УДК 519.216

УТОЧНЕНИЕ КОНСТАНТЫ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕПОЛНЕНИЯ БУФЕРА[1]

Сидорова О.И., Хохлов Ю.С.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 05.10.2007, после переработки 22.10.2007.

В статье рассматриваются асимптотические границы для вероятности переполнения буфера в модели, предложенной Б. Цыбаковым и его соавторами. Уточнение константы в оценке, полученной в работе Цыбакова, проводится с помощью методов имитационного моделирования.

In the paper we consider asymptotical bounds for the probability of buffer overflow in the model presented by Tsybakov B. and his co-authors. We use some speedup simulation technique for the specification of a constant in the estimation received in the paper by Tsybakov B.

Ключевые слова: вероятность переполнения буфера, оценка вероятностей редких событий, распределение с тяжелым хвостом.
Keywords: buffer overflow probability, rare event's probability estimation, heavy-tailed distribution.

1. Моделирование редких событий

В современных высокоскоростных сетях связи пользователи предъявляют достаточно жесткие требования к качеству обслуживания (QoS). Для обеспечения надежной работы отдельных приложений и систем в целом типичные значения для таких важных параметров QoS как **вероятность переполнения буфера** или **вероятность потери пакета** не должны превышать 10^{-9}. Это означает, что потеря информации в сети является **редким событием**. Хорошо известно, что стандартный метод оценки вероятности событий – метод Монте-Карло – оказывается в этой ситуации неэффективным и моделирование может занимать длительное время (от нескольких часов до нескольких лет).

Действительно, пусть γ – это вероятность некоторого редкого события A. Чтобы оценить эту вероятность с помощью метода Монте - Карло, мы должны запустить n независимых траекторий системы $X_1, X_2, \dots, X_n$, где каждое $X_k, k = 1, \dots, n$ есть случайный вектор, состоящий из M наблюдений. Тогда оценкой вероятности γ будет случайная величина

$$\hat{\gamma}_{MC} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} I_k, \quad I_k = 1(X_k \in A).$$

[1] Работа поддержана РФФИ, проекты 05-01-583 и 06-01-00626.

Случайная величина $\sum_{k=1}^{n} I_k$ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, γ), следовательно, оценка $\hat{\gamma}_{MC}$ является несмещенной, то есть $M(\hat{\gamma}_{MC}) = \gamma$, и ее дисперсия равна $D(\hat{\gamma}_{MC}) = \frac{\gamma(1-\gamma)}{n}$.

Если мы хотим, чтобы относительная ошибка $RE(\hat{\gamma}_{MC})$ оценки не превышала некоторую величину r, то есть

$$RE(\hat{\gamma}_{MC}) = \frac{\sqrt{D(\hat{\gamma}_{MC})}}{\gamma} = \frac{\sqrt{1-\gamma}}{\sqrt{n\gamma}} \leq r,$$

тогда

$$n^* = \frac{r^{-2}(1-\gamma)}{\gamma} \approx \frac{r^{-2}}{\gamma},$$

где n^* – минимальное число траекторий необходимых для достижения заданного уровня точности r.

Пусть, например, $\gamma = 10^{-9}, r = 0.01$. Это означает, что для достижения заданной точности необходимо взять $n \approx 10^{13}$ траекторий.

Кроме того, поскольку $RE(\hat{\gamma}_{MC}) \approx (n\gamma)^{-\frac{1}{2}}$ при $\gamma \to 0$ относительная ошибка оценки $RE(\hat{\gamma}_{MC}) \to \infty$.

Следовательно, при моделировании редких событий нужно использовать более эффективные методы.

В настоящее время для моделирования и анализа событий, вероятности появления которых малы, широко применяются два метода:

- Importance Sampling,
- Importance Splitting.

Оба метода специальным образом увеличивают частоты появления редких событий и дают несмещенные оценки для изучаемых характеристик. Более того, при определенных условиях оценки, полученные с помощью этих методов, имеют меньшую стандартную ошибку по сравнению с обычным методом Монте - Карло.

1.1 Importance Sampling

Основная идея метода заключается в изменении исходного распределения вероятностей системы или процесса, в результате которого редкое событие становится «менее редким», то есть происходит более часто.

Пусть X это некоторая случайная величина с плотностью распределения $\varrho(x)$ и

$$\gamma = \int 1(x \in A)\varrho(x)\,dx = \int 1(x \in A)\frac{\varrho(x)}{\varrho^*(x)}\varrho^*(x)\,dx = M\left[1(X \in A)\frac{\varrho(X)}{\varrho^*(X)}\right],$$

где γ – вероятность события $\{X \in A\}$.

Обозначим через $L(x) = \frac{\varrho(x)}{\varrho^*(x)}$ – отношение правдоподобия. Тогда оценкой для вероятности γ будет случайная величина

$$\hat{\gamma}_{IS} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} 1(X_k \in A) L(X_k),$$

а величины $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ имеют новое распределение вероятностей с плотностью $\varrho^*(x)$.

Основная проблема при применении Importance Sampling заключается в том, что очень трудно, а для сложных систем практически невозможно найти оптимальное преобразование, которое позволит снизить дисперсию оценки. «Плохой» выбор может привести к тому, что полученная оценка окажется хуже, нежели оценка по методу Монте - Карло. В определенных случаях изменение исходного распределения (даже оптимальное) не снижает вариацию и более того может получиться, что $D(\hat{\gamma}_{IS}) = \infty$.

1.2 Importance Splitting

Метод заключается в разбиении пространства состояний изучаемого процесса или системы на непересекающиеся области, таким образом, что достижение последующей области из текущей не является редким событием. Всякий раз, когда траектория процесса достигает новой области, она делится на несколько идентичных копий, которые продолжают развиваться дальше вместе с основной траекторией, и таким образом, увеличивается вероятность того, что процесс достигнет интересующей нас области A.

Рассмотрим марковскую цепь $X = \{X_j, j \geq 0\}$ с произвольным пространством состояний $\mathcal{X}$ и начальным значением $X_0 = x_0$, описывающую функционирование некоторой системы массового обслуживания. Зададим функцию $f : \mathcal{X} \to R$ (*importance function*), которая определенным образом характеризует текущее состояние цепи Маркова.

Пусть A и B это два непересекающихся подмножества такие, что $A = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \geq L\}$ и $B = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq 0\}$, где $L > 0$ есть некоторая константа. Обычно полагают, что $f(x_0) \notin A$ и $f(x_0) \in B$.

Обозначим через $\tau_A = \inf\{j > 0 : f(X_j) \in A)\}$ – момент первого попадания в область A и $\tau_B = \inf\{j > 0 : f(X_j) \in B\}$ – момент первого возвращения в область B. Мы хотим оценить вероятность $\gamma = P(\tau_A < \tau_B)$ того, что цепь достигнет области A раньше, чем вернется в область B.

Далее в нашей задаче в качестве L мы берем величину, равную размеру буфера в системе массового обслуживания, следовательно $\gamma = P(\tau_A < \tau_B)$ есть вероятность того, что буфер переполнится раньше, чем система полностью освободится. Кроме того, мы полагаем, что $x_0 = 0$, то есть в начальный момент система свободна.

Разобьем интервал $[0, L]$ на непересекающиеся интервалы $0 = L_0 < L_1 < \ldots < L_m = L$. Обозначим через $T_k = \inf\{j > 0 : f(X_j) \geq L_k\}$ момент первого пересечения уровня L_k, тогда событие $D_k = \{T_k < \tau_B\}$ состоит в том, что функция $f(X)$ пересекла уровень L_k раньше, чем уровень $L_0 = 0$. Заметим, что $D_m \subset D_{m-1} \subset \ldots \subset D_1$.

Определим условные вероятности $p_k = P(D_k|D_{k-1})$, $k > 1$ и $p_1 = P(D_1)$. Тогда

$$\gamma = P(D_m) = \prod_{k=1}^{m} p_k.$$

Метод заключается в последовательной оценке условных вероятностей p_k. Для этого на первом этапе мы «запускаем» $N_0 = n_0$ независимых траекторий из состояния x_0 и продолжаем моделирование до момента $min(\tau_B, T_1)$. Пусть на этом шаге было R_1 успешных траекторий (имело место событие D_1). Тогда несмещенной оценкой вероятности p_1 будет величина $\hat{p}_1 = \frac{R_1}{N_0}$. Каждой из успешных траекторий $j = 1, \ldots, R_1$ соответствует собственное состояние $S_1^j = X_{T_1}^j$, при котором цепь попадает на уровень L_1. Эмпирическое распределение $\hat{G}_1$ этих R_1 «входных» состояний будет оценкой для истинного распределения G_1 (*entrance distribution at threshold* L_1).

Если $R_1 = 0$, то $\hat{p}_k = 0$ для всех $k \geq 1$, и вычисления останавливаются на первом шаге. Если $R_1 > 0$, то мы «запускаем» N_1 независимых траекторий из R_1 удачного «входного» состояния, клонируя при необходимости $(N_1 > R_1)$ некоторые из траекторий. Каждая из новых траекторий моделируется до момента $min(\tau_B, T_2)$. Оценкой вероятности p_2 будет величина $\hat{p}_1 = \frac{R_2}{N_1} = \frac{R_2}{n_1 \cdot R_1}$, где R_2 – число успешных траекторий на втором шаге. Как и прежде, каждой из успешных траекторий $j = 1, \ldots, R_2$ соответствует собственное состояние $S_2^j = X_{T_2}^j$, при котором цепь попадает на уровень L_2. Эмпирическое распределение $\hat{G}_2$ этих R_2 входных состояний будет оценкой для истинного распределения G_2 (*entrance distribution at threshold* L_2). Заметим, что распределения $\{G_k\}_{k=1}^m$ являются условными, так как они определяются состоянием цепи на шаге $k - 1$.

Вычисления продолжаются последовательно для каждого шага, если $\hat{p}_{k-1} \neq 0$. Несмещенной оценкой для вероятности γ будет

$$\hat{\gamma} = \prod_{k=1}^{m} \hat{p}_k$$

Существуют разные версии данного алгоритма. В нашей работе мы рассматриваем так называемый fixed splitting алгоритм: $N_k = u_k R_k$, где $u_k \in N^+$ – некоторая постоянная. Тогда

$$\hat{\gamma} = \prod_{k=1}^{m} \frac{R_k}{u_{k-1} \cdot R_{k-1}} = \frac{R_m}{\prod\limits_{k=0}^{m-1} u_k}.$$

Основной проблемой при реализации метода Importance Splitting является выбор функции $f(x)$, границ L_i, $i = \overline{1, m-1}$ и факторов u_k, $k = \overline{1, m-1}$.

2. Модель Цыбакова

Как правило, в традиционных моделях трафика предполагается, что интервалы времени между появлением последовательных заявок независимы, а их распределения имеют экспоненциально убывающие хвосты. Это приводит к тому, что зависимость трафика в разные моменты времени, которая характеризуется с помощью корреляционной функции, в этом случае убывает экспоненциальным образом, то есть очень быстро. Вследствие этого, после агрегирования мы получаем однородный процесс с независимыми приращениями, то есть белый шум. Иными словами, трафик после агрегации в определенном смысле сглаживается, становится более регулярным, когда время усреднения возрастает. Про такие последовательности говорят, что они обладают *кратковременной или быстро убывающей зависимостью.* Если такой поток поступает на вход некоторого сервера, то характеристики производительности системы, например, вероятность переполнения буфера конечного размера, меняются экспоненциальным образом в зависимости от изменения некоторого характерного параметра например, размера буфера.

Статистика реальных данных в современных сетях телекоммуникации таких, как Интернет, показывает, что входящие потоки сильно отличаются от пуассоновских и некоторых других близких к ним. Эмпирические исследования потоков нагрузки в компьютерных сетях показали, что эти потоки обладают свойством *долговременной или медленно убывающей зависимости*, то есть их корреляционные функции убывают очень медленно (степенным образом), а длины периодов занятости имеют распределение с тяжелыми хвостами. Агрегированный процесс в этой ситуации остается случайным, и, более того, статистически выглядит одинаково на разных временных шкалах, то есть является *самоподобным.* Характеристики качества работы системы при этом кардинально меняются по сравнению с традиционными моделями. Вследствие сложной структуры входящих потоков, как правило, трудно получить не только точные, но и асимптотические формулы для расчета характеристик QoS, хотя в определенных случаях для вероятности переполнения буфера и вероятности потерь можно найти некоторые асимптотические границы.

Мы рассматриваем модель самоподобного трафика для ATM систем, предложенную в работах Цыбакова (см. [6] - [9]). Ниже приводится краткое описание этой модели.

На вход системы связи, состоящей из конечной буферной памяти (буфера) и канала (обслуживающего устройства) поступает трафик $Y = (\ldots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, \ldots)$, где Y_t, $t \in I_{-\infty} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ обозначает число пакетов, приходящих в момент t. Трафик формируется за счет объединения пакетов, сгенерированных всеми активными источниками.

В момент $t \in I_{-\infty}$ в системе включается $\xi(t)$ источников. Случайные величины $\xi = \{\xi_t\}_{t \in I_{-\infty}}$ независимы и имеют распределение Пуассона с параметром λ.

Все источники будем нумеровать в порядке начала их работы. Если несколько источников включаются одновременно, они нумеруются произвольным образом. Момент времени ω_s, когда источник s начинает генерировать пакеты назовем *началом активного периода источника s.* При этом источник s продолжает генерировать пакеты в каждый последующий момент времени $\omega_s+1, ...$ и останавливается в момент $\omega_s + \tau_s$. Таким образом, τ_s, $s \in I_{-\infty}$ это *длина активного периода* источника s. Мы полагаем, что $\tau = \{\tau_s\}_{s \in I_{-\infty}}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих дискретное распределение Парето:

$$P(\tau_s = l) = c_0 l^{-\alpha-1}, \forall s \in Z_+, \forall l \in N$$

где

$$c_0 = (\sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha-1})^{-1},\ 1 < \alpha < 2.$$

В этом случае $E(\tau_s) < \infty$, $D(\tau_s) = \infty$.

Через $\theta_s(i) \in Z^+$ обозначим число пакетов, сгенерированных источником s в момент $\omega_s + i - 1$, $i \in \{1, \dots, \tau_s\}$. До момента ω_s и с момента $w_s + \tau_s$ источник s пакеты не генерирует, то есть $\theta_s(i) = 0$ при $i \geq 0$, $i \leq \tau_s + 1$.

Тогда

$$Y_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \theta_s(t).$$

Мы полагаем, что источники генерируют пакеты с постоянной скоростью $\theta_s(i) = R = 1$. В этом случае с.в. Y_t имеет распределение Пуассона со средним $E(Y_t) = \lambda E\tau$.

Конечный размер буфера означает, что он может хранить не более чем h пакетов в любой момент времени t. В каждом временном окне $[t, t+1)$ канал передает (обслуживает) не более чем C пакетов, которые берутся либо из буфера, либо из Y_t новых пакетов. Пакет, который обслуживается в окне $[t, t+1)$, уходит из системы в момент $t+1$. Величина C называется пропускной способностью канала. Далее мы полагаем $C = 1$.

Данную систему связи можно рассматривать как систему массового обслуживания, в которой в каждый момент времени события происходят в следующем порядке: $\{$конец обслуживания окне $[t-1, t)\} \to \{$конец окна $[t-1, t)\} \to \{$поступление новых пакетов (может поступить 0 пакетов)$\} \to \{$выбор следующих пакетов для обслуживания$\} \to \{$потеря пакетов если этого требует дисциплина обслуживания$\} \to \{$помещение непотерянных пакетов в буфер$\} \to \{$начало окна $[t, t+1)\}$ $\to \{$начало обслуживания в окне $[t, t+1)\}$.

Описанную выше систему обозначим как $Y/D/1/h$, где Y это входящий процесс описанный выше, D это постоянное время обслуживания для пакета равное 1, а третий параметр, равный 1, означает, что в системе есть только одно обслуживающее устройство (канал), h это размер буфера в пакетах.

В каждый момент времени t в обслуживающем устройстве может находиться не более одного пакета, а буфер не может хранить более h пакетов, следовательно, если $h + 1 < Y_t$, то часть пакетов обязательно будет утеряна. Обозначим через $Z = (\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots)$ количество пакетов, находящихся в буфере в момент времени t.

Наиболее интересным классом дисциплин d является класс $D_C(h)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. если $Y_t + Z_t > 0$, тогда $min\{Y_t + Z_t, 1\}$ пакетов попадает в канал в момент времени t;

2. если $Y_t + Z_t \leq h + 1$, тогда ни один пакет не теряется в момент времени t;

3. если же $Y_t + Z_t > h + 1$, то $Y_t + Z_t - h - 1$ пакетов теряется в момент времени t.

Какие именно пакеты выбираются для обслуживания, а какие теряются, определяется конкретной дисциплиной $d \in D_C(h)$.

Событие $Y_t + Z_t > h + 1$ называется *вероятностью переполнения буфера* в момент t. Момент t называется моментом переполнения, если теряется хотя бы один сгенерированный в момент t пакет.

В работах [6, 7] было доказано, что для системы $Y/D/C/h$, которая обладает всеми описанными выше требованиями, для вероятности переполнения буфера в стационарном режиме справедливы следующие границы.

Теорема 1. *Если $E\tau < \infty$ и $P(\xi = 0) < 1$, то в СМО $Y/D/1/h$ с произвольной дисциплиной обслуживания из класса $D(h)$ для вероятности переполнения буфера справедливы следующие асимптотические границы:*

$$P_{over} \geq \frac{1}{(E\tau + E\kappa)^2} \sum_{n=n_1}^{\infty} P(\tau \geq n), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} n_1 &= \left[\frac{h+b}{a}\right] + 2, \quad E\kappa = [1 - P(\xi = 0)]^{-1} - 1, \\ a &= (E\tau + E\kappa)^{-1} \leq 1, \quad b = a + 1 \end{aligned}$$

и

$$P_{over} \leq \frac{\lambda}{(1 - \lambda E\tau)} \sum_{n=h}^{\infty} P(\tau \geq n), \quad \lambda E\tau < 1 \tag{2}$$

Если случайная величина τ имеет дискретное распределение Парето, то нижняя и верхняя границы для вероятности переполнения буфера будут иметь вид

$$P_{over} \geq \frac{c_0}{\alpha(\alpha - 1)(E\tau + E\kappa)^2} \left(\left[\frac{h+b}{a}\right] + 2\right)^{-\alpha+1}, \tag{3}$$

и

$$P_{over} \leq \frac{c_0 \lambda h^{-\alpha+1}}{\alpha(\alpha - 1)(1 - \lambda E\tau)}, \tag{4}$$

где $\lambda E(\tau) < 1$

Для больших h мы получаем

$$P_{over} \geq c_{low} h^{-\alpha+1} \tag{5}$$

и

$$P_{over} \leq c_{upper} h^{-\alpha+1}. \tag{6}$$

При этом константы

$$c_{low} = \frac{c_0}{\alpha(\alpha - 1)(E\tau + E\kappa)^{\alpha+1}} \tag{7}$$

и

$$c_{upper} = \frac{c_0 \lambda}{\alpha(\alpha-1)(1-\lambda E\tau)} \tag{8}$$

зависят от $\lambda, \alpha, E\tau$ и *не зависят от* h.

Таким образом, границы (5) и (6) с точностью до множителя, не зависящего от h, дают скорость убывания вероятности переполнения буфера с ростом размера буфера h. Следует отметить, что вероятность P_{over} убывает не по привычному в теории телетрафика экспоненциальному закону от h, а по степенному закону от h.

Нас интересует для каких h величина $c = \frac{P_{over}}{h^{-\alpha+1}}$ попадает в указанные границы и где именно она располагается в интервале $[c_{low}, c_{upper}]$

3. Результаты

В рассматриваемой нами задаче в каждый момент j состояние системы – X_j полностью определяется через величины Y_j, Z_j и W_j, где W_j есть остаточное время работы источников, активных в момент j. Таким образом, $X = \{X_j = (Y_j, Z_j, W_j)\}_{j \geq 0}$ есть цепь Маркова.

Как было замечено выше, ключевым моментом при осуществлении Importance Splitting является выбор функции $f(x)$, порогов $\{L_i\}$ и фактора u.

Определим функцию $f : \mathcal{X} \to R$ так, чтобы $f(X_j) = Y_j + Z_j$ для любого j, где $Y_j + Z_j$ есть число пакетов в системе в момент j. Тогда интересующее нас событие $A = \{x \in \mathcal{X} : f(x) > h+1\}$.

Для выбора порогов использовался адаптивный алгоритм, предложенный в работе Gerou and Guyader(2005). Идея метода заключалась в следующем:

1. моделируем n траекторий процесса до достижения областей A или B;
2. упорядочиваем траектории по возрастанию по значениям функции $f(x)$;
3. оставляем k траекторий с максимальными значениями функции $f(x)$, оставшиеся $n-k$ траекторий продолжаем моделировать дальше, но уже из состояния достигнутого $n-k$ - ой по порядку траекторией;
4. моделирование продолжается до тех пор, пока все k траекторий не достигнут области A.

Если нам известны некоторые границы $\tilde{p}_i$, то (см. [2]) $L_{i+1} = \inf\{x \in R : P(\exists n = 1, 2, \ldots, N_{i+1} : f(X_n) \geq x, \quad X_0 \in s_i) \leq \tilde{p}_{i+1}\}$, где $s_i = \{S_i^j\}$.

Обозначим через V_j максимальное значение функции $f(X_j)$, достигнутое на j - ой траектории, стартующей с уровня L_i. Упорядочим значения V_j по возрастанию: $V_{[1]} \leq V_{[2]} \leq \ldots \leq V_{[N_{i+1}]}$, где $V_{[l]}$ есть l - ая порядковая статистика. Наилучшей оценкой для L_{i+1} будет $\hat{L}_{i+1} = V_{[n(1-\tilde{p}_{i+1})]}$ – несмещенная оценка квантили порядка $(1 - \tilde{p}_{i+1})$ для распределения случайной величины $M_i := \sup\limits_{1 \leq j \leq N_{i+1},} \{f(X_j), \quad X_0 \in s_i\}$. Следовательно, в предложенном алгоритме можно положить $k = [n(1-\tilde{p}_{i+1})]$.

В силу, что мы рассматриваем только случайные процессы с дискретным временем, $P(L_j \le f(X_{i+1}) < L_{j+1} | L_i \le f(X_i) < L_{i+1}) > 0$, где $L_j > L_{i+1}$. Это означает, что соответствующая траектория может сразу пересечь несколько уровней. Так как она не копировалась при достижении промежуточных порогов $L_{i+1}, \dots, L_{j-1}$, то при достижении уровня L_j эта траектория должна делиться на $\prod\limits_{k=i+1}^{j} n_k$ копий.

Результаты моделирования для разных значений параметров анализируемой системы массового обслуживания приведены в таблицах 1 и 2 ниже. Значения факторов u_i, $i = 1, \dots, m-1$ полагались равными 5 для всех i, $N_0 = 500$.

Таблица 1: Вероятности переполнения буфера в модели Б. Цыбакова.

Размер буфера	p_{real}	p_{low}	p_{upper}	p_{real}	p_{low}	p_{upper}
$\alpha = 1,3,\ E\tau = 2,745$						
$\lambda = 0,32,\ \lambda E\tau = 0,8784$				$\lambda = 0,1,\ \lambda E\tau = 0,2745$		
10	0,0291	0,0186	2,3609	0,00081	0,02818	0,12366
100	0,0182	0,0093	1,1833	5,142E-05	0,01412	0,06198
1000	0,0187	0,0047	0,5930	1,164E-05	0,00708	0,03106
10000	0,0198	0,00235	0,2972	9,503E-11	0,00355	0,01557
100000	0,0192	0,0012	0,1490	0,0000	0,00178	0,0078
$\alpha = 1,5,\ E\tau = 1,947$						
$\lambda = 0,5,\ \lambda E\tau = 0,9735$				$\lambda = 0,2,\ \lambda E\tau =$0,3894		
10	0,0935	0,0138	5,9302	0,00544	0,00296	0,10295
100	0,0847	0,0044	1,8753	8E-04	0,00094	0,03256
1000	0,0885	0,0014	0,5930	2,01E-05	0,0003	0,01029
10000	0,0844	0,0004	0,1875	2E-07	9,36E-05	0,00326
100000	0.0816	0,0001	0,0593	1,625E-13	2,96E-05	0,00103

Таблица 2: Значения константы в модели Б. Цыбакова.

Размер буфера	c_{real}	c_{low}	c_{upper}	c_{real}	c_{low}	c_{upper}
$\alpha = 1,3,\ E\tau = 2,745$						
$\lambda = 0,32,\ \lambda E\tau = 0,8784$				$\lambda = 0,1,\ \lambda E\tau = 0,2745$		
10	0,058	0,0371	4,711	0,00161	0,05622	0,2467
100	0,072	0,0371	4,711	2,047E-04	0,05622	0,2467
1000	0,149	0,0371	4,711	9,244E-05	0,05622	0,2467
10000	0,314	0,0371	4,711	1,506E-09	0,05622	0,2467
100000	0,609	0,0371	4,711	0,0000	0,05622	0,2467
$\alpha = 1,5,\ E\tau = 1,947$						
$\lambda = 0,5,\ \lambda E\tau = 0,9735$				$\lambda = 0,2,\ \lambda E\tau =$0,3894		
10	0,296	0,04373	18,753	0,0172	0,00936	0,717
100	0,847	0,04373	18,753	8E-03	0,00936	0,717
1000	2,799	0,04373	18,753	6,4E-04	0,00936	0,717
10000	8,44	0,04373	18,753	2E-05	0,00936	0,717
100000	25,8	0,04373	18,753	5,14E-11	0,00936	0,717

Из результатов моделирования видно, что

1. для параметров системы $\lambda = 1,3$ и $\lambda = 1,5$, когда величина $\lambda E\tau$ близка к единице, оценка константы Цыбакова c_{real} при рассмотренных h лежит в интервале $[c_{low}, c_{upper}]$, причем ближе к нижней границе. Заметим, что оценка вероятности переполнения буфера P_{real} в этом случае убывает с ростом размера буфера очень медленно, и значение константы имеет тенденцию к увеличению.

2. Для тех же значений λ, при $\lambda E\tau$ значительно меньших единицы (например, $\lambda E\tau < 0,4$), константа c_{real} не попадает в предложенные границы даже при больших размерах h. Таким образом, в этой области значений параметров оценки работают плохо, по - крайней мере, для конечных h.

Список литературы

[1] Cerou, F., Gyuader, A. Adaptive multilevel splitting for rare event analysis. Tech.Rep. 5710, INRIA. Oct., 2005.

[2] Garvels, M.J.J. The splitting method in rare event simulation. Ph.D.thesis, Faculty of mathematical Science, University of Twente, The Netherlands, 2000.

[3] Heegaard, P.E. Speedup simulation techniques (survey), Workshop on Rare Event Simulation, 28 - 29 Aug. 1997, Aachen, Germany.

[4] Leland, W. E., Taqqu, M. S., Willinger, W. and Willson, D. V. On the self-similar nature of Ethernet traffic (Extended version), IEEE/ACM Trans. Networking 2, 1-15, 1994.

[5] Likhanov, N., Tsybakov, B. and Georganas, N. D. Analysis of an ATM buffer with Self - Similar ("Fractal") Input traffic.- Proc, IEEE INFOCOM'95, Boston, MA, 1995, p.985-992.

[6] Tsybakov, B. and Georganas, N. D. On selfsimilar traffic in ATM queues: Definitions, overflow probability bound and cell delay distribution. IEEE/ACM Trans. Networking, 5(3):379-409, 1997.

[7] Tsybakov, B. and Georganas, N. D. Selfsimilar traffic and upper bounds to buffer overflow in an ATM queue. Performance Evaluation, 36(1):57-80, 1998.

[8] Tsybakov, B. and Georganas, N. D. Overflow and losses in a network queue with a self-similar input. Queueing systems 35:201-235, 2000.

[9] Цыбаков Б.С. Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса.– Радиотехника, 5, с. 24-31, 1999.