантных оценок

В этом разделе мы напоминаем основные сведения из теории эквивариантного оценивания и формулируем необходимые для дальнейшего результаты.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределённые наблюдения, имеющие функцию распределения $F(x-\theta), \theta \in \mathbb{R}$, причём функция распределения $F(x)$ известна, симметрична и обладает положительной плотностью

$$F(x) + F(-x) \;=\; 1, \qquad p(x) = F'(x) \;>\; 0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим задачу оценивания параметра сдвига θ. С этой целью будем рассматривать эквивариантные оценки $\delta_n = \delta_n(X_1, \ldots, X_n)$, то есть такие, что при всех $a \in \mathbb{R}$

$$\delta_n(X_1 + a, \ldots, X_n + a) \;=\; \delta_n(X_1, \ldots, X_n) + a. \tag{5.2}$$

Все традиционно используемые оценки параметра сдвига являются эквивариантными относительно сдвига, например, среднее, выборочная медиана или любое взвешенного среднее порядковых статистик с суммой весов, равной единице. Заметим, что оценка максимального правдоподобия также эквивариантна. Известно, что при квадратичной функции потерь при каждом n наилучшей эквивариантной оценкой является оценка Питмэна (см.[15], Теорема 3.1.5, стр. 148; [16], стр. 33)

$$\delta_n^* \;=\; \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta \prod\limits_{i=1}^{n} p(X_i - \theta)\, d\theta}{\int_{-\infty}^{+\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} p(X_i - \theta)\, d\theta}. \tag{5.3}$$

Однако эти оценки, являющиеся эталоном при сравнении оценок, как правило, являются трудновычислимыми и представляют в основном теоретический интерес.

В дальнейшем мы будем рассматривать асимптотический подход (при $n \to \infty$) и асимптотически нормальные последовательности эквивариантных оценок δ_n:

$$\sqrt{n}\,(\delta_n \;-\; \theta) \;\Longrightarrow\; \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad n \to \infty, \tag{5.4}$$

где $\Longrightarrow$ означает слабую сходимость, а $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ нормальное распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2.

Для сравнения предельного качества таких оценок введём понятие *асимптотической относительной эффективности* (АОЭ) (см. [15], стр. 305-307). Для двух последовательностей асимптотически нормальных эквивариантных оценок $\delta_{n,1} = \delta_{n,1}(X_1, \ldots, X_n)$ и $\delta_{n,2} = \delta_{n,2}(X_1, \ldots, X_n)$

$$\sqrt{n}\,(\delta_{n,i} \;-\; \theta) \;\Longrightarrow\; \mathcal{N}(0, \sigma_i^2), \quad n \to \infty, \qquad i = 1, 2, \tag{5.5}$$

определим АОЭ оценки $\delta_{n,1}$ относительно оценки $\delta_{n,2}$ как

$$e_{12} \;=\; \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}. \tag{5.6}$$

Отметим, что если определить число наблюдений $m = m(n)$ так, чтобы

$$\sqrt{n}\,(\delta_{m,2} \;-\; \theta) \;\Longrightarrow\; \mathcal{N}(0, \sigma_1^2), \quad n \to \infty, \tag{5.7}$$

то (см. [15], Теорема 5.2.1, стр. 306)

$$e_{12} = \lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n}. \tag{5.8}$$

Таким образом, чтобы получить предельное распределение, совпадающее с предельным распределением оценки $\delta_{n,1}$, оценке $\delta_{n,2}$ требуется примерно ne_{12} наблюдений. Итак, если $e_{12} > 1$, то оценка $\delta_{n,2}$ асимптотически «хуже» оценки $\delta_{n,1}$. В случае $e_{12} = 1$ эти оценки асимптотически эквивалентны.

Условие асимптотической нормальности (5.5) можно заменить на более общее условие вида (см. [15], Теорема 5.2.2, стр. 307)

$$n^q\,(\delta_{n,i} - \theta) \Longrightarrow \kappa_i T, \quad n\to\infty, \quad i = 1,2, \quad q > 0, \tag{5.9}$$

где функция распределения случайной величины T непрерывна и строго возрастает. Тогда

$$e_{12} = \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^{1/q}, \tag{5.10}$$

с аналогичной интерпретацией в терминах необходимого числа наблюдений.

Рассмотрим теперь абсолютную АОЭ (ААОЭ), то есть асимптотическую эффективность относительно наилучшей оценки Питмэна δ_n^* (см. (5.3)). В работах [17], [18] показано, что при весьма общих условиях регулярности эти оценки асимптотически нормальны

$$\sqrt{n}\,(\delta_n^* - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,\, I^{-1}), \quad n\to\infty, \tag{5.11}$$

где I – фишеровская информация

$$I = \mathsf{E}\left(\frac{p'(X_1)}{p(X_1)}\right)^2. \tag{5.12}$$

Заметим, что асимптотическая дисперсия I^{-1} оценки Питмэна δ_n^* совпадает с нижней границей дисперсий из неравенства Крамéра–Рао. Обозначим ААОЭ последовательности эквивариантных асимптотически нормальных оценок $\delta_{n,1}$ ($\sqrt{n}\,(\delta_{n,1} - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma_1^2),\ n\to\infty$) относительно оценки Питмэна δ_n^* через

$$e_{1*} = \frac{1}{I\sigma_1^2}\ (\leq 1). \tag{5.13}$$

Рассмотрим теперь задачу оценивания параметра θ по выборке независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1,\dots,X_n$, имеющих функцию распределения $F(x-\theta)$. Если функция распределения $F(x)$ нормальна, то выборочное среднее

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5.14}$$

является несмещённой оценкой параметра θ с *минимальной дисперсией*. Оценка (5.14) обладает тем же свойством для всех распределений, имеющих плотность и нулевое математическое ожидание (см. [15], стр. 99). Однако, если дополнительно предположить, что функция распределения $F(x)$ *симметрична*, то оценка (5.14) уже не будет оптимальной (см. [15], стр. 128, задача 4.4). Это связано с тем, что для симметричных распределений класс несмещённых оценок параметра сдвига значительно шире, чем без предположения симметрии.

Свойства оценки (5.14) существенно зависят от поведения хвостов распределения наблюдений. Например, для распределения Коши (имеющего столь тяжелые хвосты, что не существует математическое ожидание, как известно, при каждом $n \geq 1$ оценка (5.14) имеет такое же распределение, как и отдельное наблюдение. Естественный путь получения более устойчивых оценок (см. [14]) состоит в отбрасывании крайних наблюдений. Особенно нечувствительной к поведению хвостов функции распределения $F(x)$ является выборочная медиана

$$M_n = \begin{cases} X_{(m)}, & n = 2m-1, \\ \frac{1}{2}(X_{(m)} + X_{(m+1)}), & n = 2m, \end{cases} \tag{6}$$

где $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ – вариационный ряд, построенный по выборке $X_1, \ldots, X_n$.

Однако такое радикальное отбрасывание крайних членов выборки не всегда приводит к разумным результатам (см. [14], [15], стр. 317-319). Естественным компромиссом между средним и медианой является отбрасывание, например, $[n\alpha]$ наименьших и $[n\alpha]$ наибольших наблюдений, где $0 \leq \alpha < 1/2$, то есть рассмотрение усечённых средних

$$\bar{L}_n = \frac{X_{([n\alpha]+1)} + \cdots + X_{(n-[n\alpha])}}{n - 2[n\alpha]} \tag{5.17}$$

или усечённых линейных комбинаций порядковых статистик

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{in} X_{(i)}, \tag{5.18}$$

где

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{in} = 1, \quad c_{in} = 0, \quad \text{при} \quad i \leq [n\alpha] \quad \text{и} \quad i > n - [n\alpha],$$

или α-уинзоризованных средних (см. [14])

$$\bar{L}_n^* = \frac{1}{n}\left([n\alpha] X_{([n\alpha])} + \sum_{i=[n\alpha]+1}^{n-[n\alpha]} X_{(i)} + [n\alpha] X_{(n-[n\alpha]+1)} \right).$$

Рассмотрим также оценку Ходжеса–Лемана (см. [20] и [15] стр. 339–341)

$$W_n = \operatorname{med}\left\{ \frac{X_{(i)} + X_{(j)}}{2}, \, 1 \leq i \leq j \leq n \right\}, \tag{5.19}$$

то есть это медиана $n(n+1)/2$ значений $(X_{(i)} + X_{(j)})/2$.

При нахождении АОЭ оценок (5.16) – (5.19) могут быть использованы следующие результаты.

Теорема 5.1 ([15], Теорема 5.3.2, стр. 313). *Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковую функцию распределения $F(x-\theta)$. Предположим, что $F(0) = 1/2$ и функция распределения $F(x)$ имеет плотность $p(x) > 0$. Тогда*

$$\sqrt{n}\,(M_n - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_m^2), \quad n \to \infty,$$

где

$$\sigma_m^2 \;=\; \frac{1}{4p^2(0)}. \tag{5.20}$$

Заметим, что в этой теореме не предполагается *симметричность* функции распределения $F(x)$.

Теорема 5.2 ([14], Теоремы 3.1, 3.2). *Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковую функцию распределения $F(x-\theta)$. Предположим, что $0 < \alpha < 1/2$ и функция распределения $F(x)$ монотонно возрастает и имеет непрерывную симметричную плотность $p(x) = F'(x) > 0$. Тогда:*

1. $\sqrt{n}\,(\bar{L}_n \;-\; \theta) \implies \mathcal{N}(0, \sigma_l^2)$ *при* $n \to \infty$, *где*

$$\sigma_l^2 \;=\; \frac{2}{(1-2\alpha)^2}\left(\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2 p(x)dx + \alpha\xi_{1-\alpha}^2\right) = \frac{4\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x(1\;-\;F(x))\,dx}{(1-2\alpha)^2}, \tag{5.21}$$

$$F(\xi_{1-\alpha}) \;=\; 1-\alpha.$$

2. $\sqrt{n}\,(\bar{L}_n^* \;-\; \theta) \implies \mathcal{N}(0, \sigma_l^{*2})$ *при* $n \to \infty$, *где*

$$\sigma_l^{*2} \;=\; 2\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2 p(x)\,dx \;+\; 2\alpha\Big(\xi_{1-\alpha} \;+\; \frac{\alpha}{p(\xi_{1-\alpha})}\Big)^2.$$

Для оценки L_n (5.18) аналогичный результат может быть получен с использованием Теоремы C ([19], стр. 276) и Леммы 5.3.3 ([22], стр. 103).

Теорема 5.3 ([20], [15], стр. 341). *Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковую функцию распределения $F(x-\theta)$. Предположим, что функция распределения $F(x)$ монотонно возрастает и имеет непрерывную симметричную плотность $p(x) = F'(x) > 0$. Тогда*

$$\sqrt{n}\,(W_n \;-\; \theta) \implies \mathcal{N}(0, \sigma_w^2), \quad n \to \infty,$$

где

$$\sigma_w^2 \;=\; \frac{1}{48\left(\int_0^\infty p^2(x)\,dx\right)^2}. \tag{5.22}$$

6. Оценивание центра распределений Стьюдента с малым числом степеней свободы

Всюду далее будет рассматриваться семейство рапределений Стьюдента с параметром $\gamma > 0$, функциями распределения $F_\gamma(x-\theta)$ и плотностями $p_\gamma(x) = F'_\gamma(x)$, определяемыми соотношением (1.1). Параметр формы («число степеней свободы») $\gamma > 0$ предполагается известным. При $0 < \delta < \gamma$ у этого распределения существует абсолютный момент порядка δ. При $2 < \gamma$ При $2 < \gamma$ у этого распределения существует дисперсия, которая в таком случае равна $\frac{\gamma}{\gamma-2}$. При $0 < \gamma \leq 2$ дисперсии не существует.

Лемма 6.1.

1. Для любого $\gamma > 0$ существует фишеровская информация (см. (5.12))

$$I_\gamma \;=\; \mathsf{E}\left(\frac{p'_\gamma(X_1)}{p_\gamma(X_1)}\right)^2 \;=\; \frac{\gamma\,+\,1}{\gamma\,+\,3}. \tag{6.1}$$

2. Для любого $x > 0$ справедливо соотношение

$$p_\gamma(x) \;\sim\; \frac{\gamma}{2x}, \quad \gamma \,\to\, 0 \tag{6.2}$$

и

$$p_\gamma(0) \;=\; \frac{\sqrt{\gamma}\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)} \;\sim\; \frac{\sqrt{\gamma}}{2}, \quad \gamma \,\to\, 0. \tag{6.3}$$

3. Для любого $x \geq 0$ справедливо равенство

$$F_\gamma(x) = 1 - \frac{x\gamma^{\gamma/2}\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)(\gamma+x^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}}\Big(1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma+2)(\gamma+x^2)} + r_\gamma(x)\Big), \tag{6.4}$$

где остаточный член $r_\gamma(x)$ имеет вид

$$r_\gamma(x) \;=\; \frac{\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+3)(\gamma+x^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}}{x(\gamma+2)} \cdot \int_x^\infty \frac{dt}{(\gamma+t^2)^{\frac{\gamma+5}{2}}}. \tag{6.5}$$

Доказательство. 1. Из формулы (1.1) непосредственно следует, что

$$\frac{p'_\gamma(x)}{p_\gamma(x)} \;=\; -\frac{\gamma\,+\,1}{\gamma} \cdot \frac{x}{1\,+\,x^2/\gamma}, \tag{6.6}$$

поэтому

$$I_\gamma \;=\; \frac{(\gamma+1)^2}{\gamma} \cdot \frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{\Gamma(\gamma/2)\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{y^2\,dy}{(1\,+\,y^2)^{\frac{\gamma+5}{2}}}. \tag{6.7}$$

Далее, учитывая формулу (см. [25], стр. 183)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2t}\,dx}{(1\,+\,x^2)^p} \;=\; \frac{\Gamma(t+1/2)\,\Gamma(p-t-1/2)}{\Gamma(p)}, \qquad t \geq 0, \quad p > 0, \tag{6.8}$$

получим

$$I_\gamma \;=\; \frac{(\gamma+1)^2}{\gamma} \cdot \frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{\Gamma(\gamma/2)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma((\gamma+2)/2)}{\Gamma((\gamma+5)/2)}. \tag{6.9}$$

Теперь из соотношений (см. [25], стр. 180)

$$\Gamma(t+1) \;=\; t\Gamma(t), \quad t > 0, \quad \Gamma(1/2) \;=\; \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) \;=\; \sqrt{\pi}/2, \tag{6.10}$$

$$\Gamma((\gamma+2)/2) \;=\; \frac{\gamma\Gamma(\gamma/2)}{2}, \quad \Gamma((\gamma+5)/2) \;=\; \frac{(\gamma+3)(\gamma+1)\Gamma((\gamma+1)/2)}{4} \tag{6.11}$$

и формулы (6.9) следует доказываемое равенство.

2. Доказательство следует из формул (1.1), (6.11), представления

$$p_\gamma(x) \;=\; \frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\Gamma((\gamma+2)/2)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\gamma^{\frac{\gamma+2}{2}}}{(\gamma+x^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}} \tag{6.12}$$

и непрерывности гамма-функции.
3. При $x > 0$ с учётом формулы (1.1) имеем

$$F_\gamma(x) \;=\; \frac{1}{2} \;+\; \int_0^x p_\gamma(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{\gamma\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)} \int_0^{x/\sqrt{\gamma}} \frac{dy}{(1+y^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}}.$$

Далее, интегрируя по частям для $p > 0$, несложно получить

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^p} \;=\; \frac{1}{2p-1}\left(2p\int \frac{dy}{(1+y^2)^{p+1}} \;-\; \frac{y}{(1+y^2)^p}\right) \;=$$

$$=\; \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4p(p+1)}{2p+1}\int \frac{dy}{(1+y^2)^{p+2}} \;-\; \frac{y}{(1+y^2)^p} \;-\; \frac{2py}{(2p+1)(1+y^2)^{p+1}}\right). \tag{6.13}$$

Поэтому, полагая

$$p \;=\; \frac{\gamma+1}{2},$$

имеем

$$F_\gamma(x) \;=\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)}\left(\frac{(\gamma+1)(\gamma+3)}{\gamma+2}\int_0^{x/\sqrt{\gamma}} \frac{dy}{(1+y^2)^{\frac{\gamma+5}{2}}} \;-\right.$$

$$\left. -\; \frac{x\,\gamma^{\gamma/2}}{(\gamma+x^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}} \;-\; \frac{\gamma(\gamma+1)x\,\gamma^{\gamma/2}}{(\gamma+2)(\gamma+x^2)^{\frac{\gamma+3}{2}}}\right).$$

Теперь доказываемое утверждение следует из определения остаточного члена $r_\gamma(x)$ (6.5) и формул (см. (6.8), (6.11))

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^{\frac{\gamma+5}{2}}} \;=\; \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+4)/2)}{2\Gamma((\gamma+5)/2)} \;=\; \frac{\sqrt{\pi}\,(\gamma+2)\Gamma((\gamma+2)/2)}{(\gamma+3)(\gamma+1)\Gamma((\gamma+1)/2)}. \quad \square$$

Замечание 6.1. Используя формулы (6.39) и (6.40) можно получить более точную аппроксимацию

$$\frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)} \;=\; 1 \;-\; \gamma\,\log 2 \;+\; O(\gamma^2),$$

поэтому

$$p_\gamma(0) \;=\; \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\Big(1 \;-\; \gamma\,\log 2 \;+\; O(\gamma^2)\Big).$$

Теорема 6.2. *Для оценок M_n, W_n, $\bar{L}_n$ и δ_n^* (см. (5.16), (5.19), (5.17), (5.3)) справедливы соотношения*

1.

$$\sigma_m^2 \;==\; \frac{\pi\,\Gamma^2((\gamma+2)/2)}{\gamma\,\Gamma^2((\gamma+1)/2)} \;\sim\; \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \to 0. \tag{6.14}$$

2.

$$\sigma_w^2 \;=\; \frac{4\pi\,\Gamma^4((\gamma+2)/2)\,\Gamma^2(\gamma+1)}{3\gamma^3\,\Gamma^4((\gamma+1)/2)\,\Gamma^2(\gamma+1/2)} \;\sim\; \frac{4}{3\gamma^3\pi^2}, \quad \gamma\;\to\;0. \qquad (6.15)$$

3. АОЭ оценки M_n относительно оценки W_n равна

$$e_{mw} \;=\; \frac{\sigma_w^2}{\sigma_m^2} \;=\; \frac{4\,\Gamma^2((\gamma+2)/2)\,\Gamma^2(\gamma+1)}{3\gamma^2\,\Gamma^2((\gamma+1)/2)\,\Gamma^2(\gamma+1/2)} \;\sim\; \frac{4}{3\gamma^2\pi^2}, \quad \gamma\;\to\;0. \qquad (6.16)$$

4. ААОЭ оценок M_n и W_n относительно оценки Питмэна δ_n^* соответственно равны

$$e_{m*} \;=\; \frac{1}{I_\gamma\sigma_m^2} \;=\; \frac{(\gamma+3)\gamma\,\Gamma^2((\gamma+1)/2)}{(\gamma+1)\pi\,\Gamma^2((\gamma+2)/2)} \;\sim\; 3\gamma, \quad \gamma\;\to\;0, \qquad (6.17)$$

$$e_{w*} = \frac{1}{I_\gamma\sigma_w^2} = \frac{3\gamma^3(\gamma+3)\,\Gamma^4((\gamma+1)/2)\,\Gamma^2(\gamma+1/2)}{4(\gamma+1)\pi\,\Gamma^4((\gamma+2)/2)\,\Gamma^2(\gamma+1)} \sim \frac{9\gamma^3\pi^2}{4}, \quad \gamma\to 0. \quad (6.18)$$

5.

$$\sigma_l^2 \;=\; \frac{4\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x(1\;-\;F_\gamma(x))\,dx}{(1\;-\;2\alpha)^2} \;=$$

$$=\; \frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{(2\alpha)^{1/\gamma}\,(1-2\alpha)^2}\,\big(1\;+\;O(\gamma)\big), \qquad \gamma\;\to\;0, \qquad F_\gamma(\xi_{1-\alpha})\;=\;1-\alpha, \qquad (6.19)$$

$$\sigma_l^{*2} \;=\; (1-2\alpha)^2\sigma_l^2 \;+\; \frac{4\alpha^2\xi_{1-\alpha}}{p_\gamma(\xi_{1-\alpha})} \;+\; \frac{2\alpha^3}{p_\gamma^2(\xi_{1-\alpha})} \;\sim\; \frac{\alpha}{2\gamma\,(2\alpha)^{2/\gamma}}, \qquad \gamma\;\to\;0,$$

и АОЭ оценки $\bar{L}_n$ относительно оценок M_n, W_n, δ_n^* и $\bar{L}_n^*$ соответственно равны

$$e_{lm} \;=\; \frac{\sigma_m^2}{\sigma_l^2} \;\sim\; \frac{(2\alpha)^{1/\gamma}(1-2\alpha)^2}{\alpha\gamma^{3/2}}, \qquad e_{lw} \;=\; \frac{\sigma_w^2}{\sigma_l^2} \;\sim\; \frac{4(2\alpha)^{1/\gamma}\,(1-2\alpha)^2}{3\alpha\gamma^{7/2}\,\pi^2}, \quad (6.20)$$

$$e_{l*} \;=\; \frac{1}{I_\gamma\sigma_l^2} \;\sim\; \frac{3(2\alpha)^{1/\gamma}(1-2\alpha)^2}{\alpha\sqrt{\gamma}}, \qquad e_{ll*} \;=\; \frac{\sigma_l^{*2}}{\sigma_l^2} \;\sim\; \frac{(1-2\alpha)^2}{2\gamma^{3/2}\,(2\alpha)^{1/\gamma}}, \qquad \gamma\;\to\;0. \qquad (6.21)$$

Доказательство. Первые четыре утверждения теоремы непосредственно следует из формул (5.20), (5.22), (1.1), (6.1), (6.10), (6.11), (5.6), (5.13) и непрерывности функции $\Gamma(t)$ по $t > 0$.

Докажем пятое утверждение. Сначала покажем, что

$$\xi_{1-\alpha}\;\to\;\infty, \qquad \gamma\;\to\;0, \qquad (6.22)$$

где $F_\gamma(\xi_{1-\alpha})\;=\;1-\alpha$. По формуле Тейлора можно записать

$$F_\gamma(x) \;=\; \frac{1}{2} \;+\; x\,p_\gamma(0) \;+\; \frac{x^2\,p_\gamma'(\theta x)}{2}, \quad \theta\;\in\;[0,1], \qquad (6.23)$$

причём (см.(1.1), (6.3))

$$p_\gamma(0) \;=\; \frac{\Gamma((\gamma+1)/2)\,\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)}, \quad p'_\gamma(x) \;=\; -\frac{x(\gamma+1)\Gamma((\gamma+1)/2)}{\gamma^{3/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma/2)(1+x^2/\gamma)^{\frac{\gamma+3}{2}}} \le 0, \qquad x \ge 0.$$

Поэтому из (6.23) следует неравенство

$$F_\gamma(x) \le \frac{1}{2} \;+\; \frac{x\,\Gamma((\gamma+1)/2)\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)}$$

и значит

$$\xi_{1-\alpha} \ge \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)(1-2\alpha)}{\Gamma((\gamma+1)/2)\sqrt{\gamma}} \;\to\; \infty, \qquad \gamma \;\to\; 0. \tag{6.24}$$

Итак, утверждение (6.22) доказано.

Из формул (6.12) и (6.4) непосредственно следует, что

$$F_\gamma(x) \;=\; 1 \;-\; \frac{x\,p_\gamma(x)}{\gamma}\Big(1 \;+\; \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma+2)(\gamma+x^2)} \;+\; r_\gamma(x)\Big), \tag{6.25}$$

поэтому, учитывая (5.21), получим

$$\sigma_l^2 \;=\; \frac{4\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x(1 \;-\; F_\gamma(x))\,dx}{(1\;-\;2\alpha)^2} \;=\; \frac{4\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2\,p_\gamma(x)\left(1 \;+\; \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma+2)(\gamma+x^2)} \;+\; r_\gamma(x)\right)dx}{\gamma(1\;-\;2\alpha)^2}. \tag{6.26}$$

Рассмотрим числитель выражения (6.26). Имеем

$$\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2\,p_\gamma(x)\,dx \;=\; \frac{\gamma^2\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)}\int_0^{\frac{\xi_{1-\alpha}}{\sqrt{\gamma}}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{\gamma-1}{2}}} \;-\; \frac{\gamma(1\;-\;2\alpha)}{2}. \tag{6.27}$$

Теперь, учитывая формулу

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^p} \;=\; \frac{1}{2p-1}\left(2p\int\frac{dy}{(1+y^2)^{p+1}} \;-\; \frac{y}{(1+y^2)^p}\right), \quad p \;\ne\; 1/2 \tag{6.28}$$

и (6.27), получим

$$\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2\,p_\gamma(x)\,dx \;=\; \frac{\gamma(1\;-\;2\alpha)}{2(\gamma-2)}\left(1 \;-\; \frac{\xi_{1-\alpha}\gamma^{\gamma/2}\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{(1-2\alpha)\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)(\gamma+\xi_{1-\alpha}^2)^{\frac{\gamma-1}{2}}}\right). \tag{6.29}$$

Далее,

$$\int_0^{\xi_{1-\alpha}} \frac{x^2\,p_\gamma(x)}{\gamma+x^2}\,dx \;=\; \frac{1-2\alpha}{2} \;-\; \gamma\int_0^{\xi_{1-\alpha}} \frac{p_\gamma(x)}{\gamma+x^2}\,dx \;=$$

$$=\; \frac{1-2\alpha}{2} \;-\; \frac{\gamma\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)}\int_0^{\frac{\xi_{1-\alpha}}{\sqrt{\gamma}}}\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{\gamma+3}{2}}}\,dx \;=\; \frac{1-2\alpha}{2} \;+\; O(\gamma). \tag{6.30}$$

Аналогично (см. (6.5))

$$\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2 p_\gamma(x) r_\gamma(x)dx \le \frac{\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+3)}{\gamma+2}\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x p_\gamma(x)\left(\int_x^\infty \frac{dt}{(\gamma+t^2)^2}\right)dx. \tag{6.31}$$

Но
$$\int_x^\infty \frac{dt}{(\gamma+t^2)^2} \le \frac{1}{x}\int_x^\infty \frac{tdt}{(\gamma+t^2)^2} \;=\; \frac{1}{2x(\gamma+x^2)},$$
поэтому из неравенства (6.31) следует оценка
$$\int_0^{\xi_{1-\alpha}} x^2\, p_\gamma(x)\, r_\gamma(x)\, dx \le \frac{\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+3)}{2(\gamma+2)} \int_0^{\xi_{1-\alpha}} \frac{p_\gamma(x)}{\gamma+x^2}\, dx \;= \tag{6.32}$$
$$= \frac{\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+3)\Gamma((\gamma+1)/2)}{4(\gamma+2)\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)} \int_0^{\frac{\xi_{1-\alpha}}{\sqrt{\gamma}}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{\gamma+3}{2}}} \;=\; O(\gamma^2). \tag{6.33}$$
Таким образом из формул (6.26), (6.29), (6.30) и (6.33) следует соотношение
$$\sigma_l^2 \;=\; \frac{2\xi_{1-\alpha}\gamma^{\gamma/2}\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{(2-\gamma)(1-2\alpha)^2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)(\gamma+\xi_{1-\alpha}^2)^{\frac{\gamma-1}{2}}} \;+\; O(\gamma). \tag{6.34}$$
Полагая в формуле (6.4) $x \;=\; \xi_{1-\alpha}$, получим
$$\alpha \;=\; \frac{\xi_{1-\alpha}\gamma^{\gamma/2}\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)\,(\gamma+\xi_{1-\alpha}^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}} \Big(1 \;+\; \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma+2)(\gamma+\xi_{1-\alpha}^2)} \;+\; r_\gamma(\xi_{1-\alpha})\Big), \tag{6.35}$$
поэтому из (6.34) следует, что
$$\sigma_l^2 \;=\; \frac{4\alpha\,\xi_{1-\alpha}}{(2-\gamma)(1-2\alpha)^2}\,\big(1 \;+\; O(\gamma)\big). \tag{6.36}$$
Из равенства (6.35) также следует, что
$$\alpha = \frac{\gamma^{\gamma/2}\,\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)\xi_{1-\alpha}^{\gamma}\Big(1+\frac{\gamma}{\xi_{1-\alpha}^2}\Big)^{\frac{\gamma+1}{2}}}\Big(1+\frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma+2)(\gamma+\xi_{1-\alpha}^2)}+r_\gamma(\xi_{1-\alpha})\Big). \tag{6.37}$$
Поэтому с учётом (6.24) имеем
$$\xi_{1-\alpha} \;=\; \sqrt{\gamma}\,\Big(\frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{2\alpha\sqrt{\pi}\,\Gamma((\gamma+2)/2)}\Big)^{1/\gamma}\Big(1 \;+\; O(\gamma)\Big). \tag{6.38}$$
Далее, по формуле Тейлора, имеем
$$\Gamma((\gamma+1)/2) \;=\; \Gamma(1/2) \;+\; \frac{\gamma\,\Gamma'(1/2)}{2} \;+\; O(\gamma^2), \quad \Gamma((\gamma+2)/2) \;=$$
$$=\; \Gamma(1) \;+\; \frac{\gamma\,\Gamma'(1)}{2} \;+\; O(\gamma^2), \tag{6.39}$$
Теперь, учитывая формулы (см. [25], стр. 220)
$$\Gamma'(1/2) \;=\; -\sqrt{\pi}\,(2\log 2 \;+\; \mathcal{C}), \quad \Gamma'(1) \;=\; -\mathcal{C}, \quad \Gamma(1/2) \;=\; \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) \;=\; 1, \tag{6.40}$$
где $\mathcal{C} \;=\; 0,5772157\cdots$ – постоянная Эйлера, получаем (см. (6.38))
$$\xi_{1-\alpha} \;=\; \frac{\sqrt{\gamma}}{2(2\alpha)^{1/\gamma}}\,\big(1 \;+\; O(\gamma)\big). \tag{6.41}$$

Отсюда и из (6.36) следует доказываемая формула (6.19). Формулы (6.20) и (6.21) следуют теперь из соотношений (6.1), (6.14) и (6.15). □

Замечание 6.2. Учитывая Замечание 6.1, можно получить более точную аппроксимацию

$$\sigma_m^2 \; == \frac{1}{\gamma} \; + \; 2 \, \log 2 \; + \; O(\gamma), \quad \gamma \to 0$$

и

$$\sigma_w^2 \; = \; \frac{4}{3\gamma^3\pi^2} \left(1 \; + \; 8 \, \gamma \, \log 2 \; + \; O(\gamma^2)\right), \quad \gamma \to 0.$$

Заметим также, что из Теоремы 6.2 следует, что выборочная медиана M_n асимптотически «лучше» чем оценки W_n и $\bar{L}_n$.

Список литературы

[1] Student, On the probable error of the mean. – Biometrica, 1908, v. 8, n. 1.

[2] Praetz P., The distribution of share prices changes. – J. Business, 1972, v. 45, p. 49 – 55.

[3] Blattberg R. and Gonedes N., A comparison of the stable and Student distributions as statistical models of stock prices. – J. Business, 1974, v. 47, p. 244 – 250.

[4] Королев В.Ю., Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. I. – Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, вып.2, с. 313 – 333.

[5] Королев В.Ю., Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. II. – Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, вып. 4, с. 907 – 910.

[6] Korolev V.Yu., A general theorem on limit behavior of superpositions of independent random processes with applications to Cox processes. – J. Math. Sci., 1996, v. 81, n. 5, p. 2951 – 2956.

[7] Золотарев В.М., Одномерные устойчивые распределения. «Наука», Москва, 1983, 304 стр.

[8] Uchaikin V.V. and Zolotarev V.M., Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications. VSP, Utrecht, 1999.

[9] Гнеденко Б.В., Об оценивании неизвестных параметров распределений по случайному числу независимых наблюдений. – в: Теория вероятностей и математическая статистика. Труды Тбилисского математического института им. А. М. Размадзе, 1989, с. 146 – 150.

[10] Gurland J., Some interrelations among compound and generalized distributions. – Biometrika, 1957, v. 44, p. 265 – 268.

[11] Quenouille M.H., A relation between the logarithmic, Poisson and negative binomial series. – Biometrics, 1949, v. 5, p. 162 – 164.

[12] Кендалл М.Дж. и Стьюарт А., Теория Распределений. «Наука», ГИФМЛ, Москва, 1966, 587 стр.

[13] Greenwood M. and Yule G.U., An inquiry into the nature of frequency-distributions of multiple happenings, etc. – J. Roy. Statist. Soc., 1920, v. 83, p. 255 – 279.

[14] Bickel P.J., On some robust estimates of location. – Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, n. 3, p. 847 – 858.

[15] Леман Э., Теория точечного оценивания. – М.: «Наука», 1991, 443 стр.

[16] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З., Асимптотическая теория оценивания. – М.: «Наука», 1979, 527 стр.

[17] Stone C.J., Asymptotic properties of estimators of a location parameter. – Ann. Statist., 1974, v. 2, p. 1127 – 1137.

[18] Port S.C. and Stone C.J., Fisher information and the Pitman estimator of a location parameter. – Ann. Statist., 1974, v. 2, p. 225 – 247.

[19] Serfling R. J., Approximation Theorems of Mathematical Statistics. – John Wiley, 1980, 371 p.

[20] Hodges J.L. and Lehmann E.L., Estimates of location based on rank tests. – Ann. Math. Statist., 1963, v. 34, p. 598 – 611.

[21] Albers W., Bickel P.J. and Van Zwet W.R., Asymptotic expansions for the power of distribution free tests in the one-sample problem. – Ann. Statist., 1976, v. 4, n. 1, p. 108 – 156.

[22] Helmers R., Edgeworth Expansions for Linear Combinations of Order Statistics. – Amsterdam, 1984, Mathematisch Centrum, 136 p.

[23] Huber P.J., Robust estimation of a location parameter. – Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, n. 1, p. 73 – 101.

[24] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, т.2. М.: «Мир», 1984, 746 стр.

[25] Двайт Г.Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: «Наука», 1977, 224 стр.

[26] Tsallis C., de Souza A. M. C. and Maynard R., Derivation of Lévy-type anomalous superdiffusion from general statistical mechanics. – in: Lévy Flights and Related Topics in Physics, eds: Shlesinger M.F., Zaslavsky G.M. and Frisch U. Springer, Berlin, 1995, p. 269-289.

[27] Бенинг В.Е., Королев В.Ю., Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики. – Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, вып.3, с. 417 – 435.

[28] У Да, Бенинг В.Е., Об оценивании центра распределения Стьюдента с малым числом степене свободы. – Вестник Московского Университета, серия 15, Вычисл. Матем. и Киберн., 2003, вып.3, с. 30 – 37.