Вестник ТвГУ. Серия "Педагогика и психология". 2014. № 1. С. 213-219

УДК 378.147

РОЛЬ ЛОГИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ В РАЗВИТИИ МЫШЛЕНИЯ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Е.М. Рекант

Уральский государственный педагогический университет, г. Екатеринбург

Рассмотрены основные типы логического мышления, применяемые в математических исследованиях, и показано, в каком качестве каждый из них может быть использован для развития логического мышления в ходе изучения студентами математического анализа. Включение логических конструкций в курс иллюстрировано подходящими примерами задач.

Ключевые слова: *логическое мышление, логические конструкции, математический анализ.*

Важнейшим стимулом развития современного общества является наличие прогрессивных идей, разработок и технологий. Создание технологий невозможно без глубокого интеллектуального потенциала общества. Поэтому в современном мире все больше возрастает потребность в высококвалифицированных и профессионально компетентных специалистах. Образование в информационном обществе перестает быть средством усвоения готовых общепризнанных знаний, а становится способом информационного обмена и обогащения личностей друг другом, ведущих к обретению ими компетентности и эрудированности (см. [1]).

В связи с этим особую роль приобретает развитие логического мышления. Логическое мышление необходимо человеку, чтобы понять, какие законы действуют в окружающей людей природе и обществе, и в соответствии с ними выстраивать собственный путь социального и профессионального развития.

Обучение математике обладает в данном вопросе заметными преимуществами. В то же время одним из основных математических предметов в большинстве вузов, где изучается высшая математика, является математический анализ (см, например, [2]). Поэтому проблема развития логического мышления в курсе матанализа остаётся актуальной.

Ниже мы рассмотрим некоторые основные типы логических конструкций, применяемых в математических исследованиях, и продемонстрируем, в каком качестве каждая из них может быть задействована для развития логического мышления в ходе изучения студентами математического анализа. Включение каждой из конструкций в курс будем иллюстрировать подходящими примерами задач. При этом мы выбирали задачи, которые содержат логические конструкции, так сказать, в чистом виде и потому могут использоваться и как стартовые для построения методики развития логического мышления, и как диагностические.

Разбор случаев

Разбор случаев – это фактически одно из утверждений математической логики, согласно которому, если из A_1 следует B, из A_2 следует B, … , из A_n следует B, то из A_1, или A_2, или… или A_n тоже следует B. Как правило, в качестве A_1, A_2, …, A_n выбираются такие утверждения, чтобы в совокупности они исчерпывали описание всех возможных ситуаций, т.е. чтобы дизъюнкция (A_1, или A_2, или… или A_n) являлась истинным высказыванием.

Умение выделять и правильно анализировать все возможные случаи – важнейшая составляющая развитого логического мышления. Несомненно, с задачей рассмотрения разных ситуаций ученики не раз встречались и в школьном курсе. Но тогда необходимость такого рассмотрения, а нередко и все рассматриваемые случаи были оговорены в условии задачи; учащимся требовалось лишь выполнить стандартные операции по готовой схеме. С идеей самостоятельно выделить при решении задачи несколько принципиально разных ситуаций учащиеся в курсе алгебры среднего звена школьного образования практически не встречаются, и, таким образом, данный логический механизм мышлением школьников не осваивается. Научить учащихся проводить разбор всех возможных случаев и доказывать невозможность остальных – сложная, но крайне необходимая задача, стоящая перед учителем математики. Она непосредственно связана с формированием того компонента логических универсальных учебных действий (УУД), который обозначен как составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов. Приведем иллюстрирующую задачу.

Задача 1. Исследовать на монотонность и экстремум функцию $f(x)=\alpha x^3+(\alpha-1)x^2-2x+3$.

На первый взгляд данная задача мало чем отличается от большинства предлагаемых задач в курсе матанализа по теме «Монотонность и экстремум». Как и в большинстве задач на эту тему, студентам надо взять производную и исследовать, когда эта производная положительна, отрицательна и равна нулю. Однако производная $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2(\alpha-1)x - 2$ ведёт себя совершенно по-разному при разных значениях параметра α. Первое, что нужно заметить (и что очень часто не замечают учащиеся), что случай $\alpha = 0$ надо рассматривать отдельно, т.к. в этом случае производная не есть квадратичная функция. Затем в случае, когда $\alpha \neq 0$, надо аккуратно рассмотреть все возможные случаи относительно ветвей параболы, которая является графиком производной:

1) $\alpha>0$, $D>0$,

2) $\alpha>0$, $D=0$,

3) $\alpha>0$, $D<0$,

4) $\alpha<0$, $D>0$,

5) $\alpha<0$, $D=0$,

6) $\alpha<0$, $D<0$.

Конечно, исследование квадратного трёхчлена относится к школьной программе. Однако в большинстве школьных заданий параметров нет, а потому исследование проходит для конкретных квадратичных функций. Умение правильно выделять все случаи свидетельствует о высоком уровне развития логического мышления.

Импликативные рассуждения: построение логической цепочки, дедукция

Умение строить логические цепочки той или иной длины в первую очередь ассоциируется с обладанием развитым логическим мышлением.

Понятие логической цепочки непосредственно связано с понятием дедукции. Напомним, что в математическом смысле дедукция – это вывод по правилам формальной логики; цепь умозаключений (рассуждение), звенья которой (высказывания) связаны отношением логического следования. Началом (посылками) дедукции являются аксиомы, постулаты или просто гипотезы, имеющие характер общих утверждений («общее»), а концом – следствия из посылок, теоремы («частное»). Если посылки дедукции истинны, то истинны и её следствия. Дедукция – основное средство доказательства.

Отметим, что дедукция как форма рассуждения тщательно изучается в психологии, особенно в связи с формированием понятий и решением задач. Большой толковый психологический словарь [7] трактует дедукцию как логическую операцию, в которой рассуждение ведется от общего к частному. Дедуктивное умозаключение представляет собой абстрактный процесс, который не требует никакого другого подтверждения, кроме логической непротиворечивости.

В исследовании развития логического мышления необходимо учитывать как общепсихологический контекст употребления этого понятия, так и собственно математический. Общепсихологический контекст важен тем, что он акцентирует внимание на умении из общих соображений делать конкретные выводы в данной ситуации. Как правило, основная трудность у школьников заключается в том, чтобы увидеть, *где* и *в каком виде* в данной задаче нужно использовать тот или иной теоретический факт. Что касается математического контекста употребления этого понятия, то он проявляет себя именно как требование строгого соблюдения логических связей между исходными положениями (или данными) и получаемыми выводами (результатами). Вот пример задачи, иллюстрирующий эту ситуацию.

Задача 2. Установить, имеет ли последовательность $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ предел, и, если имеет, найти его.

Логически задача распадается на два нетривиальных этапа:

1) доказать, что последовательность $\{x_n\}$сходится,

2) найти предел $\{x_n\}$.

Заметим сразу, что задача отличается от большинства заданий по матанализу на нахождение пределов, т.к. там наличие предела не требует доказательства и необходимо только численное его нахождение. В данном же случае студентам важно понять необходимость именно обоснования, что предел вообще существует. Однако и само доказательство существования предела весьма нетривиально и выстраивается в двузвенную логическую цепочку. Во-первых, нужно показать, что последовательность возрастает, во-вторых, доказать её ограниченность. Последнее, в свою очередь, требует перехода к рекуррентной формуле $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ и доказательству по индукции.

Следующим этапом является нахождение предела. Учащимся нужно воспользоваться арифметическими свойствами пределов и в рекуррентной формуле перейти к пределу, зная, что он существует. Дальнейшая часть сводится к решению простого иррационального уравнения.

Несмотря на то что каждый логический ход достаточно естественен и требует ссылки исключительно на недавно пройденные свойства пределов, синтез всех этих ходов требует достаточно высокого уровня логического мышления.

Доказательство от противного

Метод рассуждений от противного достаточно часто используется в математике. Он базируется на формально-логическом законе исключенного третьего. Применяя этот метод, мы предполагаем, что заключение утверждения неверно, и получаем из этого предположения два противоположных высказывания, так называемое противоречие. Однако использование его должно быть мотивированным. Во многих простых случаях без него вполне можно обойтись, и тогда он только загромождает решение задачи. В целом его использование как метода целесообразно, на наш взгляд, в тех случаях, когда отрицанием заключения в доказательстве утверждения приходится воспользоваться (в явной или неявной форме) более одного раза.

Задача 3. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две сходящиеся последовательности.

Верно ли, что если $\forall$ n $x_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$?

Задача достаточно простая, однако без применения метода от противного её решить трудно. Наоборот, предположив, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, противоречие получается почти мгновенно. В самом деле, если отделить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ непересекающимися окрестностями, то согласно определению предела последовательности с некоторого номера все члены первой последовательности должны лежать правее членов соответствующих членов второй последовательности, что противоречит условию. Идея применить метод от противного рождается, скорее всего, после нескольких безуспешных попыток привести контрпример.

Расширение / сужение условий

При решении той или иной задачи ученику нередко бывает полезным вспомнить, не было ли подобной задачи ранее. К сожалению, учащиеся успешно используют ранее изученные рассуждения лишь тогда, когда они полностью повторяются в новой задаче. Если же ситуация иная и очевидно, что дословное копирование старого решения не ведет к успеху, ученики теряются и вообще не пытаются обратиться к предшествующему случаю. Вот иллюстрирующий эту ситуацию пример.

Задача 4. Привести пример последовательности, множеством частичных пределов которой являются

а) все натуральные числа от 1 до 10,

б) все натуральные числа,

в) все целые числа.

Очевидно, что каждая следующая задача является в каком-то смысле расширением предыдущей. Каждая следующая задача усложняет последовательность из предыдущей. В первой самое сложное – догадаться, что для построения искомой последовательности нужно «смешивать» последовательности, сходящиеся к соответствующим числам. Конечно же, проще всего «смешивать» константные последовательности. Тем самым получаем последовательность

$x_n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 1, 2, \ldots, 10, 1, 2, \ldots 10, 1, 2, \ldots$,

частичными пределами которой являются все натуральные числа от 1 до 10.

В пункте б) сохраняется основная идея о «смешении» последовательностей. Но задача значительно сложнее. Нужно догадаться, как правильно обходить натуральный ряд, чтобы каждое число повторялось бесконечное число раз. К идее «смешения» добавляется идея «воронки», когда мы как бы наращиваем повторяемую группу. Теперь

$x_n = 1;\ 1, 2;\ 1, 2, 3;\ 1, 2, 3, 4;\ 1, 2, 3, 4, 5;\ 1, 2, \ldots$

Наконец, в пункте в) группа наращивается с двух сторон – положительными и отрицательными числами.

$x_n = 0;\ -1, 0, 1;\ -2, -1, 0, 1, 2;\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3;\ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4;\ -5, -4, \ldots$

Пример этой задачи показывает, насколько велик потенциал для развития логического мышления студентов, которые имеют задачи, связанные с расширением и сужением условий.

Конструктивные методы (построение примеров)

Построение конкретных примеров – едва ли не самый «любимый» метод рассуждений у студентов, применяемый далеко не всегда правомерно. В использовании этого метода необходимо учитывать три вещи, которые они часто забывают:

1) Построенный пример является подтверждением существования, но никак не доказательством, что всегда происходит так. В то же время, если пример не удается привести, это ещё не значит, что его не существует.

2) Приведенный пример, доказывающий существование одного из случаев, вовсе не говорит о том, что не может быть случаев других. Здесь мы возвращаемся к типу логических рассуждений, связанному с разбором случаев.

3) В случае, когда надо опровергнуть утверждение, построение примера столь же удачно, как и при доказательстве существования. Фактически опровергая всеобщность некоторого свойства, мы доказываем, что существуют ситуации, когда имеет место его отрицание.

В качестве иллюстративной задачи предложим ту, которая служит естественным продолжением уже разобранной в третьем пункте.

Задача 5. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две сходящиеся последовательности.

Верно ли, что если $\forall$ n $x_n<y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$?

Самое сложное в данной задаче – догадаться, что надо привести контрпример. Возможно, учащиеся, подумав, что утверждение верно, будут пытаться приводить подтверждающие примеры, забывая, что они тем самым показывают лишь существование случаев, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, но вовсе не то, что утверждение верно. Если же целенаправленно начинать строить контрпример, то успеха можно добиться без труда. Например, $x_n = 1/n$, $y_n = 2/n$.

Индукция

Индукции и, в частности, методу математической индукции, уделяется значительное внимание в курсе алгебры. Имеется довольно обширная методическая литература по вопросам изучения метода математической индукции, в которой, как правило, обсуждается и общее понятие индукции, поэтому мы ограничимся лишь несколькими замечаниями, позволяющими сместить акцент в нужную, на наш взгляд, сторону.

Индукция – это умозаключение, ведущее от фактов к некоторой гипотезе (общему утверждению). Индуктивные рассуждения играют большую роль в выдвижении гипотез. Умение строить гипотезы на основании рассмотрения конечного множества примеров, проверять их – неотъемлемая черта развитого логического мышления. Вместе с тем учащиеся должны отчетливо понимать, что никакая проверка частными случаями не является основанием для вывода об истинности общего утверждения. Тем самым индуктивное умозаключение обязательно должно быть поддержано дедуктивным рассуждением. И здесь возможны различные варианты.

Индукция подразумевает собой переход от частного случая к общему. Например, разобрав какие-то конкретные примеры, мы можем перейти к рассмотрению общей ситуации. Одним из примеров индуктивного подхода может служить задача 4, где мы обобщаем ситуацию, расширяя множество частичных пределов.

Изложенное ясно демонстрирует значительные возможности, предоставляемые курсом математического анализа для развития логического мышления.

Список литературы

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 «Педагогическое образование» (квалификация (степень) «магистр»). URL: http://mag.sseu.ru/index.php/2011-05-16-11-29-49/14-050100fgos
2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100 «Экономика» (квалификация (степень) «магистр»). URL: http://mag.sseu.ru/index.php/component/content/article/6-2011-05-16-21-39-24/10-080100fgos

ROLE OF LOGICAL STRUCTURES IN THE DEVELOPMENT OF THINKING IN THE COURSE OF MATHEMATICAL ANALYSIS

E.M. Rekant

Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg

There are considered the main types of logical thinking, applied mathematical research, and it’s shown how each of them may be involved in the development of logical thinking in the course of mathematical analysis. The inclusion each of types of logical thinking in the course is illustrated with appropriate examples of tasks.
Keywords*: logical thinking, logical constructions, mathematical analysis.*

Об авторе:

РЕКАНТ Евгений Маркович – аспирант кафедры методики обучения и воспитания (математика) ГОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет» (620075, Екатеринбург, К. Либкнехта, 9), e-mail: erekant@gmail.com