УДК 517.9:532.5

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА

Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 04.06.2007, после переработки 09.06.2007.

Доказана теорема о существовании и единственности обобщенного решения краевой задачи для стационарной квазигидродинамической системы в приближении Стокса. Показано, что эта система является эллиптической как по Петровскому, так и по Дуглису–Ниренбергу. Построено ее точное решение в задаче об обтекании масляной капли воздухом, которое лучше описывает эксперимент, чем соответствующее решение классической системы Стокса с граничными условиями максвелловского скольжения.

The theorem on the existence and uniqueness of generalized solution of boundary–value problem for stationary quasi–hydrodynamic system in Stokes approximation is proved. It is shown, that this system has the elliptic type both in the Petrovskiy sence and in the sence of Douglis–Nirenberg. Its exact solution is constructed for the problem on the air flow round the oil drop, that is better describe the experiment, than the corresponding solution of classical Stokes system with Maxwell slip boundary conditions.

Ключевые слова: квазигидродинамические уравнения, приближение Стокса, течение газа вблизи шара.
Keywords: quasi-hydrodynamic equations, Stokes approximation, gas flow in vicinity of sphere.

1. Постановка задачи

На протяжении ряда лет в работах многих авторов [1–3] активно изучались вопросы о существовании, условиях единственности и дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений гидродинамики. Положительные ответы на них позволяли судить о внутренней непротиворечивости и физической адекватности гидродинамических моделей. Анализу сложных нелинейных проблем, как правило, предшествовали исследования краевых задач для соответствующих линеаризованных уравнений. Трудности, связанные с доказательством глобальных теорем о существовании решений трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса явились одним из побудительных мотивов построения альтернативных математических моделей.

Система Стокса представляет собой низкорейнольдсное приближение классических уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости [4]. Она может использоваться для описания медленных изотермических течений ньютоновских сред в окрестности твердых тел. Вопросы существования обобщенных решений различных краевых задач для системы Стокса детально изучены в [1].

Квазигидродинамическая система в приближении Стокса была выведена в книге [5] . Ее можно рассматривать как математическую модель медленных течений слабосжимаемой вязкой жидкости. В стационарном случае эта система имеет вид

$$\operatorname{div}\,\vec{u} = \tau \operatorname{div}\,(\nabla p - \vec{f}), \tag{1}$$

$$\nabla p = \vec{f} + 2\nu \operatorname{div}\,\widehat{\sigma}. \tag{2}$$

Неизвестными величинами в ней являются скорость $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ и давление $p = p(\vec{x})$. Здесь и ниже плотность жидкости положена равной единице, ν – постоянный положительный коэффициент кинематической вязкости. Релаксационный параметр τ связан с ν соотношением $\tau = \nu / c_s^2$, где c_s – скорость звука в жидкости. Заданное поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x})$ не обязательно является потенциальным. Тензор скоростей деформаций определяется по формуле $\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = 0.5[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T]$. Символами div и ∇ обозначены операторы дивергенции и градиента. Формально устремляя в уравнениях (1)–(2) параметр τ к нулю, придем к классической системе Стокса.

Систему (1)–(2), рассматриваемую в ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ (n=2, 3) с липшицевой границей $\partial\Omega$, дополним граничными условиями

$$\vec{u}\Big|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = (\vec{f} \cdot \vec{n})\Big|_{\partial\Omega}. \tag{3}$$

Здесь $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали к $\partial\Omega$, $(\vec{f} \cdot \vec{n}) = \sum_{i=1}^{3} f_i n_i$ – евклидово скалярное произведение $\vec{f}$ и $\vec{n}$. Чтобы устранить неоднозначность в определении давления, будем использовать нормировку

$$\int_\Omega p d\vec{x} = 0. \tag{4}$$

Пусть $\vec{f} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$, где $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Классическим решением задачи (1)–(4) назовем функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}) \in \boldsymbol{C}^2(\Omega) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$ и $p = p(\vec{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющие в Ω уравнениям (1)–(2), а также условиям (3)–(4). Справедлива

Теорема 1. *Если классическое решение поставленной задачи существует, то оно является единственным.*

Доказательство. Пусть наряду с $(\vec{u}; p)$ существует другое классическое решение $(\vec{u}_1; p_1)$ задачи (1)–(4). Тогда функции $\delta\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}$ и $\delta p = p_1 - p$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div}\,\delta\vec{u} = \tau \operatorname{div}\,(\nabla \delta p), \tag{5}$$

$$\nabla \delta p = 2\nu \operatorname{div}\,\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}). \tag{6}$$

Кроме того,

$$\delta\vec{u}\Big|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \delta p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_\Omega \delta p d\vec{x} = 0. \tag{7}$$

Умножив (5) на δp, а (6) скалярно на $\delta\vec{u}$, сложим полученные равенства. После несложных преобразований будем иметь

$$2\nu\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})+\tau(\nabla\delta p)^2=$$
$$=\operatorname{div}\,\Big[\big(\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})\cdot\delta\vec{u}\big)+\tau\delta p\nabla\delta p-\delta\vec{u}\delta p\Big],\tag{8}$$

где $\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})=\sum_{i,j=1}^{3}\widehat{\sigma}_{ij}(\delta\vec{u})\widehat{\sigma}_{ij}(\delta\vec{u})$ – двойное скалярное произведение двух одинаковых тензоров. Интегрирование (8) по Ω с учетом (7) и формулы Гаусса–Остроградского дает

$$2\nu\int_{\Omega}\widehat{\sigma}(\delta\vec{u}):\widehat{\sigma}(\delta\vec{u})d\vec{x}+\tau\int_{\Omega}(\nabla\delta p)^2d\vec{x}=0.\tag{9}$$

Принимая во внимание условия (7), приходим к заключению о том, что равенство (9) возможно лишь в случае, когда $\delta\vec{u}\equiv\vec{0}$ и $\delta p\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

2. Обобщенная постановка задачи

Пусть $(\vec{u};p)$ – классическое решение поставленной задачи. Возьмем произвольную функцию $q=q(\vec{x})\in C^1(\overline{\Omega})$ и, умножив (1) на q, преобразуем полученное равенство к виду

$$(\nabla p\cdot\nabla q)=\frac{1}{\tau}(\vec{u}\cdot\nabla q)+(\vec{f}\cdot\nabla q)+\operatorname{div}\,\Big[q(\nabla p-\vec{f})-\frac{q\vec{u}}{\tau}\Big].\tag{10}$$

Аналогично поступим с уравнением (2), умножив его скалярно на вектор–функцию $\vec{v}=\vec{v}(\vec{x})$ класса $\boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$, обращающуюся в нуль на $\partial\Omega$. Будем иметь

$$2\nu\widehat{\sigma}(\vec{u}):\widehat{\sigma}(\vec{v})=(\vec{f}\cdot\vec{v})-(\nabla p\cdot\vec{v})+2\nu\operatorname{div}\,\big(\widehat{\sigma}(\vec{u})\cdot\vec{v}\big).\tag{11}$$

Интегрирование (10), (11) по Ω с учетом граничных условий (3) дает

$$\int_{\Omega}(\nabla p\cdot\nabla q)d\vec{x}=\frac{1}{\tau}\int_{\Omega}(\vec{u}\cdot\nabla q)d\vec{x}+\int_{\Omega}(\vec{f}\cdot\nabla q)d\vec{x},\tag{12}$$

$$2\nu\int_{\Omega}\widehat{\sigma}(\vec{u}):\widehat{\sigma}(\vec{v})d\vec{x}=\int_{\Omega}(\vec{f}\cdot\vec{v})d\vec{x}-\int_{\Omega}(\nabla p\cdot\vec{v})d\vec{x}.\tag{13}$$

Символом V обозначим линейное пространство вектор–функций $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x})$, принадлежащих $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ и обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ в смысле теории следов. Введение в V скалярного произведения любым из двух способов

$$(\vec{u},\vec{v})_V=\int_{\Omega}\widehat{\sigma}(\vec{u}):\widehat{\sigma}(\vec{v})d\vec{x},\tag{14}$$

$$(\vec{u},\vec{v})_V^*=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}\Big)d\vec{x},\quad\forall\vec{u},\vec{v}\in V,\tag{15}$$

превращает его в бесконечномерное гильбертово пространство. Порождаемые (14) и (15) нормы $\|\vec{u}\|_V=\sqrt{(\vec{u},\vec{u})_V}$ и $\|\vec{u}\|_V^*=\sqrt{(\vec{u},\vec{u})_V^*}$ эквивалентны и для них выполняются неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{c_K}}\|\vec{u}\|_V^*\leqslant\|\vec{u}\|_V\leqslant\|\vec{u}\|_V^*,\quad\forall\vec{u}\in V.\tag{16}$$

Первая из оценок (16) называется неравенством Артура Корна [6, 7]. Положительная постоянная $c_K = c_K(\Omega)$ зависит лишь от геометрических характеристик области.

Рассмотрим также гильбертово пространство W функций $p = p(\vec{x}) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию $\int_\Omega p d\vec{x} = 0$. Определим в нем скалярные произведения

$$(p, q)_W = \int_\Omega (\nabla p \cdot \nabla q) d\vec{x}, \tag{17}$$

$$(p, q)_W^* = \int_\Omega pq d\vec{x} + \int_\Omega (\nabla p \cdot \nabla q) d\vec{x}, \quad \forall p, q \in W. \tag{18}$$

Индуцируемые (17), (18) нормы $\|p\|_W = \sqrt{(p,p)_W}$ и $\|p\|_W^* = \sqrt{(p,p)_W^*}$ эквивалентны, а именно

$$\frac{1}{\sqrt{1 + c_P}} \|p\|_W^* \leqslant \|p\|_W \leqslant \|p\|_W^*, \quad \forall p \in W. \tag{19}$$

Первая из оценок (19) представляет собой частный случай неравенства Анри Пуанкаре (см. [7]), в котором $c_P = c_P(\Omega)$ – положительная постоянная.

Для пространств Соболева $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$, а также других известных функциональных пространств (например, $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$) здесь и ниже использованы обозначения, принятые в [1].

Пусть $\vec{f} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Обобщенным решением краевой задачи (1)–(4) назовем функции $\vec{u} \in V$ и $p \in W$, удовлетворяющие тождествам (12)–(13) при произвольных $\vec{v} \in V$, $q \in W$.

Нетрудно проверить, что любое классическое решение краевой задачи (1)–(4) с $\vec{f} \in \boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$ будет и ее обобщенным решением.

3. Существование и единственность обобщенного решения

Прежде чем приступить к анализу проблем существования и единственности обобщенного решения поставленной задачи, приведем два известных утверждения, доказательства которых можно найти в монографии [6].

Теорема 2 (Фридьеш Рисс). *Для любого линейного ограниченного функционала $l = l(v)$, заданного на гильбертовом пространстве H, существует единственный элемент $u \in H$, такой, что при всех $v \in H$ имеет место равенство $l(v) = (u, v)$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H. Кроме того, $\|l\| = \|u\| = \sqrt{(u, u)}$.*

Теорема 3 (Питер Лакс, Артур Мильграм). *Пусть H – гильбертово пространство; $(u, v) \to a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ и $v \to l(v) : H \to \mathbb{R}$ – билинейная и линейная формы соответственно, для которых существуют такие положительные постоянные α, β и γ, что при любых $u, v \in H$ выполняются неравенства*

$$|a(u, v)| \leqslant \alpha \|u\| \|v\|, \tag{20}$$

$$a(v, v) \geqslant \beta \|v\|^2, \tag{21}$$

$$|l(v)| \leqslant \gamma \|v\|. \tag{22}$$

Тогда задача, состоящая в нахождении элемента $u \in H$, такого, что

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H,$$

имеет единственное решение. При этом $\|u\| \leqslant \gamma/\beta$.

Заметим, что формулы (20), (22) обеспечивают непрерывность $a(u,v)$ и $l(v)$. Билинейная форма, удовлетворяюшая неравенству (21), называется H–эллиптичной или коэрцитивной. Центральный результат этого пункта может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 4. *Для любой функции* $\vec{f} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$ *и произвольных положительных* ν *и* τ *существует единственное обобщенное решение* $(\vec{u};p)$ *краевой задачи* (1)–(4). *При этом справедливы оценки*

$$\|\vec{u}\|_V \leqslant \frac{\sqrt{c_K c_F}}{\nu}\Big(1+\frac{c_K c_F}{4\tau\nu}\Big)\|\vec{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}, \tag{23}$$

$$\|p\|_W \leqslant \Big(1+\frac{c_K c_F}{2\tau\nu}\Big)\|\vec{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}, \tag{24}$$

где $c_K = c_K(\Omega)$ *и* $c_F = c_F(\Omega)$ *– положительные постоянные, зависящие только от геометрических характеристик области* Ω.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой Рисса, представим тождества (12), (13) в виде

$$(p,q)_W = \frac{1}{\tau}\big(A(\vec{u}),q\big)_W + (F_1,q)_W, \tag{25}$$

$$2\nu(\vec{u},\vec{v})_V = (\vec{F}_2,\vec{v})_V + \big(\vec{B}(p),\vec{v}\big)_V, \tag{26}$$

где

$$(F_1,q)_W = \int_\Omega (\vec{f}\cdot\nabla q)d\vec{x}, \tag{27}$$

$$(\vec{F}_2,\vec{v})_V = \int_\Omega (\vec{f}\cdot\vec{v})d\vec{x}. \tag{28}$$

Линейные ограниченные операторы $\vec{u} \to A(\vec{u}) : V \to W$ и $p \to \vec{B}(p) : W \to V$ определяются с помощью выражений

$$\big(A(\vec{u}),q\big)_W = \int_\Omega (\vec{u}\cdot\nabla q)d\vec{x}, \tag{29}$$

$$\big(\vec{B}(p),\vec{v}\big)_V = -\int_\Omega (\nabla p\cdot\vec{v})d\vec{x}. \tag{30}$$

Принимая во внимание теорему Рисса, неравенства Коши–Буняковского и Корна, а также неравенство Курта Фридрихса [7]:

$$\|\vec{u}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \leqslant \sqrt{c_F}\ \|\vec{u}\|_V^*, \quad \forall \vec{u} \in V,$$

где $c_F = c_F(\Omega) > 0$, из (27)–(30) выводим оценки

$$\|F_1\|_W \leqslant \|\vec{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}, \tag{31}$$

$$\|\vec{F}_2\|_V \leqslant \sqrt{c_K c_F}\ \|\vec{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}, \tag{32}$$

$$\|A(\vec{u})\|_W \leqslant \sqrt{c_K c_F}\ \|\vec{u}\|_V, \tag{33}$$

$$\|\vec{B}(p)\|_V \leqslant \sqrt{c_K c_F}\ \|p\|_W. \tag{34}$$

Соотношение (26) выполняется при произвольных $\vec{v}$, если

$$\vec{u} = \frac{1}{2\nu}\big(\vec{F}_2 + \vec{B}(p)\big). \tag{35}$$

Подстановка этого выражения для $\vec{u}$ в (25) дает

$$(p,q)_W = \frac{1}{2\tau\nu}\Big(A\big(\vec{B}(p)\big), q\Big)_W + (F,q)_W. \tag{36}$$

Здесь

$$F = F_1 + \frac{1}{2\tau\nu}A(\vec{F}_2). \tag{37}$$

Поскольку

$$\Big(A\big(\vec{B}(p)\big), q\Big)_W = \int_\Omega (\nabla q \cdot \vec{B}(p))d\vec{x} = -\big(\vec{B}(p), \vec{B}(q)\big)_V,$$

тождество (36) можно записать в виде

$$a(p,q) = (F,q)_W, \tag{38}$$

где

$$a(p,q) = (p,q)_W + \frac{1}{2\tau\nu}\big(\vec{B}(p), \vec{B}(q)\big)_V. \tag{39}$$

Используя (31)–(34), (37) и (39), находим

$$\begin{aligned}
&|a(p,q)| \leqslant \Big(1 + \frac{c_K c_F}{2\tau\nu}\Big)\|p\|_W\|q\|_W,\\
&a(p,p) \geqslant \|p\|_W^2,\\
&\big|(F,q)\big| \leqslant \|F\|_W\|q\|_W,
\end{aligned}$$

причем

$$\|F\|_W \leqslant \Big(1 + \frac{c_K c_F}{2\tau\nu}\Big)\|\vec{f}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}.$$

По теореме Лакса–Мильграма существует единственный элемент $p \in W$, для которого равенство (38) является истинным при любых $q \in W$. Кроме того, имеет место оценка (24). Зная p, с помощью (35) определяем $\vec{u}$. Формулы (35), (32), (34) и (24) позволяют получить неравенство (23). Теорема доказана.

Возникает вопрос о дополнительных ограничениях на функцию $\vec{f}$ и границу $\partial\Omega$, при которых обобщенное решение задачи (1)–(4) совпадает с ее классическим решением, а также об условиях разрешимости внешней стационарной задачи. Значительный интерес представляют теоремы о существовании или единственности обобщенных решений нелинейных квазигидродинамических уравнений, как в стационарном, так и в нестационарном случае.

4. Эллиптичность по Петровскому

Классическая система Стокса в стационарном случае является (см. [8]) эллиптической по Дуглису–Ниренбергу, однако не является эллиптической по Петровскому. Цель данного пункта – доказать, что стационарная квазигидродинамическая система в приближении Стокса эллиптична как по Петровскому, так и по Дуглису–Ниренбергу.

Рассмотрим систему (1)–(2) в области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Предположим, что $\vec{f}(\vec{x}) \in \boldsymbol{C}^1(\Omega)$. Выберем в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ декартову систему координат (x_1, x_2, x_3). Пусть $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3,$ – компоненты вектора скорости, $p = p(x_1, x_2, x_3)$ – поле давления, $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3,$ – проекции вектора внешнего поля на оси координат. Тогда система (1)–(2) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big) & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\tau\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ -\tau\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Линейный матричный дифференциальный оператор $L(D)$ в (40), где

$$D = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\Big),$$

является симметричным при условии равенства соответствующих смешанных производных.

Рассмотрим систему уравнений

$$L(x, D)U = g. \tag{41}$$

Здесь $g = g(x) = (g_1(x), ..., g_N(x))^T$ – заданный вектор–столбец, $U = U(x) = (u_1(x), ..., u_N(x))^T$ – неизвестный вектор–столбец, $x = (x_1, ..., x_n)$, N и n – заданные натуральные числа, верхний индекс T – знак транспонирования. Символом $L(x, D)$ обозначен оператор, определяемый по формуле

$$\big(L(x, D)U\big)_i = \sum_{j=1}^{N} l_{ij}(x, D) u_j(x), \quad i = \overline{1, ..., N}, \tag{42}$$

где
$$l_{ij}(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant n_j} a_{ij}^{\alpha}(x)D^{\alpha}, \quad i,j=\overline{1,...,N}, - \tag{43}$$

дифференциальные операторы,

$$D=(D_1,...,D_n)=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big), \quad D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ – вектор из пространства $\mathbb{R}^n$, компонентами которого являются целые неотрицательные числа, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $a_{ij}^{\alpha}(x)$ – заданные функции,

$$n_j=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\deg l_{ij}(x,D), \quad j=\overline{1,...,N}.$$

Символом deg обозначен порядок старшей производной, входящей в оператор $l_{ij}(x,D)$. Будем считать, что $g_i(x)\in C(\Omega)$, $i=\overline{1,...,N}$, $a_{ij}^{\alpha}(x)\in C(\Omega)$, $i,j=\overline{1,...,N}$, где Ω – область в пространстве $\mathbb{R}_x^n$ с липшицевой границей.

Пусть $\widetilde{l}_{ij}(x,D)$ – главная часть порядка n_j каждого оператора $l_{ij}(x,D)$, т.е.

$$\widetilde{l}_{ij}(x,D)=\begin{cases} 0, \ \text{если } \deg l_{ij}(x,D)<n_j, \\ \sum\limits_{|\alpha|=n_j} a_{ij}^{\alpha}(x)D^{\alpha}, \ \text{если } \deg l_{ij}(x,D)=n_j. \end{cases}$$

Следуя [8], главной частью (по Петровскому) оператора

$$L(x,D)=\begin{pmatrix} l_{11}(x,D) & \dots & l_{1N}(x,D) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{N1}(x,D) & \dots & l_{NN}(x,D) \end{pmatrix} \tag{44}$$

назовем оператор

$$\widetilde{L}(x,D)=\begin{pmatrix} \widetilde{l}_{11}(x,D) & \dots & \widetilde{l}_{1N}(x,D) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{l}_{N1}(x,D) & \dots & \widetilde{l}_{NN}(x,D) \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Фиксируем произвольно вектор $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, точку $x\in\Omega$ и ассоциируем с (45) матрицу

$$\widetilde{L}(x,\xi)=\begin{pmatrix} \widetilde{l}_{11}(x,\xi) & \dots & \widetilde{l}_{1N}(x,\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{l}_{N1}(x,\xi) & \dots & \widetilde{l}_{NN}(x,\xi) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где

$$\widetilde{l}_{ij}(x,\xi)=\begin{cases} 0, \ \text{если } |\alpha|<n_j, \\ \sum\limits_{|\alpha|=n_j} a_{ij}^{\alpha}(x)\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}, \ \text{если } |\alpha|=n_j. \end{cases}$$

Определение 1. *Система уравнений* (41) *называется эллиптической по Петровскому в области* Ω, *если для любого* $x\in\Omega$ *и для любого* $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ *выполняется условие*

$$\det\widetilde{L}(x,\xi)\neq 0. \tag{47}$$

Теорема 5. *Система уравнений* (40) *является эллиптической по Петровскому в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Система (40) является частным случаем системы (41) при $N = 4$, $n = 3$. Оператор $L(x, D) = L(D)$ имеет вид

$$L(D) = \begin{pmatrix} -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big) & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\tau\Delta \end{pmatrix}.$$

Поскольку $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (2, 2, 2, 2)$, соответствующая $L(D)$ главная часть выглядит следующим образом:

$$\widetilde{L}(D) = \begin{pmatrix} -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} & 0 \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} & 0 \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau\Delta \end{pmatrix}.$$

Выписываем характеристический многочлен

$$P(\xi) = \det \begin{pmatrix} -\nu\big(|\xi|^2 + \xi_1^2\big) & -\nu\xi_2\xi_1 & -\nu\xi_3\xi_1 & 0 \\ -\nu\xi_1\xi_2 & -\nu\big(|\xi|^2 + \xi_2^2\big) & -\nu\xi_3\xi_2 & 0 \\ -\nu\xi_1\xi_3 & -\nu\xi_2\xi_3 & -\nu\big(|\xi|^2 + \xi_3^2\big) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau|\xi|^2 \end{pmatrix}.$$

Вычисления дают:

$$\begin{aligned} P(\xi) = {}& \tau\nu^3|\xi|^2\big[\big(|\xi|^2 + \xi_1^2\big)\big(|\xi|^2 + \xi_2^2\big)\big(|\xi|^2 + \xi_3^2\big) + 2(\xi_1\xi_2\xi_3)^2 - \\ & -(\xi_1\xi_3)^2\big(|\xi|^2 + \xi_2^2\big) - (\xi_1\xi_2)^2\big(|\xi|^2 + \xi_3^2\big) - (\xi_2\xi_3)^2\big(|\xi|^2 + \xi_1^2\big)\big] = \\ = {}& 2\tau\nu^3|\xi|^8 > 0 \end{aligned}$$

для любого $\xi \neq 0$, так как ν и τ – положительные числа. В согласии с определением 1 система (40) является эллиптической по Петровскому.

5. Эллиптичность по Дуглису–Ниренбергу

При определении эллиптичности системы (41) по Дуглису–Ниренбергу главная часть оператора (44) определяется другим способом и в нее могут входить младшие производные (см. [8]). Предположим, что существуют два набора целых чисел

$$s = (s_1, ..., s_N) \quad \text{и} \quad t = (t_1, ..., t_N), \tag{48}$$

удовлетворяющих условию $\deg\, l_{ij}(x, D) \leqslant s_i + t_j$ при всех тех $i, j = \overline{1, ..., N}$, для которых $l_{ij}(x, D) \neq 0$. При этом $l_{ij}(x, D) = 0$, если $s_i + t_j < 0$. Главной частью оператора $L(x, D)$ по Дуглису–Ниренбергу, соответствующей наборам $s = (s_1, ..., s_N)$,

$t = (t_1, ..., t_N)$, назовем матричный дифференциальный оператор

$$\widetilde{L}_{s,t}(x, D) = \begin{pmatrix} \widetilde{l}^{s,t}_{11}(x, D) & \dots & \widetilde{l}^{s,t}_{1N}(x, D) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{l}^{s,t}_{N1}(x, D) & \dots & \widetilde{l}^{s,t}_{NN}(x, D) \end{pmatrix}, \tag{49}$$

где дифференциальные операторы $\widetilde{l}^{s,t}_{ij}(x, D)$ вычисляются по формулам

$$\widetilde{l}^{s,t}_{ij}(x, D) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } \deg l_{ij}(x, D) < s_i + t_j \text{ или } l_{ij}(x, D) = 0, \\ \sum\limits_{|\alpha| = s_i + t_j} a^{\alpha}_{ij}(x) D^{\alpha}, \quad \text{если } \deg l_{ij}(x, D) = s_i + t_j. \end{cases}$$

Определение 2. *Система уравнений* (41) *называется эллиптической по Дуглису–Ниренбергу области* Ω*, если для любого* $x \in \Omega$ *и для любого* $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *выполняется условие*

$$\det \widetilde{L}_{s,t}(x, \xi) \neq 0. \tag{50}$$

Теорема 6. *Система уравнений* (40) *является эллиптической по Дуглису–Ниренбергу в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Для системы (40) выберем наборы (48), например, в виде

$$s = (-1, -1, -1, 0) \quad \text{и} \quad t = (3, 3, 3, 2). \tag{51}$$

Соответствующая (49) главная часть оператора

$$L(D) = \begin{pmatrix} -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big) & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\tau\Delta \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\widetilde{L}_{s,t}(D) = \begin{pmatrix} -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & -\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & -\nu\Big(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big) & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 & -\tau\Delta \end{pmatrix}.$$

Выписываем характеристический многочлен

$$Q(\xi) = \det \begin{pmatrix} -\nu\big(|\xi|^2 + \xi_1^2\big) & -\nu\xi_2\xi_1 & -\nu\xi_3\xi_1 & \xi_1 \\ -\nu\xi_1\xi_2 & -\nu\big(|\xi|^2 + \xi_2^2\big) & -\nu\xi_3\xi_2 & \xi_2 \\ -\nu\xi_1\xi_3 & -\nu\xi_2\xi_3 & -\nu\big(|\xi|^2 + \xi_3^2\big) & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau|\xi|^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $Q(\xi) = P(\xi) = 2\tau\nu^3|\xi|^8 > 0$ для любого $\xi \neq 0$. Пользуясь определением 2, приходим к выводу о том, что система (40) является эллиптической по Дуглису–Ниренбергу.

Отметим, что невырожденные преобразования системы (41) не сохраняют эллиптичности по Петровскому, но сохраняют эллиптичность по Дуглису–Ниренбергу. Это утверждение было доказано М.Атьей и И.Зингером (см. [8]).

Итак, стационарная квазигидродинамическая система в приближении Стокса естественным образом встраивается в классы эллиптических систем, ранее изучавшиеся классиками математики [9–11]. Свойства эллиптичности по Петровскому и по Дуглису–Ниренбергу могут использоваться при исследовании корректности постановок и свойств решений краевых задач для указанной системы.

6. Постановка задачи об обтекании шара

Для описания медленных изотермических течений вязкого газа (жидкости) около твердых тел широко используется линеаризованная форма системы Навье–Стокса, предложенная Дж.Стоксом. Она выводится из полных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости путем отбрасывания нелинейного инерционного члена [12]. Наиболее известное аналитическое решение указанной системы построено в задаче об обтекании шара с условиями прилипания на границе. Оно позволило Стоксу получить выражение для результирующей силы, действующей на шар.

Уточнение формулы Стокса путем введения членов первого порядка малости по числу Рейнольдса было дано К.В.Озееном. Однако теорию Озеена нельзя признать достаточно строгой, поскольку соответствующее ей решение не удовлетворяет физически осмысленным условиям прилипания на границе шара [12]. Несовершенство формулы Стокса проявляется также в задачах медленного обтекания газом мелких масляных капель, радиус которых сравним по величине со средней длиной свободного пробега молекул. Американским физиком Р.Э.Милликеном был экспериментально установлен эффект уменьшения силы сопротивления по мере приближения числа Кнудсена Kn к единице. Им же предложено эмпирическое выражение, уточняющее формулу Стокса [13, 14]. В диапазоне чисел Кнудсена $[0.01, 0.1]$ экспериментальные данные вполне адекватно могут быть описаны в рамках классической системы Стокса, если отказаться от условий прилипания на поверхности капли в пользу условий максвелловского скольжения. Если же $Kn \in (0.1, 0.5]$, то этого уже недостаточно. Один из возможных путей получения более точных результатов связан с построением альтернативных математических моделей.

Целью данного пункта является построение аналитического решения квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса в задаче обтекания шара однородным потоком газа с граничными условиями максвелловского скольжения. Получено выражение для силы сопротивления, уточняющее известные формулы классической теории.

Стоксовское приближение стационарной квазигидродинамической системы (1)–(2) в сферических координатах (r, φ, θ) без учета внешних сил имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2 u_r\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\; u_\theta\big) = \\ = \tau\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\;\frac{\partial p}{\partial\theta}\Big)\Big], \tag{52}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 2\nu\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\widehat{\sigma}_{rr}\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\ \widehat{\sigma}_{\theta r}\big) - \frac{\widehat{\sigma}_{\theta\theta}+\widehat{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r}\Big], \tag{53}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = 2\nu\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\widehat{\sigma}_{r\theta}\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\ \widehat{\sigma}_{\theta\theta}\big) + \\ + \frac{\widehat{\sigma}_{\theta r}-\widehat{\sigma}_{\varphi\varphi}\mathrm{ctg}\ \theta}{r}\Big]. \tag{54}$$

В (52)–(54) составляющая скорости u_φ положена равной нулю. Зависимостью остальных макропараметров среды от угла φ пренебрегаем. Связь сферических координат (r,φ,θ) с декартовыми (x,y,z) дается соотношениями $x_1 = r\cos\varphi\sin\theta$, $x_2 = r\sin\varphi\sin\theta$, $x_3 = r\cos\theta$. Компоненты тензора скоростей деформаций $\widehat{\sigma}$ вычисляются по формулам

$$\widehat{\sigma}_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \widehat{\sigma}_{r\theta} = \widehat{\sigma}_{\theta r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\Big),$$

$$\widehat{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \widehat{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta\mathrm{ctg}\ \theta}{r}.$$

Малый релаксационный параметр τ, имеющий размерность времени, определяется с помощью выражения

$$\tau = \frac{\gamma}{Sc}\frac{\nu}{c_s^2},$$

в котором $\nu = \eta/\varrho$ – коэффициент кинематической вязкости, η – коэффициент динамической вязкости, $\varrho = 1$ – плотность, $c_s = \sqrt{\gamma\,\mathrm{Re}\,T}$ – скорость звука, T – температура, Re – газовая постоянная, γ – показатель адиабаты, Sc – число Шмидта. В частности, для воздуха $\gamma = 1.4$, $Sc = 0.74$.

Сингулярно возмущенная система Стокса (52)–(54) замкнута относительно неизвестных функций – проекций вектора скорости $u_r = u_r(r,\theta)$, $u_\theta = u_\theta(r,\theta)$ и давления $p = p(r,\theta)$. При $\tau \to 0$ она переходит в классическую систему Стокса.

Задача обтекания шара радиуса R с центром в начале координат направленным вдоль оси ox_3 внешним однородным потоком газа, имеющим при $r \to +\infty$ скорость U_∞ и давление p_∞, состоит в отыскании функций u_r, u_θ и p, удовлетворяющих в области $G = \{(r,\theta):\ \ R < r < +\infty,\ 0 < \theta < \pi\}$ уравнениям (52)–(54), а также условиям

$$u_r(R,\theta) = 0, \quad u_r(+\infty,\theta) = U_\infty\cos\theta; \tag{55}$$

$$u_\theta(R,\theta) = \frac{2-\sigma}{\sigma}\lambda\frac{\partial u_\theta}{\partial r}(R,\theta), \quad u_\theta(+\infty,\theta) = -U_\infty\sin\theta; \tag{56}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(R,\theta) = 0, \quad p(+\infty,\theta) = p_\infty; \quad 0 < \theta < \pi. \tag{57}$$

Здесь σ – доля диффузно отраженных молекул, которая близка к единице. Например, для находящейся в воздухе капли масла можно положить $\sigma = 0.9$. Средняя длина свободного пробега молекул λ вычисляется по известной (см. [13]) формуле Дина Чепмена

$$\lambda = \nu\sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{Re}\,T}}.$$

Первое из равенств (56) представляет собой условие скольжения для тангенциальной составляющей вектора скорости у поверхности раздела сред, выведенное Максвеллом.

7. Автомодельная замена переменных

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$u_r = A\Big(\frac{r}{R}\Big)U_\infty \cos\theta, \quad u_\theta = -B\Big(\frac{r}{R}\Big)U_\infty \sin\theta,$$

$$p = p_\infty + C\Big(\frac{r}{R}\Big)U_\infty^2 \cos\theta. \tag{58}$$

Подстановка зависимостей (58) в (52)–(54) дает

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}(x^2A) - \frac{2B}{x} = \frac{\delta^2 Re}{2}\Big[\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\Big(x^2\frac{dC}{dx}\Big) - \frac{2C}{x^2}\Big], \tag{59}$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{Re}\Big[\frac{2}{x^2}\frac{d}{dx}\Big(x^2\frac{dA}{dx}\Big) - \frac{2}{x}\frac{dB}{dx} - 6\frac{A-B}{x^2}\Big], \tag{60}$$

$$C = \frac{1}{Re}\Big[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(x^2\frac{dB}{dx}\Big) + \frac{dA}{dx} + 4\frac{A-B}{x}\Big]. \tag{61}$$

Систему (59)–(61) необходимо дополнить вытекающими из (55)–(57) условиями

$$A(1) = 0, \quad A(+\infty) = 1; \tag{62}$$

$$B(1) = \zeta\frac{dB}{dx}(1), \quad B(+\infty) = 1; \tag{63}$$

$$\frac{dC}{dx}(1) = 0, \quad C(+\infty) = 0. \tag{64}$$

Здесь число Рейнольдса Re определяется с помощью выражения $Re = (U_\infty R)/\nu$. Символом x обозначено отношение r/R. Связь положительных постоянных δ и ζ с числом Кнудсена $Kn = \lambda/R$ дается формулами $\delta = \sqrt{2\tau\nu}/R = 2Kn/\sqrt{\pi Sc}$, $\zeta = \alpha Kn$, причем $\alpha = (2-\sigma)/\sigma$.

Итак, задача свелась к отысканию на интервале $(1, +\infty)$ функций $A = A(x)$, $B = B(x)$, $C = C(x)$, удовлетворяющих уравнениям (59)–(61) и условиям (62)–(64).

8. Решение проблемы интегрирования

Сложим уравнения (60) и (61), умноженные на x^2 и $2x$ соответственно. Будем иметь

$$\frac{d}{dx}\big(x^2C\big) = \frac{1}{Re}\Big[2\frac{d}{dx}\Big(x^2\frac{d(A+B)}{dx}\Big) + 2\frac{d}{dx}\big(x(A-B)\big)\Big]. \tag{65}$$

Интегрирование (65) по переменной x дает

$$C = \frac{1}{Re}\Big[2\frac{d(A+B)}{dx} + 2\frac{A-B}{x} - \frac{c_1}{x^2}\Big]. \tag{66}$$

Здесь и далее символами c_i (i – натуральное число) обозначены некоторые постоянные величины. Следствием (61), (64) является равенство

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(x^2\frac{dB}{dx}\Big)+\frac{dA}{dx}+4\frac{A-B}{x}=2\frac{d(A+B)}{dx}+2\frac{A-B}{x}-\frac{c_1}{x^2}.$$

Преобразуя его к виду

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\frac{dB}{dx}\Big)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{A-B}{x^2}\Big)-\frac{c_1}{x^4},$$

находим

$$\frac{dB}{dx}=\frac{A-B}{x}+\frac{c_1}{3x^2}+c_2x. \qquad (67)$$

Положим в (67) константу c_2 равной нулю. Тогда $dB(x)/dx\to 0$ при $x\to+\infty$ и

$$A=B+x\frac{dB}{dx}-\frac{c_1}{3x}. \qquad (68)$$

Запишем (59) в эквивалентной форме

$$\frac{dA}{dx}+2\frac{A-B}{x}=\frac{\delta^2 Re}{2}\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\big(x^2C\big)\Big]. \qquad (69)$$

Из (68), (69) вытекает соотношение

$$\frac{d(A+2B)}{dx}-\frac{2c_1}{3x^2}=\frac{\delta^2 Re}{2}\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\big(x^2C\big)\Big]. \qquad (70)$$

Проинтегрируем (70), а затем исключим A с помощью (68). Получим

$$x\frac{dB}{dx}+3B+\frac{c_1}{3x}=\frac{\delta^2 Re}{2x^2}\frac{d}{dx}\big(x^2C\big)+c_3,$$

что равносильно

$$\frac{d}{dx}\big(x^3B\big)+\frac{c_1x}{3}=\frac{\delta^2 Re}{2}\frac{d}{dx}\big(x^2C\big)+c_3x^2. \qquad (71)$$

Интегрирование (71) дает

$$B=\frac{\delta^2 Re}{2x}C-\frac{c_1}{6x}+\frac{c_3}{3}+\frac{c_4}{x^3}. \qquad (72)$$

Постоянная c_3 в (72) равна трем, поскольку $B(+\infty)=1$, $C(+\infty)=0$. Таким образом,

$$B=1+\frac{\delta^2 Re}{2x}C-\frac{c_1}{6x}+\frac{c_4}{x^3}. \qquad (73)$$

Вычислим производную:

$$\frac{dB}{dx}=\frac{\delta^2 Re}{2x}\Big(\frac{dC}{dx}-\frac{C}{x}\Big)+\frac{c_1}{6x^2}-3\frac{c_4}{x^4}. \qquad (74)$$

Положим в (68) переменную x равной единице. Принимая во внимание условия (62), (63), придем к системе

$$\begin{cases} B(1) + \frac{dB}{dx}(1) = \frac{c_1}{3}, \\ B(1) - \zeta \frac{dB}{dx}(1) = 0. \end{cases}$$

Значит,

$$B(1) = \frac{\zeta c_1}{3(1+\zeta)}, \quad \frac{dB}{dx}(1) = \frac{c_1}{3(1+\zeta)}. \tag{75}$$

Пусть теперь $x = 1$ в (73), (74). С учетом (66), (75) получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\zeta c_1}{3(1+\zeta)} = 1 + \frac{\delta^2 Re}{2} C(1) - \frac{c_1}{6} + c_4, \\ \frac{c_1}{3(1+\zeta)} = -\frac{\delta^2 Re}{2} C(1) + \frac{c_1}{6} - 3c_4, \end{cases}$$

из которой вытекает связь

$$c_4 = \frac{1}{2} - \frac{c_1}{6}$$

между константами c_1 и c_4. Итак,

$$B = 1 + \frac{1}{2x^3} + \frac{\delta^2 Re}{2x} C - \frac{c_1}{6x}\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big).$$

Отсюда

$$C = \frac{2}{\delta^2 Re}(B-1)x + \frac{c_1}{3\delta^2 Re}\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) - \frac{1}{\delta^2 x^2 Re}. \tag{76}$$

Приравняем правые части (61) и (76). Воспользовавшись (68), выводим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$2x\frac{d^2B}{dx^2} + 8\frac{dB}{dx} - \frac{2x}{\delta^2}B = \frac{c_1}{x^2} + \frac{1}{\delta^2}\Big[\frac{c_1}{3}\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) - 2x - \frac{1}{x^2}\Big]. \tag{77}$$

Добавим к нему вытекающие из (63), (75) условия

$$B(1) = \frac{\zeta c_1}{3(1+\zeta)}, \quad \frac{dB}{dx}(1) = \frac{c_1}{3(1+\zeta)}, \quad B(+\infty) = 1. \tag{78}$$

Пусть

$$B = 1 + \frac{1}{2x^3} - \frac{c_1}{6}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1+\delta^2}{x^3}\Big) + \frac{1}{x^{3/2}}\psi\Big(\frac{x}{\delta}\Big), \tag{79}$$

где $\psi = \psi(y)$ – неизвестная функция, $y = x/\delta$. Подстановка (79) в (77) приводит к модифицированному уравнению Бесселя

$$y^2\frac{d^2\psi}{dy^2} + y\frac{d\psi}{dy} - \Big(y^2 + \frac{9}{4}\Big)\psi = 0,$$

общее решение которого представляется в виде

$$\psi = c_5\frac{(y+1)\exp(-y)}{y^{3/2}} + c_6\frac{y\,\mathrm{ch}\;y - \mathrm{sh}\;y}{y^{3/2}}. \tag{80}$$

Постоянная c_6 в (80) равна нулю, поскольку $\psi(+\infty)=0$. Стало быть,

$$B(x)=1+\frac{1}{2x^3}-\frac{c_1^*}{2}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1+\delta^2}{x^3}\Big)+\frac{c_2^*}{x^3}\Big(1+\frac{x}{\delta}\Big)\exp\Big(-\frac{x}{\delta}\Big), \tag{81}$$

причем $c_1^*=c_1/3$, $c_2^*=\delta^{3/2}c_5$. Принимая во внимание связь между c_1 и c_1^*, запишем первые два условия (78) следующим образом:

$$B(1)=\frac{\zeta c_1^*}{1+\zeta},\quad \frac{dB}{dx}(1)=\frac{c_1^*}{1+\zeta}. \tag{82}$$

Дифференцируя (81) по x, находим

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dx}&=-\frac{3}{4x^4}+\frac{c_1^*}{2}\Big(\frac{1}{x^2}+3\frac{1+\delta^2}{x^4}\Big)-\\&-c_2^*\Big[\frac{3}{x^4}\Big(1+\frac{x}{\delta}\Big)+\frac{1}{x^2\delta^2}\Big]\exp\Big(-\frac{x}{\delta}\Big).\end{aligned} \tag{83}$$

Положим в (81), (83) переменную x равной единице и воспользуемся (82). В результате придем к системе

$$\begin{cases}\Big(\frac{\delta^2}{2}+\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}\Big)c_1^*-\Big(1+\frac{1}{\delta}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{\delta}\Big)c_2^*=\frac{3}{2},\\ \Big(\frac{3}{2}\delta^2+\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}\Big)c_1^*-\Big[3\Big(1+\frac{1}{\delta}\Big)+\frac{1}{\delta^2}\Big]\exp\Big(-\frac{1}{\delta}\Big)c_2^*=\frac{3}{2},\end{cases}$$

обладающей решением

$$\begin{aligned}c_1^*&=\frac{3+6\delta+6\delta^2}{2\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}+4\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}(\delta+\delta^2)+\delta^2},\\ c_2^*&=\frac{3\delta^4}{2\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}+4\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}(\delta+\delta^2)+\delta^2}\exp\Big(\frac{1}{\delta}\Big).\end{aligned}$$

Формулы (68), (76) позволяют определить искомые функции

$$A(x)=1-\frac{1}{x^3}-c_1^*\Big(\frac{1}{x}-\frac{1+\delta^2}{x^3}\Big)-\frac{c_2^*}{x^3}\Big[2\Big(1+\frac{x}{\delta}\Big)+\frac{x^2}{\delta^2}\Big]\exp\Big(-\frac{x}{\delta}\Big), \tag{84}$$

$$C(x)=-\frac{1}{Re}\Big[\frac{c_1^*}{x^2}-\frac{2c_2^*}{x^2\delta^2}\Big(1+\frac{x}{\delta}\Big)\exp\Big(-\frac{x}{\delta}\Big)\Big]. \tag{85}$$

Переходя в (84), (81), (85) к пределу при $\delta\to 0$, $\zeta\to 0$, а затем подставляя зависимости $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ в (58), получим классическое решение Стокса [12].

9. Сила сопротивления. Оседание мелких масляных капель в газе

При $Kn\leqslant 0.5$ и малых числах Re вычислим величину направленной вдоль оси ox_3 силы, действующей на обтекаемую воздухом масляную каплю шарообразной формы:

$$F_{QHD}^{slip}=2\pi R^2\int\limits_0^\pi\big(-p\cos\theta+2\eta\widehat{\sigma}_{rr}\cos\theta-2\eta\widehat{\sigma}_{\theta r}\sin\theta\big)\Big|_{r=R}\sin\theta\,d\theta=$$

$$= \frac{2+4\delta+4\delta^2}{2\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}+4\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}(\delta+\delta^2)+\delta^2} 6\pi\eta R U_\infty =$$

$$= \Big[1-\alpha Kn+2\Big(\alpha^2-\frac{1}{\pi Sc}\Big)Kn^2+\cdots\Big]6\pi\eta R U_\infty. \quad (86)$$

Формально устремляя в (86) параметр δ к нулю, получим соответствующее выражение для силы сопротивления из теории Навье–Стокса, учитывающее эффекты максвелловского скольжения:

$$F_{NS}^{slip} = \frac{1+\zeta}{1+2\zeta}6\pi\eta R U_\infty = \Big[1-\alpha Kn+2\alpha^2 Kn^2+\cdots\Big]6\pi\eta R U_\infty. \quad (87)$$

Предельный переход в (87) при $\zeta \to 0$ приводит к классическому закону Стокса.

На необходимость учета эффектов скольжения и коррекции формулы Стокса впервые указал А.Бассе в 1888 г. (см. [13, 14]). Он получил теоретически следующее выражение для силы сопротивления:

$$F_B = \frac{1+2\zeta}{1+3\zeta}6\pi\eta R U_\infty = \Big[1-\alpha Kn+3\alpha^2 Kn^2+\cdots\Big]6\pi\eta R U_\infty. \quad (88)$$

Отличия в коэффициентах (86) и (87) связаны с тем, что вместо (45) использовалось граничное условие скольжения вида

$$u_\theta(R,\theta) = \frac{2-\sigma}{\sigma}\lambda\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}(R,\theta)-\frac{u_\theta(R,\theta)}{R}\Big).$$

Факт уменьшения силы сопротивления подтвердился в опытах Милликена по оседанию мелких масляных капель в воздухе (1911 г., 1923 г., см. [13, 14]). С помощью этих опытов удалось впервые с высокой точностью измерить заряд электрона, за что Р.А.Милликен был удостоен нобелевской премии по физике. В результате обработки экспериментальных данных он пришел к эмпирической зависимости

$$F_M = \frac{6\pi\eta R U_\infty}{1+\alpha Kn} = \Big[1-\alpha Kn+\alpha^2 Kn^2+\cdots\Big]6\pi\eta R U_\infty. \quad (89)$$

Проанализируем, что дают формулы (86)–(89) в конкретной задаче. Пусть капля оливкового масла радиуса R медленно оседает в воздухе при температуре $T = 293$ K (20^0 C) и нормальном атмосферном давлении (1 атм = 101325 Па). В этих условиях плотность масла $\varrho_{oil} = 0.92$ г/см^3, плотность воздуха $\varrho_{air} = 1.2\cdot 10^{-3}$ г/см^3, кинематическая вязкость воздуха 0.15 см^2/с, газовая постоянная $\mathrm{Re} = 2.88\cdot 10^6$ эрг/(г K), показатель адиабаты воздуха $\gamma = 1.4$, число Шмидта $Sc = 0.74$, параметр $\alpha = 1.22$. Составляем уравнение баланса сил:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 g\varrho_{oil} = \frac{4}{3}\pi R^3 g\varrho_{air} + F. \quad (90)$$

Здесь $g = 9.8\cdot 10^2$ см/с^2 – ускорение свободного падения. При равномерном движении капли со скоростью $U = U_\infty$ сила тяжести, действующая на нее со стороны гравитационного поля Земли, должна быть уравновешена архимедовой подъемной силой и силой сопротивления. С помощью (90) находим соответствующие выражения для скорости падения капли:

$$U_M = \frac{2}{9}\frac{gR^2}{\nu}\Big(\frac{\varrho_{oil}}{\varrho_{air}} - 1\Big)(1 + \alpha Kn), \tag{91}$$

$$U_{NS}^{no\ slip} = \frac{2}{9}\frac{gR^2}{\nu}\Big(\frac{\varrho_{oil}}{\varrho_{air}} - 1\Big), \tag{92}$$

$$U_B = \frac{2}{9}\frac{gR^2}{\nu}\Big(\frac{\varrho_{oil}}{\varrho_{air}} - 1\Big)\Big(\frac{1 + 3\alpha Kn}{1 + 2\alpha Kn}\Big), \tag{93}$$

$$U_{NS}^{slip} = \frac{2}{9}\frac{gR^2}{\nu}\Big(\frac{\varrho_{oil}}{\varrho_{air}} - 1\Big)\Big(\frac{1 + 2\alpha Kn}{1 + \alpha Kn}\Big), \tag{94}$$

$$U_{QHD}^{slip} = \frac{2}{9}\frac{gR^2}{\nu}\Big(\frac{\varrho_{oil}}{\varrho_{air}} - 1\Big)\Bigg(\frac{2\frac{1+2\zeta}{1+\zeta} + 4\frac{1+2\zeta}{1+\zeta}(\delta + \delta^2) + \delta^2}{2 + 4\delta + 4\delta^2}\Bigg). \tag{95}$$

Здесь $\zeta = \alpha Kn$, $\delta = 2Kn/\sqrt{\pi Sc}$. Определим среднюю длину свободного пробега молекул по формуле Чепмена: $\lambda \simeq 6.47 \cdot 10^{-6}$ см. Значениям числа Кнудсена $Kn_1 = 0.01$, $Kn_2 = 0.1$, $Kn_3 = 0.5$ отвечают радиусы капли $R_1 = 6.47 \cdot 10^{-4}$ см, $R_2 = 6.47 \cdot 10^{-5}$ см, $R_3 = 1.29 \cdot 10^{-5}$ см. Результаты вычислений скорости падения капли на основе выражений (91)–(95) сведем в таблицу:

U см/с R см	U_M	$U_{NS}^{no\ slip}$	U_B	U_{NS}^{slip}	U_{QHD}^{slip}
$R_1 = 6.47 \cdot 10^{-4}$	$4.702 \cdot 10^{-1}$	$4.646 \cdot 10^{-1}$	$4.697 \cdot 10^{-1}$	$4.701 \cdot 10^{-1}$	$4.701 \cdot 10^{-1}$
$R_2 = 6.47 \cdot 10^{-5}$	$5.212 \cdot 10^{-3}$	$4.646 \cdot 10^{-3}$	$5.101 \cdot 10^{-3}$	$5.151 \cdot 10^{-3}$	$5.168 \cdot 10^{-3}$
$R_3 = 1.29 \cdot 10^{-5}$	$2.973 \cdot 10^{-4}$	$1.847 \cdot 10^{-4}$	$2.354 \cdot 10^{-4}$	$2.546 \cdot 10^{-4}$	$2.667 \cdot 10^{-4}$

Во всех рассмотренных случаях число $Re = (UR)/\nu$ много меньше единицы. Видно, что если $Kn \leqslant 0.01$, то справедлива теория Стокса. При $Kn \in (0.01,\ 0.1]$ систему Стокса необходимо дополнить граничными условиями максвелловского скольжения. Во всем указанном диапазоне чисел Кнудсена квазигидродинамические уравнения в приближении Стокса, дополненные условиями скольжения Максвелла, лучше описывают опытные данные Милликена. Для $Kn \in (0.1,\ 0.5]$ это преимущество используемого подхода особенно очевидно. Максимальное относительное отклонение данных расчета на основе КГД–теории от эмпирической кривой не превосходит 11%, а на основе теории Стокса со скольжением – 15%. Заметим, что при дальнейшем увеличении Kn масляная капля превращается в броуновскую частицу. Рассмотренная задача может быть положена в основу экспериментального определения числа Sc.

В этой статье объединены и дополнены результаты, полученные автором в работах [15–17]. Интерес к такого рода исследованиям в последнее время возрос. Например, профессор Московского энергетического института А.А.Злотник недавно доказал [18], что еще одна система этого класса – квазигазодинамическая – является параболической по Петровскому, что позволяет установить для нее однозначную разрешимость задачи Коши по крайней мере на достаточно малом промежутке времени. В [19] найден критерий устойчивости малых возмущений для этой системы.

Список литературы

[1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

[2] Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

[3] Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье–Стокса. М., 1985.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1986.

[5] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.

[6] Дюво Г., Лионс Ж.–Л. Неравенства в механике и физике. М., 1980.

[7] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.

[8] Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1997.

[9] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.

[10] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М, 1962.

[11] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.

[12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1986.

[13] Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М., 1991.

[14] Emerson D.R., Barber R.W. Analytical Solution of Low Reynolds Number Slip Flow Past a Sphere: Technical Report DL–TR–00–001. Daresbury Laboratory, 2000.

[15] Шеретов Ю.В. О существовании и единственности обобщенного решения стационарной краевой задачи для квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса. Материалы юбилейной научн. конф. «Российской математике–триста лет». Тверь, 2002. С. 86–94.

[16] Шеретов Ю.В. Анализ задачи об обтекании шара для квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2003. С. 177–186.

[17] Шеретов Ю.В. Эллиптичность по Петровскому и по Дуглису–Ниренбергу стационарной квазигидродинамической системы в приближении Стокса // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2005. С. 124–131.

[18] Злотник А.А. Классификация некоторых модификаций системы Эйлера // Докл. РАН. 2006. Т. 407, № 1. С. 1–5.

[19] Злотник А.А., Злотник И.А. Критерий устойчивости малых возмущений для квазигазодинамической системы уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 2. С. 262–269.