МОДЕЛИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 517.94

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА УСТАНОВИВШИМСЯ ПОТОКОМ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Захарова И.В.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 05.09.2007, после переработки 28.09.2007.

Исследуется стационарная задача об обтекании ограниченного тела потоком вязкой неньютоновской жидкости. Доказана единственность решения поставленной задачи в весовых пространтсвах Соболева и получены оценки в соответствующих нормах.

The stationary problem of a flow about solid by the stream of viscous non-Newtonian fluid is investigated. The uniqeness of the problem is proved in weigted Sobolev spaces. The estimates of solution in suitable norms are obtained too.

Ключевые слова: неньютоновские жидкости, весовые пространства Соболева.
Keywords: non-Newtonian fluids, weighted Sobolev spaces.

В работе рассматривается стационарная задача для определенного класса неньютоновских жидкостей. Пусть $\bar{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ есть скорость и $p(x)$ давление жидкости, $x \in R^3$. Предмет нашего исследования - класс неньютоновских жидкостей с тензором напряжений вида

$$T(\bar{v}, p) = -pI + \Pi(\bar{v}), \quad \Pi = (1 + \zeta(|S|^2))S,$$
$$S(\bar{v}) = \{S_{ij}\}_{i,j=1}^3 = \left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\}_{i,j=1}^3, \quad |S| = \left(\sum_{i,j=1}^3 S_{ij}^2\right)^{1/2},$$

где $\zeta(t),\ t \geq 0$ гладкая функция, имеющая ограниченные первую и вторую производные и удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered}\zeta(0) = 0, \quad -1 + \gamma_0 \leq \zeta(t) \leq \gamma_1, \\ \zeta(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \quad \zeta^{'}(t) \to 0 \text{ при } t \to 0 \\ \gamma_0 = \mathrm{const} > 0, \quad \gamma_1 = \mathrm{const} \geq -1 + \gamma_0, \\ \max_{t\geq 0} |\zeta^{'}(t)| = M_1, \max_{t\geq 0} |\zeta^{''}(t)| = M_2,\end{gathered} \tag{1}$$

I - единичная матрица.

Для $\zeta(t) \equiv 0$ мы получаем обычную ньютоновскую жидкость. Движение потока описывается системой уравнений

$$-\nu \mathrm{div}\Pi + (\bar{v}\nabla)\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad \mathrm{div}\,\bar{v} = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{2}$$

Здесь ν есть положительная константа и

$$(\bar{v}\nabla)\bar{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i},$$
$$\mathrm{div}\Pi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\big((1+\zeta(|S|^2))S_{ij}\big), \quad j = 1,2,3.$$

Уравнения (2) есть математическая модель стационарного движения вязких жидкостей, например таких, как полипропилен, расплавленная сталь, гидроксилэтицеллюлоза.

1. Постановка задачи

Движение потока описывается системой уравнений(2) с граничными условиями

$$\bar{v}|_\Gamma = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \bar{v}(x) = 0. \tag{3}$$

Задача (2), (3) исследуется в весовых пространствах Соболева. Для $m \in N$, $1 < r < \infty$, $\delta \in R$ весовые пространства Соболева определяются как

$$H_\delta^{m,r}(\Omega) = \left\{ \bar{f} \in L_\delta^r(\Omega) \mid \quad D^\alpha \bar{f} \in L_{\delta+|\alpha|}^r(\Omega),\ 0 \le |\alpha| \le m \right\},$$

где α - мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$$|\alpha| = \sum \alpha_i, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2}\frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x_3}.$$

Для $1 < r < \infty$, $\delta \in R$ мы определим весовые $L_\delta^r(\Omega)$ пространства как

$$L_\delta^r(\Omega) = \left\{ \bar{f} \in L^r(\Omega) : \|\bar{f}\|_{r,\delta,\Omega} = \left(\int_\Omega (1+|x|^2)^{\delta r/2} |\bar{f}(x)|^r \, dx \right)^{1/r} < \infty \right\}.$$

$H_\delta^{m,r}(\Omega)$ - банахово пространство с нормой

$$\|\bar{f}\|_{m,r,\delta,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha \bar{f}\|_{r,\delta+|\alpha|,\Omega}^r \right]^{1/r}.$$

В работе используются весовые пространства $H_\delta^{2,r}(\Omega)$. Решение задачи (2), (3) ищется в классе функций, убывающих на бесконечности. Условие $\delta > -\frac{3}{r}$ гарантирует убывание решения на бесконечности. В своей работе мы исследуем математические свойства так называемых PR - решений (физически реализуемых), то есть решений, удовлетворяющих соотношению

$$\bar{v}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad p(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \text{ при } x \to \infty.$$

Термин «физически реализуемое» был введен Р. Финном в [2].

Основной результат для внешней задачи (2), (3) есть

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset R^3$ *внешняя область, дополнение к компактному множеству,* Γ *есть граница области класса* C^3. *Если функция* $\zeta(t)$ *удовлетворяет условиям (1),* $\bar{f} \in L^r_{\delta+2}(\Omega)$, $-\frac{3}{r} < \delta < 1 - \frac{3}{r}$, $\quad r > 3$ *и* $\bar{f}(x)$ *может быть представлена в виде*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{|x|^3}\bar{F}(x) + \tilde{f}(x), \tag{4}$$

где $\bar{F}(x)$ *удовлетворяет условию согласования*

$$\int\limits_\Gamma \bar{d} \cdot \bar{F}\, d\Gamma = 0 \quad \forall\, \bar{d} \in R^3, \tag{5}$$

функция $\tilde{f}(x)$ *такова, что*

$$\tilde{f}(x) = O\biggl(\frac{1}{|x|^{3+\varepsilon_1}}\biggr), \quad \varepsilon_1 > 0 \tag{6}$$

и норма $\|\bar{f}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}$ *достаточно мала, то существует единственное решение задачи (2), (3), такое что*

$$\bar{v} \in H^{2,r}_\delta(\Omega), \quad p \in H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega),$$

$$\bar{v}(x) = O\biggl(\frac{1}{|x|}\biggr), \quad p(x) = O\biggl(\frac{1}{|x|^2}\biggr) \text{ при } x \to \infty$$

и имеет место оценка

$$\|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|p\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)} \le c\|\bar{f}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)},$$

где c *есть константа, зависящая от области* Ω, *параметров* r *и* δ.

Решение задачи (2), (3) получено методом последовательных приближений. Эти приближения являются решениями подобных линейных задач. Исследование линейных задач основано на результатах С. Назарова и К. Пилескаса [3] для внешней задачи для системы Стокса

$$-\nu\Delta\bar{u} + \nabla q = \bar{f}, \quad \operatorname{div}\ \bar{u} = 0 \quad \text{в} \ \ \Omega, \tag{7}$$

$$\bar{u}|_\Gamma = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \bar{u}(x) = 0. \tag{8}$$

Теорема 2 доказана в [3].

Теорема 2. *Пусть* Ω *есть неограниченная область из* R^3, *дополнение к компактному множеству,* Γ *- граница области класса* C^3.

Если $\bar{f} \in L^r_{\delta+2}(\Omega)$, $-\frac{3}{r} < \delta < 1 - \frac{3}{r}$, $\quad r > 3$ *и* $\bar{f}(x)$ *удовлетворяет условиям (4),(5),(6), то существует единственное решение задачи (7), (6), такое что*

$$\bar{u} \in H^{2,r}_\delta(\Omega), \quad q \in H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega),$$

$$\bar{u}(x) = O\biggl(\frac{1}{|x|}\biggr), \quad q(x) = O\biggl(\frac{1}{|x|^2}\biggr) \text{ при } x \to \infty$$

и имеет место оценка

$$\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|q\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)} \le c\|\bar{f}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}.$$

Построим последовательность приближений и докажем, что эта последовательность сходится к решению задачи (2), (3), если данные задачи достаточно малы.

Теорема 1 сформулирована в [7]. Там же приведено краткое изложение доказательства. В настоящей работе приводится подробное доказательство этой теоремы.

Нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Неравенство Соболева. *Пусть Ω—внешняя область из R^3. Для функции $\bar{f}(x) \in L_6(\Omega)$ справедлива оценка*

$$\|\bar{f}(x)\|_{L_6} \le \frac{2}{\sqrt{3}}\|\nabla \bar{f}\|_{L_2}. \tag{9}$$

Неравенство Соболева имеется, в частности, в [5].

Неравенство Р.Финна. *Пусть Ω—внешняя область из R^3, не содержащая начала координат. Для любой функции $\bar{v}(x) \in W^1_2(\Omega)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_\Omega |x|^{-2}|\bar{v}|^2\,dx \le 4\int\limits_\Omega |\nabla\bar{v}|^2\,dx. \tag{10}$$

Неравенство Р. Финна доказано в [2].

Лемма 1. *Пусть Ω—неограниченная область из R^3, дополнение к компактному множеству с гладкой границей. Если $r > 3, -\frac{3}{r} < \delta < 1 - \frac{3}{r}$, то для любой функции $\bar{u}(x) \in H^{2,r}_\delta(\Omega)$ справедлива оценка*

$$\max_\Omega |D\bar{u}| \le c\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \tag{11}$$

Доказательство леммы 1 имеется, в частности, в [8].

Лемма 2. *Пусть Ω—неограниченная область из R^3, дополнение к компактному множеству с гладкой границей. Если $r > 3, -\frac{3}{r} < \delta < 1 - \frac{3}{r}$, то для любых функций $\bar{u}(x), \bar{v}(x), \bar{w}(x) \in H^{2,r}_\delta(\Omega)$ справедлива оценка*

$$\|D^2\bar{u}D\bar{v}D\bar{w}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \le c^2\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}|\|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar{w}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \tag{12}$$

Доказательство леммы 2 имеется, в частности, в [8].

Лемма 3. *Пусть Ω—неограниченная область из R^3, дополнение к компактному множеству с гладкой границей, $r > 3, -\frac{3}{r} < \delta < 1 - \frac{3}{r}$. Если функции $\bar{u}(x), \bar{v}(x) \in H^{2,r}_\delta(\Omega)$ и выполнены условия*

$$|\bar{v}(x)| = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \ \textit{при}\, x \to \infty,$$

$$|\bar{u}x)| = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \ \textit{при}\, x \to \infty,$$

то для них справедлива оценка

$$\|(\bar{u}\nabla)\bar{v}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \leq c_* \|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}, \tag{13}$$

где c_**—константа, зависящая от параметров* r*,* δ *и гладкости границы области.*

Доказательство леммы 3 имеется в[8].

2. Схема доказательства теоремы 1

1. Построение последовательности приближений.
2. Доказательство сходимости последовательности приближений.
3. Доказательство разрешимости задачи (2), (3).
4. Доказательство единственности решения задачи (2), (3).

1. Преобразуем для начала уравнение (2). Вычислим div $\left[\zeta(|S(\bar{v})|^2)S(\bar{v})\right]$

$$\begin{aligned}
&\text{div } \left[\zeta(|S(\bar{v})|^2)S(\bar{v})\right] = \{\sum_{j=1}^{3} \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\zeta(|S(\bar{v})|^2)S_{ij}\right]\}_{i=1}^3 = \\
&= \{\sum_{j=1}^{3}[\zeta'(|S(\bar{v})|^2)(\tfrac{\partial}{\partial x_j}|S(\bar{v})|^2)S_{ij} + \zeta(|S(\bar{v})|^2)\tfrac{\partial}{\partial x_j}S_{ij}]\}_{i=1}^3 = \\
&= \{\sum_{j=1}^{3}[\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\tfrac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k,m} S^2_{km}S_{ij} + \zeta(|S(\bar{v})|^2)\left(\tfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \tfrac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)]\}_{i=1}^3 = \\
&= \{\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m} 2S_{km}\tfrac{\partial S_{km}}{\partial x_j}S_{ij} + \zeta(|S(\bar{v})|^2)[\sum_j \tfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \tfrac{\partial}{\partial x_i}\sum_j \tfrac{\partial v_j}{\partial x_j}]\}_{i=1}^3 = \\
&= \{2\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}S_{ij}\tfrac{\partial S_{km}}{\partial x_j} + \zeta(|S(\bar{v})|^2)[\Delta v_i + \tfrac{\partial}{\partial x_i}\text{div } \bar{v}]\}_{i=1}^3 = \\
&= \{2\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}S_{ij}\tfrac{\partial S_{km}}{\partial x_j} + \zeta(|S(\bar{v})|^2)\Delta v_i\}_{i=1}^3 = \\
&= \{2\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}S_{ij}\tfrac{\partial S_{km}}{\partial x_j}\}_{i=1}^3 + \zeta(|S(\bar{v})|^2)\Delta\bar{v}
\end{aligned}$$

Перепишем уравнение (2) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}
&-\nu\Delta\bar{v} - \nu\Delta\bar{v}\zeta(|S(\bar{v})|^2) + \sum_{k=1}^{3} v_k\tfrac{\partial\bar{v}}{\partial x_k} - \\
&-2\nu\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{v})S_{km}(\bar{v})\tfrac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} + \nabla p = \bar{f}.
\end{aligned}$$

Построим последовательность приближений следующим образом: пусть ($\bar{v}^o$, p^o) - решение системы Стокса

$$-\nu\Delta\bar{v}^0 + \nabla p^0 = \bar{f}, \quad \text{div } \ \bar{v}^0 = 0 \quad \text{в} \ \ \Omega, \tag{14}$$

с граничными условиями

$$\bar{v}^0|_\Gamma = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\bar{v}^0(x) = 0. \tag{15}$$

Приближение $(\bar{v}^1, p^1)$ есть решение линейной задачи

$$-\nu\Delta\bar{v}^1 + \nabla p^1 = \bar{f} + \nu\Delta\bar{v}^0\zeta(|S(\bar{v}^0)|^2) - \sum_{k=1}^{3} v_k^0\frac{\partial\bar{v}^0}{\partial x_k} +$$

$$+2\nu\zeta'(|S(\bar v^0)|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar v^0)S_{ij}(\bar v^0)\frac{\partial S_{km}(\bar v^0)}{\partial x_j}\equiv \bar g_1,$$

$$\operatorname{div}\bar v^1(x)=0 \ \text{ в } \ \Omega,$$

с граничными условиями

$$\bar v^1(x)|_\Gamma=0,\quad \lim_{x\to\infty}\bar v^1(x)=0.$$

Приближение $(\bar v^n, p^n)$ есть решение соответствующей задачи

$$-\nu\Delta\bar v^n+\nabla p^n=\bar f+\nu\Delta\bar v^{n-1}\zeta(|S(\bar v^{n-1})|^2)-\sum_{k=1}^3 v_k^{n-1}\frac{\partial\bar v^{n-1}}{\partial x_k}+$$

$$+2\nu\zeta'(|S(\bar v^{n-1})|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar v^{n-1})S_{ij}(\bar v^{n-1})\frac{\partial S_{km}(\bar v^{n-1})}{\partial x_j}\equiv\bar g_n, \tag{16}$$

$$\operatorname{div}\bar v^n(x)=0 \quad \text{в} \ \ \Omega,$$

с граничными условиями

$$\bar v^n(x)|_\Gamma=0,\quad \lim_{x\to\infty}\bar v^n(x)=0. \tag{17}$$

По утверждению теоремы 2 существует единственное решение задачи (14), (15) и

$$\bar v^0\in H_\delta^{2,r}(\Omega),\quad p^0\in H_{\delta+1}^{1,r}(\Omega),$$
$$\bar v^0(x)=O\left(\tfrac{1}{|x|}\right),\quad p^0(x)=O\left(\tfrac{1}{|x|^2}\right)\quad \text{при } x\to\infty$$

и

$$\|\bar v^0\|_{H_\delta^{2,r}(\Omega)}+\|p^0\|_{H_{\delta+1}^{1,r}(\Omega)}\le c\|\bar f\|_{L_{\delta+2}^r(\Omega)},$$

где константа c зависит от области Ω и параметров r и δ.

Аналогично существует единственное решение задачи (16), (17) и

$$\bar v^n\in H_\delta^{2,r}(\Omega),\quad p^n\in H_{\delta+1}^{1,r}(\Omega),$$
$$\bar v^n(x)=O\left(\tfrac{1}{|x|}\right),\quad p^n(x)=O\left(\tfrac{1}{|x|^2}\right)$$

и имеет место оценка

$$\|\bar v^n\|_{H_\delta^{2,r}(\Omega)}+\|p^n\|_{H_{\delta+1}^{1,r}(\Omega)}\le c\|\bar g_n\|_{L_{\delta+2}^r(\Omega)}.$$

Таким образом, все последовательные приближения $\{(\bar v^n,p^n)\}_{n=0}^\infty$ существуют,

$$\bar v^n(x)=O\left(\frac{1}{|x|}\right),\quad p^n(x)=\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\quad \text{при } x\to\infty$$

и справедлива оценка

$$\|\bar v^n\|_{H_\delta^{2,r}(\Omega)}+\|p^n\|_{H_{\delta+1}^{1,r}(\Omega)}\le c\|\bar g_n\|_{L_{\delta+2}^r(\Omega)},\quad \forall\, n=0,1,\ldots.$$

Легко показать, что все последовательные приближения $\{\bar{v}^n, p^n\}_{n=0}^{\infty}$ лежат в сфере фиксированного радиуса в пространстве $H_{\delta}^{2,r}(\Omega) \times H_{\delta+1}^{1,r}(\Omega)$ при условии, что норма $\|\bar{f}\|_{L_{\delta+2}^r(\Omega)}$ достаточно мала.

Используя оценки решений линейной задачи (7), (6) можно доказать, что для всех последовательных приближений $\{(\bar{v}^n, p^n)\}_{n=0}^{\infty}$ оценка

$$\|\bar{v}^n\|_{H_{\delta}^{2,r}(\Omega)} + \|p^n\|_{H_{\delta+1}^{1,r}(\Omega)} \le R = c\|\bar{f}\|_{L_{\delta+2}^r(\Omega)},$$

справедлива при одной и той же константе c для всех приближений $\{(\bar{v}^n, p^n)\}_{n=0}^{\infty}$. Эта константа зависит от области Ω, параметров r и δ.

2. Доказательство сходимости последовательности приближений $\{(\bar{v}^n, p^n)\}_{n=0}^{\infty}$.

Докажем, что последовательность приближений является фундаментальной, то есть

$$\|\bar{v}^n - \bar{v}^m\|_{H_{\delta}^{2,r}(\Omega)} + \|p^n - p^m\|_{H_{\delta+1}^{1,r}(\Omega)} \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Приближение $(\bar{v}^m, p^m)$ есть решение линейной задачи

$$-\nu\Delta\bar{v}^m + \nabla p^m = \bar{f} + \nu\Delta\bar{v}^{m-1}\zeta(|S(\bar{v}^{m-1})|^2) - \sum_{k=1}^{3} v_k^{m-1}\frac{\partial\bar{v}^{m-1}}{\partial x_k} +$$

$$+2\nu\zeta'(|S(\bar{v}^{m-1})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}(\bar{v}^{m-1})S_{ij}(\bar{v}^{m-1})\frac{\partial S_{km}(\bar{v}^{m-1})}{\partial x_j} \equiv \bar{g}_m,$$

$$\operatorname{div}\bar{v}^m(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega$$

с граничными условиями

$$\bar{v}^m(x)|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\bar{v}^m(x) = 0.$$

Тогда $(\bar{v}^n - \bar{v}^m, p^n - p^m)$ удовлетворяет системе уравнений

$$-\nu\Delta(\bar{v}^n - \bar{v}^m) + \nabla(p^n - p^m) = \nu\Delta\bar{v}^{n-1}\zeta(|S(\bar{v}^{n-1})-$$

$$-\nu\Delta\bar{v}^{m-1}\zeta(|S(\bar{v}^{m-1})|^2) - \sum_{k=1}^{3} v_k^{n-1}\frac{\partial\bar{v}^{n-1}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{3} v_k^{m-1}\frac{\partial\bar{v}^{m-1}}{\partial x_k} +$$

$$+2\nu\zeta'(|S(\bar{v}^{n-1})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}(\bar{v}^{n-1})S_{ij}(\bar{v}^{n-1})\frac{\partial S_{km}(\bar{v}^{n-1})}{\partial x_j} -$$

$$-2\nu\zeta'(|S(\bar{v}^{m-1})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}(\bar{v}^{m-1})S_{ij}(\bar{v}^{m-1})\frac{\partial S_{km}(\bar{v}^{m-1})}{\partial x_j},$$

$$\operatorname{div}\ (\bar{v}^n - \bar{v}^m) = 0 \quad \text{в}\ \Omega$$

с граничными условиями

$$(\bar{v}^n - \bar{v}^m)|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}(\bar{v}^n - \bar{v}^m) = 0.$$

Используя утверждение теоремы 2, свойства (1) функции $\zeta(t)$ и леммы 1, 2, 3, оценим норму разности

$$\|\bar v^n - \bar v^m\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|p^n - p^m\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\|\bar v^n - \bar v^m\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|p^n - p^m\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)} \le \mu \|\bar v^{n-1} - \bar v^{m-1}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)},$$

где константа

$$\mu = c\left(36\nu M_1 c^4 \|\bar f\|^2_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} + 4cc_* \|\bar f\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} + 64\nu M_2 c^8 \|\bar f\|^4_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}\right),$$

с—константа из теоремы 2, c_*—константа из леммы 3, зависящая от параметров r, δ и гладкости границы области Ω. При условии, что норма $\|\bar f\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}$ достаточно мала, константа $\mu < 1$.

Пусть $n > m$. Используя аналогичные рассуждения для нормы разности

$$\|\bar v^{n-1} - \bar v^{m-1}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|p^{n-1} - p^{m-1}\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)}$$

мы получаем оценку

$$\|\bar v^n - \bar v^m\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|p^n - p^m\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)} \le \mu^m \|\bar v^{n-m} - \bar v^0\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)},$$

где $\mu < 1$.

Так как $\mu < 1$, получаем

$$\|\bar v^n - \bar v^m\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|p^n - p^m\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)} \to 0, \quad n, m \to \infty$$

при условии, что норма $\|\bar f\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}$ достаточно мала. Таким образом, последовательность $\{\bar v^n, p^n\}_{n=0}^\infty$ имеет предел $(\bar v, p)$ в пространстве $H^{2,r}_\delta(\Omega) \times H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)$ в силу полноты весовых пространств Соболева.

3. Доказательство разрешимости задачи (2), (3).

Докажем, что предел последовательности $\{(\bar v^n, p^n)\}_{n=0}^\infty$ является решением задачи (2),(3) из пространства

$$H^{2,r}_\delta(\Omega) \times H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega).$$

Рассмотрим задачу

$$-\nu\Delta \bar v^n + \nabla p^n = \bar f + \nu \Delta \bar v^{n-1} \zeta(|S(\bar v^{n-1})|^2) - \sum_{k=1}^3 \bar v_k^{n-1} \frac{\partial \bar v^{n-1}}{\partial x_k} +$$

$$+2\nu\zeta'(|S(\bar v^{n-1})|^2) \sum_{j,k,m} S_{km}(\bar v^{n-1}) S_{ij}(\bar v^{n-1}) \frac{\partial S_{km}(\bar v^{n-1})}{\partial x_j}, \tag{18}$$

$$\operatorname{div} \bar v^n(x) = 0 \quad \text{в } \Omega$$

с нулевыми граничными условиями

$$\bar{v}^n(x)|_\Gamma = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \bar{v}^n(x) = 0. \tag{19}$$

Перейдем к пределу в (18) при $n \to \infty$.

Мы доказали, что

$$\{(\bar{v}^n, p^n)\} \to (\bar{v}, p) \quad \text{в} \quad H^{2,r}_\delta(\Omega) \times H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega),$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \|\bar{v}^n - \bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|p^n - p\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)} = 0. \tag{20}$$

Докажем, что $\Delta\bar{v}^n \to \Delta\bar{v}$ при $n \to \infty$ в пространстве $L^r_{\delta+2}(\Omega)$.

Рассмотрим норму разности $\|\Delta\bar{v}^n - \Delta\bar{v}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}$.

$$\|\Delta\bar{v}^n - \Delta\bar{v}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\Delta\bar{v}^n - \Delta\bar{v}|^r (1+|x|^2)^{\frac{(\delta+2)r}{2}} dx\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\int\limits_\Omega |\Delta(\bar{v}^n - \bar{v})|^r (1+|x|^2)^{\frac{(\delta+2)r}{2}}\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \|(\bar{v}^n - \bar{v})\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Следовательно, $\|\Delta\bar{v}^n - \Delta\bar{v}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \to 0, \quad n \to \infty$, то есть $\Delta\bar{v}^n \to \Delta\bar{v}, \quad n \to \infty$.

Докажем, что $\Delta\bar{v}^n\zeta\Big(|S(\bar{v}^n)|^2\Big) \to \Delta\bar{v}\zeta\Big(|S(\bar{v})|^2\Big), n \to \infty$ в пространстве $L^r_{\delta+2}(\Omega)$.

Рассмотрим норму разности

$$\|\Delta\bar{v}^n\zeta\Big(|S(\bar{v}^n)|^2\Big) - \Delta\bar{v}\zeta\Big(|S(\bar{v})|^2\Big)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} = \|\Delta\bar{v}^n\zeta\Big(|S(\bar{v}^n)|^2\Big) -$$

$$-\Delta\bar{v}^n\zeta\Big(|S(\bar{v})|^2\Big)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} + \Delta\bar{v}^n\zeta\Big(|S(\bar{v})|^2\Big) - \Delta\bar{v}\zeta\Big(|S(\bar{v})|^2\Big)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \le$$

$$\le \|\Delta\bar{v}^n\left(\zeta\Big(|S(\bar{v}^n)|^2\Big) - \zeta\Big(|S(\bar{v})|^2\Big)\right)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} +$$

$$+\|(\Delta\bar{v}^n - \Delta\bar{v})\zeta\Big(|S(\bar{v})|^2\Big)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \equiv V_1 + V_2.$$

Для оценки V_1 применим теорему Лагранжа к функции $\zeta(t)$, предположение об ограниченности $\zeta^{'}(t)$ и лемму 2

$$V_1 = \|\Delta\bar{v}^n\left(\zeta\Big(|S(\bar{v}^n)|^2\Big) - \zeta\Big(|S(\bar{v})|^2\Big)\right)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \le$$

$$\le \left\|\Delta\bar{v}^n\zeta^{'}(\theta)\left(|S(\bar{v}^n)|^2 - |S(\bar{v})|^2\right)\right\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \le$$

$$\le M_1\|\Delta\bar{v}^n\Big(S_{km}(\bar{v}^n) - S_{km}(\bar{v})\Big)\Big(S_{km}(\bar{v}^n) + S_{km}(\bar{v})\Big)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \le$$

$$\le M_1\|\Delta\bar{v}^n S_{km}(\bar{v}^n - \bar{v}) S_{km}(\bar{v}^n + \bar{v})\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \le$$

$$\leq M_1 c^2 \|\bar v^n\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar v^n - \bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar v^n + \bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \|\bar v^n - \bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} V_1 = 0$.

Докажем, что $V_2 \to 0 \quad$ при $n \to \infty$.

$$V_2 = \|(\Delta\bar v^n - \Delta\bar v)\zeta\Big(|S(\bar v)|^2\Big)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} = \|\Delta(\bar v^n - \bar v)\zeta\Big(|S(\bar v)|^2\Big)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \leq$$

$$\leq M\|\Delta(\bar v^n - \bar v)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \to 0,$$

так как $\Delta\bar v^n \to \Delta\bar v, \quad n\to\infty$.

В результате получаем

$$\Delta\bar v^n\zeta\Big(|S(\bar v^n)|^2\Big) \to \Delta\bar v\zeta\Big(|S(\bar v)|^2\Big), \quad n\to\infty$$

в пространстве $L^r_{\delta+2}(\Omega)$.

Докажем теперь, что при $n\to\infty$

$$\zeta'(|S(\bar v^n)|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar v^n)S_{km}(\bar v^n)\frac{\partial S_{km}(\bar v^n)}{\partial x_j} \to \tag{21}$$

$$\to \zeta'(|S(\bar v)|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar v)S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}.$$

Для доказательства (21) воспользуемся свойствами (1), леммами 1 и 2 и в результате получим оценку для нормы разности

$$\begin{aligned}&\Big\|\zeta'(|S(\bar v^n)|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar v^n)S_{km}(\bar v^n)\tfrac{\partial S_{km}(\bar v^n)}{\partial x_j} - \\ &-\zeta'(|S(\bar v)|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar v)S_{km}(\bar v)\tfrac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}\Big\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \leq \\ &\leq\ \mathrm{const}\|\bar v^n - \bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\end{aligned}$$

Так как $\|\bar v^n - \bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \to 0$, то (21) выполняется.

Докажем теперь сходимость $(\bar v^n\nabla)\bar v^n \to (\bar v\nabla)\bar v, n\to\infty$ в пространстве $L^r_{\delta+2}(\Omega)$.

Рассмотрим норму разности

$$\begin{aligned}&\|(\bar v^n\nabla)\bar v^n - (\bar v\nabla)\bar v\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} = \\ &= \|(\bar v^n\nabla)\bar v^n - (\bar v^n\nabla)\bar v + (\bar v^n\nabla)\bar v - (\bar v\nabla)\bar v\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \leq \\ &\leq \|(\bar v^n\nabla)(\bar v^n - \bar v)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} + \|((\bar v^n - \bar v)\nabla)\bar v\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \equiv K_1 + K_2.\end{aligned}$$

Для оценки K_1 используем лемму 3

$$\begin{aligned}&\|(\bar v^n\nabla)(\bar v^n - \bar v)\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \leq \\ &\leq c_*\|\bar v^n\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar v^n - \bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \to 0, \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

так как $\|\bar v^n - \bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \to 0, \quad n\to\infty$.

Аналогично $K_2 = \|((\bar v^n - \bar v)\nabla)\bar v\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} \to 0, \quad n\to\infty$.

Это означает, что $(\bar v^n\nabla)\bar v^n \to (\bar v\nabla)\bar v, \quad n\to\infty$ в пространстве $L^r_{\delta+2}(\Omega)$.

Таким образом, пара $(\bar{v}, p)$ является решением задачи в пространстве $H^{2,r}_{\delta}(\Omega) \times H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)$.

4. Единственность решения задачи (2), (3) доказывается методом, примененным Р. Финном для уравнений Навье - Стокса в [2].

Пусть есть два решения задачи (2), (3)

$$(\bar{v}, p) \quad \text{и } (\bar{u}, q),$$

такие что пара $(\bar{v}, p)$ есть решение задачи

$$-\nu\Delta\bar{v} - \nu\Delta\bar{v}\zeta(|S(\bar{v})|^2) + (\bar{v}\nabla)\bar{v} -$$

$$-2\nu\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}(\bar{v})S_{ij}(\bar{v})\frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} + \nabla p = \bar{f},$$

$$\operatorname{div}\bar{v}(x) = 0 \quad \text{в } \Omega$$

с граничными условиями

$$\bar{v}(x)|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\bar{v}(x) = 0,$$

и

$$\bar{v} \in H^{2,r}_{\delta}(\Omega), \quad p \in H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega),$$
$$\bar{v}(x) = O\left(\tfrac{1}{|x|}\right), \quad p(x) = O\left(\tfrac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Пара $(\bar{u}, q)$ есть решение задачи

$$-\nu\Delta\bar{u} - \nu\Delta\bar{u}\zeta(|S(\bar{u})|^2) + (\bar{u}\nabla)\bar{u} -$$

$$-2\nu\zeta'(|S(\bar{u})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}(\bar{u})S_{ij}(\bar{u})\frac{\partial S_{km}(\bar{u})}{\partial x_j} + \nabla q = \bar{f},$$

$$\operatorname{div}\ \bar{u}(x) = 0 \quad \text{в } \Omega$$

с нулевыми граничными условиями

$$\bar{u}(x)|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\bar{u}(x) = 0,$$

и

$$\bar{u} \in H^{2,r}_{\delta}(\Omega), \quad q \in H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega),$$
$$\bar{u}(x) = O\left(\tfrac{1}{|x|}\right), \quad q(x) = O\left(\tfrac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Пусть $\bar{w}(x) = \bar{v}(x) - \bar{u}(x), s = p - q$.

Тогда $(\bar{w}, s)$ удовлетворяет системе уравнений

$$-\nu\Delta\bar{w} - \nu\Delta\bar{v}\zeta(|S(\bar{v})|^2) + \nu\Delta\bar{u}\zeta(|S(\bar{u})|^2) + (\bar{v}\nabla)\bar{v} -$$

$$-(\bar{u}\nabla)\bar{u} - 2\nu\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m} S_{km}(\bar{v})S_{ij}(\bar{v})\frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} + \tag{22}$$

$$+2\nu\zeta'(|S(\bar{u})|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar{u})S_{ij}(\bar{u})\frac{\partial S_{km}(\bar{u})}{\partial x_j}+\nabla s=0,$$

$$\operatorname{div}\ \bar{w}(x)=0 \quad \text{в } \Omega$$

с граничными условиями

$$\bar{w}(x)|_\Gamma=0, \quad \lim_{x\to\infty}\bar{w}(x)=0$$

и

$$\bar{w}(x)=O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad s(x)=O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{при } x\to\infty.$$

В силу линейности пространств $H^{2,r}_\delta(\Omega)$

$$\bar{w}\in H^{2,r}_\delta(\Omega), \quad s\in H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega).$$

Докажем, что $\bar{w}\equiv 0$ в Ω. Домножим обе части уравнения (22) на $\bar{w}(x)$ и проинтегрируем по области E_R, ограниченной поверхностью Γ и большой сферой Σ_R радиуса R. В результате получаем

$$\begin{gathered}
-\nu\int\limits_{E_R}\Delta\bar{w}\cdot\bar{w}\,dx-\int\limits_{E_R}\nu\Delta\bar{v}\zeta(|S(\bar{v})|^2)\cdot\bar{w}\,dx+\\
+\int\limits_{E_R}\nu\Delta\bar{u}\zeta(|S(\bar{u})|^2)\cdot\bar{w}\,dx+\int\limits_{E_R}\Bigl((\bar{v}\nabla)\bar{v}\cdot\bar{w}-(\bar{u}\nabla)\bar{u}\cdot\bar{w}\Bigr)dx-\\
-2\nu\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\left\{\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar{v})S_{ij}(\bar{v})\frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j}\right\}_i\cdot w_i\,dx+ \qquad (23)\\
+2\nu\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\left\{\zeta'(|S(\bar{u})|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar{u})S_{ij}(\bar{u})\frac{\partial S_{km}(\bar{u})}{\partial x_j}\right\}_i\cdot w_i\,dx+\\
+\int\limits_{E_R}\nabla s\cdot\bar{w}\,dx=0
\end{gathered}$$

Преобразуем интегралы из левой части соотношения (23).

С помощью интегрирования по частям

$$\int\limits_{E_R}\nu\Delta\bar{w}\cdot\bar{w}\,dx=\nu\int\limits_{E_R}\sum_i\Delta w_i w_i\,dx=\nu\int\limits_{E_R}\sum_i\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2}w_i\right)dx=$$

$$=-\nu\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+\nu\int\limits_{\Gamma\cup\Sigma_R}\sum_{i,j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\cos(\bar{n},x_j)\,d\sigma,$$

где $\bar{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе области E_R.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{E_R} \Big((\bar{v}\nabla)\bar{v} - (\bar{u}\nabla)\bar{u}) \cdot \bar{w} \Big)\, dx = \\
&= \int\limits_{E_R} \Big((\bar{v}\nabla)\bar{v} - (\bar{u}\nabla)\bar{v} + (\bar{u}\nabla)\bar{v} - (\bar{u}\nabla)\bar{u} \Big) \cdot \bar{w}\, dx = \\
&= \int\limits_{E_R} \Big(((\bar{v} - \bar{u})\nabla)\bar{v} + (\bar{u}\nabla)(\bar{v} - \bar{u}) \Big) \cdot \bar{w}\, dx = \\
&= \int\limits_{E_R} \Big((\bar{w}\nabla)\bar{v} + (\bar{u}\nabla)\bar{w} \Big) \cdot \bar{w}\, dx = \\
&= \int\limits_{E_R} \Big((\bar{w}\nabla)\bar{v} \Big) \cdot \bar{w}\, dx + \int\limits_{E_R} \Big((\bar{u}\nabla)\bar{w} \Big) \cdot \bar{w}\, dx \equiv G_1 + G_2
\end{aligned}$$

Вычислим интеграл G_1, пользуясь формулой интегрирования по частям

$$\int\limits_{E_R} (\bar{w}\nabla)\bar{v}) \cdot \bar{w}\, dx = \sum_{j,k} \int\limits_{E_R} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} w_k w_j\, dx =$$

$$= -\sum_{j,k} \int\limits_{E_R} \big(w_j \frac{\partial w_k}{\partial x_k} v_j + v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_k} w_k \big)\, dx + \int\limits_{\Gamma \cup \Sigma_R} w_k v_j w_j \cos(\bar{n}, x_k)\, d\sigma =$$

$$= -\int\limits_{E_R} \sum_{j,k} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} w_k v_j\, dx + \sum_{j,k} \int\limits_{\Sigma_R} w_j w_k v_j \cos(\bar{n}, x_k)\, d\sigma, \tag{24}$$

так как интеграл по поверхности Γ равен нулю и

$$\operatorname{div}\, \bar{w} = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Проведем аналогичные рассуждения для интеграла G_2.

$$\begin{aligned}
&G_2 = \int\limits_{E_R} (\bar{u}\nabla\bar{w}) \cdot \bar{w}\, dx = \sum_j \int\limits_{E_R} \big(\sum_{k=1}^{3} \tfrac{\partial w_j}{\partial x_k} u_k \big) w_j\, dx = \\
&= -\sum_{j,k} \int\limits_{E_R} \big(w_j^2 \tfrac{\partial u_k}{\partial x_k} + w_j \tfrac{\partial w_j}{\partial x_k} u_k \big)\, dx + \int\limits_{\Gamma \cup \Sigma_R} w_j u_k w_j \cos(\bar{n}, x_k)\, d\sigma = \\
&= -\int\limits_{E_R} \sum_{j,k} \tfrac{\partial w_j}{\partial x_k} u_k w_j\, dx + \int\limits_{\Sigma_R} |\bar{w}|^2 \bar{u} \cdot \bar{n}\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Тогда

$$G_2 = \int\limits_{E_R} (\bar{u}\nabla\bar{w}) \cdot \bar{w}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_R} |\bar{w}|^2 \bar{u} \cdot \bar{n}\, d\sigma. \tag{25}$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_{E_R} \nabla s \cdot \bar{w}\, dx = \int\limits_{E_R} \sum_i \frac{\partial s}{\partial x_i} w_i\, dx = -\int\limits_{E_R} \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i} s\, dx + \tag{26}$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_R \cup \Gamma} \sum_i s w_i \cos(\bar{n}, x_i)\, d\sigma = \int\limits_{\Sigma_R} \sum_i s w_i \cos(\bar{n}, x_i)\, d\sigma,$$

так как div $\bar{w}=0$ в Ω, $\bar{w}|_\Gamma=0$.

Подставим выражения для интегралов из (24), (25), (26) в соотношение (23). В результате получим

$$\nu\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx-\nu\int\limits_{\Gamma\cup\Sigma_R}\sum_{i,j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\cos(\bar{n},x_j)\,d\sigma-\int\limits_{E_R}\sum_{j,k}\frac{\partial w_j}{\partial x_k}w_kv_j\,dx+$$

$$+\sum_{j,k}\int\limits_{\Sigma_R}w_jw_kv_j\cos(\bar{n},x_k)\,d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_R}|\bar{w}|^2\bar{u}\cdot\bar{n}\,d\sigma+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_R}\sum_i sw_i\cos(\bar{n},x_i)\,d\sigma-\nu\int\limits_{E_R}\Bigg(\Delta\bar{v}\zeta(|S(\bar{v})|^2)-\Delta\bar{u}\zeta(|S(\bar{u})|^2)\Bigg)\cdot\bar{w}\,dx-$$

$$-2\nu\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\Bigg\{\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar{v})S_{ij}(\bar{v})\frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j}-$$

$$-\zeta'(|S(\bar{u})|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar{u})S_{ij}(\bar{u})\frac{\partial S_{km}(\bar{u})}{\partial x_j}\Bigg\}_i\cdot w_i\,dx=0$$

или, что то же самое

$$\nu\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx=\nu\int\limits_{\Gamma\cup\Sigma_R}\sum_{i,j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\cos(\bar{n},x_j)\,d\sigma+\int\limits_{E_R}\sum_{j,k}\frac{\partial w_j}{\partial x_k}w_kv_j\,dx-$$

$$-\sum_{j,k}\int\limits_{\Sigma_R}w_jw_kv_j\cos(\bar{n},x_k)\,d\sigma-\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_R}|\bar{w}|^2\bar{u}\cdot\bar{n}\,d\sigma-\int\limits_{\Sigma_R}\sum_i sw_i\cos(\bar{n},x_i)\,d\sigma+$$

$$+\nu\int\limits_{E_R}\Bigg(\Delta\bar{v}\zeta(|S(\bar{v})|^2)-\Delta\bar{u}\zeta(|S(\bar{u})|^2)\Bigg)\cdot\bar{w}\,dx+\tag{27}$$

$$+2\nu\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\Bigg\{\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar{v})S_{ij}(\bar{v})\frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j}-$$

$$-\zeta'(|S(\bar{u})|^2)\sum_{j,k,m}S_{km}(\bar{u})S_{ij}(\bar{u})\frac{\partial S_{km}(\bar{u})}{\partial x_j}\Bigg\}_i\cdot w_i\,dx$$

Докажем, что все поверхностные интегралы в правой части сотношения (27) стремятся к нулю при $R\to\infty$.

Так как $\bar{w}|_\Gamma=0$, то в первом интеграле правой части (27) интегрирование ведется по большой сфере Σ_R. Для его оценки применим предположение о том, что

$$\bar{w}(x)=O\Bigg(\frac{1}{|x|}\Bigg)\quad\text{при } x\to\infty.$$

Тогда

$$\bar{w}(x) \le \frac{c_0}{|x|}$$

и

$$\nabla \bar{w}(x) \le \frac{c_0}{|x|^2}.$$

Это означает, что на сфере Σ_R справедливо неравенство

$$|(\bar{w}\nabla)\bar{w}| \le \frac{c_0^2}{R^3}.$$

Таким образом, верна оценка

$$\int\limits_{\Sigma_R} \sum_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_i \cos(\bar{n}, x_j)\, d\sigma \le \frac{c_0^2}{R^3} 4\pi R^2 = \frac{4\pi c_0^2}{R} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Для оценки третьего интеграла по поверхности Σ_R из правой части (27) вновь используем предположение о том, что

$$\bar{w}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \bar{v}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{при } x \to \infty.$$

Тогда на сфере Σ_R

$$|w_j w_k v_j| \le \frac{c_0^3}{R^3}$$

и интеграл по сфере Σ_R оценивается величиной

$$\left| \sum_{j,k} \int\limits_{\Sigma_R} w_j w_k v_j \cos(\bar{n}, x_k)\, d\sigma \right| \le \frac{4\pi R^2 c_0^2}{R^3} = \frac{4\pi c_0^2}{R} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Оценим второй интеграл из правой части (27).

$$\left| \int\limits_{E_R} \sum_{j,k} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} w_k v_j\, dx \right| \le \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}||\bar{w}||\bar{v}|\, dx \tag{28}$$

Для оценки третьего сомножителя в последнем интеграле неравенства (28) используем предположение теоремы

$$|\bar{v}(x)| = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Тогда $|\bar{v}| \le \frac{c_0}{|x|}$ при больших $|x|$.

Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\Big| \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}||\bar{w}||\bar{v}|\, dx \Big|^2 < c_0^2 \Big| \int\limits_{E_R} |x|^{-1} |\nabla \bar{w}||\bar{w}|\, dx \Big|^2 <$$

$$< c_0^2 \int\limits_{E_R} |x|^{-2}|\bar{w}|^2\,dx \cdot \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2\,dx$$

Для оценки первого интеграла в последнем соотношении применим неравенство Р. Финна (10).

В результате справедлива оценка

$$\int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}||\bar{w}||\bar{v}|\,dx \le 2\sqrt{c_0} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2\,dx.$$

Для оценки четвертого интеграла по поверхности Σ_R из правой части (27) применяем вновь те же рассуждения, что и для первых трех

$$\left| \int\limits_{\Sigma_R} |\bar{w}|^2 \bar{u} \cdot \bar{n}\,d\sigma \right| \le \frac{4\pi R^2 c_0^3}{R^3} = \frac{4\pi c_0^3}{R} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_{\Sigma_R} \sum_i s w_i \cos(\bar{n}, x_i)\,d\sigma. \tag{29}$$

Так как

$$\bar{w}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{при } x \to \infty,$$

$$s(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{при } x \to \infty,$$

то на сфере Σ_R

$$|s\bar{w}| \le \frac{c_0^2}{R^3}.$$

Это означает, что

$$\left| \int\limits_{\Sigma_R} \sum_i s w_i \cos(\bar{n}, x_i)\,d\sigma \right| \le \frac{4\pi R^2 c_0^2}{R^3} = \frac{4\pi c_0^2}{R} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Таким образом, все поверхностные интегралы из правой части (27) стремятся к нулю при $R \to \infty$.

Оценим интегралы по области E_R.

Оценим разность интегралов

$$\int\limits_{E_R} \nu \Delta \bar{v} \zeta(|S(\bar{v})|^2) \cdot \bar{w}\,dx - \int\limits_{E_R} \nu \Delta \bar{u} \zeta(|S(\bar{u})|^2) \cdot \bar{w}\,dx =$$

$$= \nu \int\limits_{E_R} \sum_i [\zeta(|S(\bar{v})|^2)\Delta v_i - \zeta(|S(\bar{u})|^2)\Delta v_i + \zeta(|S(\bar{u})|^2)\Delta v_i -$$

$$-\zeta(|S(\bar{u})|^2)\Delta u_i] w_i\,dx = \nu \int\limits_{E_R} [\zeta(|S(\bar{v})|^2) - \zeta(|S(\bar{u})|^2)] \sum_i \Delta v_i w_i\,dx +$$

$$+\nu \int\limits_{E_R} \zeta(|S(\bar v)|^2) \sum_i \Delta w_i w_i \, dx \equiv \nu(T_1 + T_2)$$

При оценке интеграла T_1 будем использовать предположение об ограниченности функции $\zeta(t)$

$$|T_1| \le \int\limits_{E_R} |\zeta(|S(\bar v)|^2) - \zeta(|S(\bar u)|^2)| |\sum_i \Delta v_i w_i| \, dx =$$

$$= \int\limits_{E_R} |\zeta^{'}(\theta)| \sum_{k,m} S_{km}(\bar w) S_{km}(\bar u + \bar v)| |\sum_i \Delta v_i w_i| \, dx \le$$

$$\le M_1 \sum_{i,k,m} \int\limits_{E_R} |S_{km}(\bar u + \bar v)| |\Delta v_i| |S_{km}(\bar w)| |w_i| \, dx \le$$

$$\le M_1 \int\limits_{E_R} \Big[|\nabla \bar v| + |\nabla \bar u| \Big] |\nabla^2 \bar v| |\nabla \bar w| |\bar w| \, dx =$$

$$= M_1 \Big[\int\limits_{E_R} |\nabla \bar v| |\nabla^2 \bar v| |\nabla \bar w| |\bar w| \, dx + \int\limits_{E_R} |\nabla \bar u| |\nabla^2 \bar v| |\nabla \bar w| |\bar w| \, dx \Big] \equiv$$

$$\equiv M_1 [T_{11} + T_{12}].$$

Оценим T_{11}, используя неравенство, приведенное в [1]

$$\sup_{x \in \Omega} |x|^{\delta + \frac{3}{r}} |\bar u(x)| + \sum_{|\alpha|=1} \sup_{x \in \Omega} |x|^{1+\delta+\frac{3}{r}} |D \bar u(x)| \le c_2 \|\bar u\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}, \tag{30}$$

где константа c_2 зависит от области Ω и параметров r и δ.

Тогда для T_{11} справедливо

$$T_{11} = \int\limits_{E_R} (\varrho^{1+\delta+\frac{3}{r}} |\nabla \bar v|)(\varrho^{-1-\delta-\frac{3}{r}} |\nabla^2 \bar v|) |\nabla \bar w| |\bar w| \, dx \le$$

$$\le c_2 \|\bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \int\limits_{E_R} (\varrho^{-1-\delta-\frac{3}{r}} |\nabla^2 \bar v|) |\nabla \bar w| |\bar w| \, dx,$$

где c_2 — константа из (30).

Оценим последний интеограл, применяя неравенство Гельдера с показателями $2($ к $|\nabla \bar w|), 6($ к $|\bar w|)$ и $3($ к $\varrho^{-1-\delta-\frac{3}{r}} |\nabla^2 \bar v|)$. Получим

$$T_{11} \le c_2 \|\bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \Big(\int\limits_{E_R} \varrho^{-3-3\delta-\frac{9}{r}} |\nabla^2 \bar v|^3 \, dx \Big)^{\frac{1}{3}} \times \tag{31}$$

$$\times \Big(\int\limits_{E_R} |\nabla \bar w|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int\limits_{E_R} |\bar w|^6 \, dx \Big)^{\frac{1}{6}}$$

Используя неравенство Соболева (9), получим из (31)

$$T_{11} \le \frac{2}{\sqrt{3}} c_2 \|\bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla w|^2 \, dx \cdot \left(\int\limits_{E_R} \varrho^{-3-3\delta-\frac{9}{r}} |\nabla^2 \bar v|^3 \, dx \right)^{\frac{1}{3}} \tag{32}$$

Оценим теперь последний интеграл из правой части (32), применяя неравенство Гельдера

$$\int\limits_{E_R} \varrho^{-3-3\delta-\frac{9}{r}} |\nabla^2 \bar v|^3 \, dx = \int\limits_{E_R} \varrho^{-3-3\delta-\frac{9}{r}-a} \cdot (\varrho^a |\nabla^2 \bar v|^3) \, dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_{E_R} \varrho^{-(3+3\delta+\frac{9}{r}+a)\cdot\frac{r}{r-3}} \, dx \right)^{\frac{r-3}{r}} \left(\int\limits_{E_R} (\varrho^{a\frac{r}{3}} |\nabla^2 \bar v|^r) \, dx \right)^{\frac{3}{r}} \tag{33}$$

Положим $a = 3(\delta+2)$. Тогда

$$\left(\int\limits_{E_R} (\varrho^{a\frac{r}{3}} |\nabla^2 \bar v|^r) \, dx \right)^{\frac{3}{r}} \le \|\bar v\|^3_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}.$$

В подынтегральной функции первого сомножителя в правой части (33) показатель равен

$$-(3+3\delta+\frac{9}{r}+3(\delta+2))\frac{r}{r-3} = -[9+\frac{9}{r}+6\delta]\frac{r}{r-3}$$

В условии теоремы 2 параметры r и δ связаны соотношениями

$$-\frac{3}{r} < \delta < 1 - \frac{3}{r}, \quad r > 3.$$

Если $\delta > -\frac{3}{r}$, то

$$[9+\frac{9}{r}+6\delta]\frac{r}{r-3} > [9+\frac{9}{r}-\frac{18}{r}]\frac{r}{r-3} = [9-\frac{9}{r}]\frac{r}{r-3} = \frac{9r-9}{r-3}.$$

Выясним, при каких r последнее выражение больше трех

$$\frac{9r-9}{r-3} > 3, \quad 9r-9 > 3r-9.$$

Последнее неравенство выполняется при всех положительных r, в том числе и при $r > 3$.

Это значит, что интеграл

$$\int\limits_{E_R} \varrho^{-(3+3\delta+\frac{9}{r}+3(\delta+2))\frac{r}{r-3}} \, dx$$

сходится при всех δ из заданного множества, всех $r > 3$ и всех $R > 0$.

В результате получаем

$$T_{11} \le \frac{2}{\sqrt{3}} c_{12} \|\bar v\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \cdot \int\limits_{E_R} |\nabla \bar w|^2 \, dx,$$

где c_1 есть константа, равная интегралу

$$\Big(\int\limits_{\Omega} \varrho^{-(3+3\delta+\frac{9}{r}+3(\delta+2))\frac{r}{r-3}}\,dx\Big)^{\frac{r-3}{r}}. \tag{34}$$

Для оценки интеграла T_{12} вновь применяя последовательно неравенство (30), неравенство Гельдера, получим

$$T_{12} = \int\limits_{E_R} (\varrho^{1+\delta+\frac{3}{r}}|\nabla\bar{u}|)(\varrho^{-1-\delta-\frac{3}{r}}|\nabla^2\bar{v}|)|\nabla\bar{w}||\bar{w}|\,dx \le$$

$$\le c_2\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}(\varrho^{-1-\delta-\frac{3}{r}}|\nabla^2\bar{v}|)|\nabla\bar{w}||\bar{w}|\,dx \le$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{3}}c_{12}\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\cdot\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx,$$

где c_2 — константа из (30).

В результате интеграл T_1 оценивается величиной

$$T_1 \le M_1\Big[\frac{2}{\sqrt{3}}c_{12}\|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\cdot\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}c_{12}\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\cdot\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx\Big].$$

Преобразуем интеграл T_2

$$T_2 = \int\limits_{E_R}\zeta(|S(\bar{v})|^2)\sum_i \Delta w_i w_i\,dx = \int\limits_{E_R}\zeta(|S(\bar{v})|^2)\sum_i\big(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2}w_i\big)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{E_R}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2\zeta(|S(\bar{v})|^2) + \frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\zeta'(|S(\bar{v})|^2)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Gamma\cup\Sigma_R}\sum_{i,j}\zeta(|S(\bar{v})|^2)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\cos(\nu,x_j)\,d\sigma =$$

$$= -\int\limits_{E_R}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2\zeta(|S(\bar{v})|^2)\,dx + \int\limits_{E_R}\sum_{i,j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\frac{\partial}{\partial x_j}\zeta(|S(\bar{v})|^2)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_R}\sum_{i,j}\zeta(|S(\bar{v})|^2)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\cos(\nu,x_j)\,d\sigma \equiv T_{21}+T_{22}+T_{23},$$

интеграл по поверхности Γ равен нулю.

Оценим каждый из полученных интегралов.

$$|T_{21}| = \Big| -\int\limits_{E_R} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2 \zeta(|S(\bar v)|^2)\,dx\Big| \le$$

$$\le \int\limits_{E_R} \Big|\sum_{i,j} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2 \Big| \cdot \big|\zeta(|S(\bar v)|^2)\big|\,dx.$$

По свойствам функции $\zeta(t)$ имеем

$$|\zeta(|S(\bar v)|^2)| \le M_1 c_2^2 \|\bar v\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}.$$

А тогда

$$|T_{21}| \le M_1 c_2^2 \|\bar v\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \int\limits_{E_R} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2 dx =$$

$$= M_1 c_2^2 \|\bar v\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar w|^2\,dx,$$

где c_2 — константа из (30).

Для интеграла T_{22} справедливо

$$T_{22} = \int\limits_{E_R} \sum_{i,j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_i \frac{\partial}{\partial x_j} \zeta(|S(\bar v)|^2)\,dx =$$

$$= \int\limits_{E_R} \sum_{i,j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_i 2\zeta'(|S(\bar v)|^2) \sum_{j,l,m} S_{lj}(\bar v) \frac{\partial S_{lm}(\bar v)}{\partial x_j}\,dx$$

Повторяя для оценки интеграла T_{22} те же рассуждения, что и для интеграла T_{11}, получаем

$$|T_{22}| \le 2M_1 \int\limits_{E_R} |\nabla \bar w||\bar w||\nabla \bar v||\nabla^2 \bar v|\,dx =$$

$$= 2M_1 \int\limits_{E_R} |\nabla \bar w||\bar w|\big(\varrho^{1+\delta+\frac{3}{r}}|\nabla \bar v|\big)\big(\varrho^{-1-\delta-\frac{3}{r}}|\nabla^2 \bar v|\big)\,dx \le$$

$$\le 2M_1 c_2 \|\bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar w||\bar w|\big(\varrho^{-1-\delta-\frac{3}{r}}|\nabla^2 \bar v|\big)\,dx$$

Вновь применяяя неравенство (30), неравенство Гельдера с показателями (2,6,3), получаем

$$|T_{22}| \le \frac{4}{\sqrt{3}} c_1 c_2 M_1 \|\bar v\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \cdot \int\limits_{E_R} |\nabla \bar w|^2\,dx.$$

Поверхностный интеграл T_{23} по сфере Σ_R стремится к нулю в силу ограниченности функции $\zeta(t)$ и предположения

$$\bar{w}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{при } x \to \infty.$$

$$\int\limits_{\Sigma_R} \sum_{i,j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_i \, d\sigma \le 4\pi R^2 \frac{c_0^2}{R^3} = 4\pi \frac{c_0^2}{R} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Тогда для интеграла T_2 справедлива оценка

$$|T_2| \le M_1 c_2^2 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx +$$

$$+\frac{4}{\sqrt{3}} c_1 c_2 M_1 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \cdot \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx + \frac{4\pi c_0^2}{R},$$

причем последнее слагаемое стремится к нулю при $R \to \infty$, c_2 — константа из (30), c_1 есть константа, равная интегралу (34).

Тогда для модуля разности интегралов

$$\left| \int\limits_{E_R} \nu \Delta \bar{v} \zeta(|S(\bar{v})|^2) \cdot \bar{w} \, dx - \int\limits_{E_R} \nu \Delta \bar{u} \zeta(|S(\bar{u})|^2) \cdot \bar{w} \, dx \right|$$

справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{E_R} \nu \Delta \bar{v} \zeta(|S(\bar{v})|^2) \cdot \bar{w} \, dx - \int\limits_{E_R} \nu \Delta \bar{u} \zeta(|S(\bar{u})|^2) \cdot \bar{w} \, dx \right| \le$$

$$\le \nu \left(\frac{2}{\sqrt{3}} M_1 c_1 c_2 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \cdot \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx + \frac{2}{\sqrt{3}} M_1 c_1 c_2 \|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \times \right.$$

$$\times \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx + M_1 c_2^2 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx +$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{3}} c_1 c_2 M_1 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \cdot \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx + \frac{4\pi c_0^2}{R} \right),$$

причем последнее слагаемое стремится к нулю при $R \to \infty$.

При оценке разности следующих интегралов будем использовать предположение об ограниченности первой производной функции $\zeta(t)$, неравенство Гельдера

$$\int\limits_{E_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \zeta'(|S(\bar{v})|^2) \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{v}) S_{km}(\bar{v}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} - \right.$$

$$-\zeta'(|S(\bar u)|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar u)S_{km}(\bar u)\frac{\partial S_{km}(\bar u)}{\partial x_j}\Bigg\}_i\cdot w_i\,dx=$$

$$=\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\Bigg\{\zeta'(|S(\bar v)|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar v-\bar u)S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}+$$

$$+\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar u)\Bigg[\zeta'(|S(\bar v)|^2)S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}-$$

$$-\zeta'(|S(\bar u)|^2)S_{km}(\bar u)\frac{\partial S_{km}(\bar u)}{\partial x_j}\Bigg]\Bigg\}_i\cdot w_i\,dx=$$

$$=\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\Bigg\{\zeta'(|S(\bar v)|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar w)S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}+$$

$$+\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar u)\Bigg(\Bigg[\zeta'(|S(\bar v)|^2)-\zeta'(|S(\bar u)|^2)\Bigg]S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}+$$

$$+\zeta'(|S(\bar u)|^2)\Bigg[S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}-S_{km}(\bar u)\frac{\partial S_{km}(\bar u)}{\partial x_j}\Bigg]\Bigg)\Bigg\}_i\cdot w_i\,dx=$$

$$=\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\Bigg\{\zeta'(|S(\bar v)|^2)\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar w)S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}\Bigg\}_i\cdot w_i\,dx+$$

$$+\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\Bigg\{\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar u)\Bigg[\zeta'(|S(\bar v)|^2)-\zeta'(|S(\bar u)|^2)\Bigg]S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}\Bigg\}_i\cdot w_i\,dx+$$

$$+\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\Bigg\{\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar u)\zeta'(|S(\bar u)|^2)\Bigg[S_{km}(\bar v)\frac{\partial S_{km}(\bar v)}{\partial x_j}-S_{km}(\bar u)\frac{\partial S_{km}(\bar u)}{\partial x_j}\Bigg]\Bigg\}_i\cdot w_i\,dx\equiv$$

$$\equiv T_3+T_4+T_5$$

Оценим интеграл T_3

$$|T_3|\le\int\limits_{E_R}|\zeta'(|S(\bar v)|^2)||\nabla\bar w||\nabla\bar v||\nabla^2\bar v||\bar w|\,dx\le M_1\int\limits_{E_R}|\nabla\bar w||\nabla\bar v||\nabla^2\bar v||\bar w|\,dx.$$

Применяя для интеграла T_3 рассуждения, аналогичные тем, что были использованы при оценке интеграла T_{11}, получаем

$$|T_3|\le\frac{2}{\sqrt3}M_1c_1c_2\|\bar v\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}|\nabla\bar w|^2\,dx,$$

где c_2 — константа из (30).

При оценке интеграла T_4 применим теорему Лагранжа к функции $\zeta'(t)$

$$T_4 = \int\limits_{E_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{u}) \left[\zeta'(|S(\bar{v})|^2) - \zeta'(|S(\bar{u})|^2) \right] S_{km}(\bar{v}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} \right\}_i \cdot w_i \, dx =$$

$$= \int\limits_{E_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{u}) \zeta''(\theta) S_{km}(\bar{w}) S_{km}(\bar{v}+\bar{u}) S_{km}(\bar{v}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} \right\}_i \cdot w_i \, dx,$$

где $\bar{u} < \theta < \bar{v}$, тогда

$$|T_4| \leq \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{u}| |\zeta''(\theta)| |\nabla \bar{w}| |\nabla(\bar{v}+\bar{u})| |\nabla \bar{v}| |\nabla^2 \bar{v}| |\bar{w}| \, dx \leq$$

$$\leq M_2 \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{u}| |\nabla \bar{w}| |\nabla(\bar{v}+\bar{u})| |\nabla \bar{v}| |\nabla^2 \bar{v}| |\bar{w}| \, dx \tag{35}$$

Для первого и третьего сомножителей подынтегральной функции интеграла (35) используем лемму 1. В результате получим

$$|T_4| \leq M_2 c^2 \|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar{u}+\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}| |\nabla \bar{v}| |\nabla^2 \bar{v}| |\bar{w}| \, dx.$$

Вновь используя последовательно для последнего интеграла неравенство (30) и неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$|T_4| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} M_2 c^2 c_1 c_2^3 |\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar{u}+\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} c^2 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \cdot \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx.$$

Для интеграла T_5 справедливо

$$T_5 =$$

$$= \int\limits_{E_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{u}) \zeta'(|S(\bar{u})|^2) \left[S_{km}(\bar{v}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} - S_{km}(\bar{u}) \frac{\partial S_{km}(\bar{u})}{\partial x_j} \right] \right\}_i \cdot w_i \, dx =$$

$$= \int\limits_{E_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{u}) \zeta'(|S(\bar{u})|^2) \left[S_{km}(\bar{v}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} - S_{km}(\bar{u}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + S_{km}(\bar{u}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} - S_{km}(\bar{u}) \frac{\partial S_{km}(\bar{u})}{\partial x_j} \right] \right\}_i \cdot w_i \, dx =$$

$$= \int\limits_{E_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{u}) \zeta'(|S(\bar{u})|^2) \left[S_{km}(\bar{w}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} + S_{km}(\bar{u}) \frac{\partial S_{km}(\bar{w})}{\partial x_j} \right] \right\}_i \cdot w_i \, dx =$$

$$= \int\limits_{E_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{u}) \zeta'(|S(\bar{u})|^2) S_{km}(\bar{w}) \frac{\partial S_{km}(\bar{v})}{\partial x_j} \right\}_i \cdot w_i \, dx +$$

$$+\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar u)\zeta'(|S(\bar u)|^2)S_{km}(\bar u)\frac{\partial S_{km}(\bar w)}{\partial x_j}\right\}_i\cdot w_i\,dx\equiv T_{51}+T_{52}$$

Тогда модуль интеграла T_{51} оценивается как

$$|T_{51}|\le M_1\int\limits_{E_R}|\nabla\bar u||\nabla\bar w||\nabla^2\bar v||\bar w|\,dx.$$

Вновь применяя к последнему интегралу последовательно неравенство (30) и неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$|T_{51}|\le\frac{2}{\sqrt3}M_1c_1c_2\|\bar v\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar u\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_T}|\nabla\bar w|^2\,dx.$$

В интеграле T_{52} проинтегрируем по частям

$$T_{52}=\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar u)\zeta'(|S(\bar u)|^2)S_{km}(\bar u)\frac{\partial S_{km}(\bar w)}{\partial x_j}\right\}_i\cdot w_i\,dx=$$

$$=-\int\limits_{E_R}\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j,k,m}\left[\frac{\partial S_{ij}(\bar u)}{\partial x_j}\zeta'(|S(\bar u)|^2)S_{km}(\bar u)S_{km}(\bar w)\right\}_i w_i+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\left\{S_{ij}(\bar u)\frac{\partial}{\partial x_j}\zeta'(|S(\bar u)|^2)S_{km}(\bar u)S_{km}(\bar w)\right\}_i w_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\left\{S_{ij}(\bar u)\zeta'(|S(\bar u)|^2)\frac{\partial S_{km}(\bar u)}{\partial x_j}S_{km}(\bar w)\right\}_i w_i+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\left\{S_{ij}(\bar u)\zeta'(|S(\bar u)|^2)S_{km}(\bar u)S_{km}(\bar w)\right\}_i\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\Gamma\cup\Sigma_R}\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j,k,m}S_{ij}(\bar u)\zeta'(|S(\bar u)|^2)S_{km}(\bar u)S_{km}(\bar w)\right\}_i w_i\cos(\bar n,x_k)\,d\sigma\equiv$$

$$\equiv T^1_{52}+T^2_{52}+T^3_{52}+T^4_{52}+T^5_{52}$$

Оценим каждый интеграл в отдельности.

$$|T^1_{52}|\le\int\limits_{E_R}|\nabla^2\bar u||\zeta'(|S(\bar u)|^2)||\nabla\bar u||\nabla\bar w||\bar w|\,dx\le$$

$$\le M_1\int\limits_{E_R}|\nabla^2\bar u||\nabla\bar u||\nabla\bar w||\bar w|\,dx\le$$

$$\le\frac{2}{\sqrt3}M_1c_1c_2\|\bar u\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}|\nabla\bar w|^2\,dx,$$

где c_2 — константа из (30), c_1 есть константа, равная интегралу (5). Для интеграла T_{52}^2

$$T_{52}^2 = \int\limits_{E_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta'(|S(\bar{u})|^2)) S_{km}(\bar{u}) S_{km}(\bar{w}) \right\}_i \cdot w_i \, dx$$

справедлива цепочка неравенств

$$|T_{52}^2| \le M_2 \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{u}|^2 |\nabla \bar{w}||\bar{w}| \, dx \le \frac{2}{\sqrt{3}} M_2 c_1 c_2 \|\bar{u}\|^2_{H_\delta^{2,r}(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx.$$

$$|T_{52}^3| \le \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{u}||\zeta'(|S(\bar{u})|^2)||\nabla^2 \bar{u}||\nabla \bar{w}||\bar{w}| \, dx \le$$

$$\le M_1 \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{u}||\nabla^2 \bar{u}||\nabla \bar{w}||\bar{w}| \, dx.$$

Для последнего интеграла используя последовательно неравенство (30) и Гельдера, получаем

$$|T_{52}^3| \le \frac{2}{\sqrt{3}} M_1 c_1 c_2 \|\bar{u}\|^2_{H_\delta^{2,r}(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx$$

$$|T_{52}^4| \le \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{u}|^2 |\zeta^{'}(|S(\bar{u})|^2)||\nabla \bar{w}|^2 \, dx \le M_1 \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{u}|^2 |\nabla \bar{w}|^2 \, dx. \tag{36}$$

Для первого сомножителя подынтегральной функции интеграла (36) используем лемму 1, тогда

$$|T_{52}^4| \le M_1 c^2 \|\bar{u}\|^2_{H_\delta^{2,r}(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx,$$

где c — константа, зависящая от области и параметров r и δ.

Так как $\bar{w}|_\Gamma = 0$, то в интеграле T_{52}^5 интегрирование ведется по сфере Σ_R

$$T_{52}^5 = \int\limits_{\Sigma_R} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j,k,m} S_{ij}(\bar{u}) \zeta'(|S(\bar{u})|^2) S_{km}(\bar{u}) S_{km}(\bar{w}) \cos(\nu, x_k) \right\}_i w_i \, d\sigma.$$

применяя для него предположение о поведении функций на бесконечности, приходим к выводу о том, что при

$$|T_{52}^5| \le \frac{4\pi c_0^4 M_1}{R^2} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

В результате для T_{52} справедлива оценка

$$|T_{52}| \le \frac{2}{\sqrt{3}} M_1 c_1 c_2 \|\bar{u}\|^2_{H_\delta^{2,r}(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx + \frac{2}{\sqrt{3}} M_2 c_1 c_2 \|\bar{u}\|^2_{H_\delta^{2,r}(\Omega)} \int\limits_{E_R} |\nabla \bar{w}|^2 \, dx +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}M_1c_1c_2\|\bar{u}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+M_1c^2\|\bar{u}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+\frac{4\pi c_0^4M_1}{R^2}\leq$$

$$\leq\left(M_1c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}M_1c_1c_2+\frac{2}{\sqrt{3}}M_2c_1c_2\right)\|\bar{u}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+\frac{4\pi c_0^4M_1}{R^2},$$

где c_2 — константа из (30) и c_1 есть константа, равная интегралу (5), последнее слагаемое стремится к нулю при $R\to\infty$.

В результате справедлива оценка для интеграла T_5

$$|T_5|\leq\frac{2}{\sqrt{3}}c_1c_2M_1\|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_T}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+$$

$$+\left(M_1c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}M_1c_1c_2+\frac{2}{\sqrt{3}}M_2c_2c_1\right)\|\bar{u}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+\frac{4\pi c_0^4M_1}{R^2}.$$

Оценив все интегралы из правой части (27), приходим к соотношению

$$\nu\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx\leq\frac{16\pi\nu c_0^2}{R}+\frac{4\pi c_0^3}{R}+\frac{4\pi c_0^4M_1}{R^2}+2\sqrt{c}_0\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\nu M_1c_1c_2\left(\|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}+\|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\right)\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+$$

$$+\nu\left(M_1c_2^2\|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}+\frac{4}{\sqrt{3}}c_1c_2M_1\|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\right)\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\nu M_1c_1c_2\|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\nu M_2c_2^3c_1c^2\|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar{v}+\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx+$$

$$+\nu\Bigg(\frac{2}{\sqrt{3}}c_1c_2M_1\|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}+\bigg(M_1c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}M_1c_2c_1+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}M_2c_2c_1\bigg)\|\bar{u}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}\Bigg)\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx.$$

Заметим, что первые три слагаемых стремятся к нулю при $R\to\infty$.

Перенесем все слагаемые последнего соотношения в левую часть. Без ограничения общности положим $\nu=1$. В результате получаем при $R\to\infty$

$$Q\int\limits_{E_R}|\nabla\bar{w}|^2\,dx\leq 0,$$

где константа Q равна

$$Q = 1 - c_2 c_1 M_1 \frac{2}{\sqrt{3}} \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} - c_2 c_1 M_1 \frac{2}{\sqrt{3}} \|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} - M_1 c_2^2 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_{\delta+2}} -$$
$$-\frac{4}{\sqrt{3}} c_2 c_1 M_1 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} - M_1 c^2 \|\bar{u}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} -$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}} M_2 c_2 c_1 \|\bar{u}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} - \frac{2}{\sqrt{3}} M_1 c_2 c_1 \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} -$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}} M_2 c_2^3 c_1 c^2 \|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar{u}+\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar{v}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} - 2\sqrt{c}_0 -$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}} c_2 c_1 M_1 \|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} - \frac{4}{\sqrt{3}} c_2 c_1 M_1 \|\bar{u}\|^2_{H^{2,r}_\delta(\Omega)}.$$

Доказано, что все приближения лежат в шаре одного радиуса $R = c\|\bar{f}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}$, что означает

$$\|\bar{u}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} \le R = c\|\bar{f}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}$$

Тогда константа Q равна

$$Q = 1 - \frac{16}{\sqrt{3}} c_1 c_2 c^2 M_1 \|\bar{f}\|^2_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} - c^4 M_1 \|\bar{f}\|^2_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} - c^2 c_2^2 M_1 \|\bar{f}\|^2_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} -$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}} M_2 c_1 c_2 c^2 |\bar{f}\|^2_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} - \frac{4}{\sqrt{3}} c^6 c_1 c_2^3 M_2 \|\bar{f}\|^4_{L^r_{\delta+2}(\Omega)} - 2\sqrt{c}_0$$

При условии, что норма $\|\bar{f}\|^2_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}$ достаточно мала и c_0 мало, константа Q будет положительной. А это приводит к противоречию, что и доказывает единственность решения.

Список литературы

[1] W.Borchers, K. Pileckas: Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets. Arch. Rational Mech. Anal. 120 (1992), 1-49.

[2] R. Finn: On the exterior stationary problem for the Navier - Stokes equations, and associated perturbation problems. Archiv for Rational mechanics and analysis. 19 (1965), 363-406.

[3] S. Nazarov, K. Pileckas: On steady Stokes and Navier - Stokes problems with zero velocity at infinity in a three - dimentional exterior domain. Math. Kyoto. Univ. 40 (2000), 475-492.

[4] V. Solonnikov: Solvability of a three-dimensional boundary value problem with a free surface for the stationary Navier-Stokes system. Partial Differential Equations, Banach center publications, 10 (1983), 361-403.

[5] С.Л. Соболев: Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[6] V. Solonnikov: On the problem of a steady fall of a drop in a liquid medium. Jour. Math. Fluid Mech., 1 (1999), 326-355. (in Russian).

[7] I. Mogilevski, I. Zakharova: The stationary flows for a certain type of non-newtonian fluids. Far East J. Appl. Math., 15(2) (2004), 259-277.

[8] Ладыженская О. А.: Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.