УДК 517.54

# ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА СУПЕРМНОГООБРАЗИЯХ П-СИММЕТРИЧНЫХ ФЛАГОВ[1]

**Вишнякова Е.Г.**
кафедра функционального анализа и геометрии

*Поступила в редакцию 17.09.2007, после переработки 16.10.2007.*

Работа посвящена вычислению супералгебр Ли голоморфных векторных полей на комплексных супермногообразиях П-симметричных флагов, введенных в рассмотрение Ю.И. Маниным в [1]. Доказывается, что при некоторых ограничениях на тип флагов все эти поля являются фундаментальными для естественного действия супералгебры Ли $\mathfrak{q}_n(\mathbb{C})$. При этом используются результаты работы [2], где та же задача рассматривалась для П-симметричных суперграссманианов.

We determine the Lie superalgebras of holomorphic vector fields on the complex supermanifolds of Π-symmetric flags, introduced by Yu.I. Manin (see [1]). The result is that, under certain restrictions, any vector field is fundamental for the natural action of the Lie superalgebra $\mathfrak{q}_n(\mathbb{C})$. We use the results of the paper [2], where the same problem for the Π-symmetric super-Grassmannians was considered.

**Ключевые слова:** супермногообразие П-симметричных флагов, векторное поле, супералгебра Ли, суперграссманиан, суперрасслоение.
**Keywords:** supermanifold of Π-symmetric flags, vector field, Lie superalgebra, super-Grassmannian, superbundle.

## 1. Супермногообразия флагов

Супермногообразие флагов типа $k|l$, где $k = (k_1, \dots, k_r)$, $l = (l_1, \dots, l_r)$, будет обозначаться через $\mathbf{F}^{m|n}_{k|l}$. Супермногообразие П-симметричных флагов типа $k = (k_1, \dots, k_r)$ в $\mathbb{C}^{n|n}$ является подсупермногообразием супермногообразия $\mathbf{F}^{n|n}_{k|k}$. Дадим явное описание этих супермногообразий (см. также [3]). Пусть заданы два числа $m, n \in \mathbb{N}$ и два набора неотрицательных целых чисел $k = (k_1, \dots, k_r)$ и $l = (l_1, \dots, l_r)$, такие, что $0 \le k_r \le \dots \le k_1 \le m$, $0 \le l_r \dots \le l_1 \le n$ и $0 < k_r + l_r < \dots < k_1 + l_1 < m + n$. Редукцией супермногообразия $\mathbf{F}^{m|n}_{k|l}$ является произведение $\mathbf{F}^m_k \times \mathbf{F}^n_l$ обычных многообразий флагов в пространствах

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 04-01-00647, 07-01-00230).

$\mathbb{C}^m = V_{\bar 0}$ и $\mathbb{C}^n = V_{\bar 1}$. Для каждого $s = 1, \dots, r$ фиксируем некоторые наборы $I_{s\bar 0} \subset \{1, \dots, k_{s-1}\}$ и $I_{s\bar 1} \subset \{1, \dots, l_{s-1}\}$, где $k_0 = m$, $l_0 = n$, такие, что $|I_{s\bar 0}| = k_s$, $|I_{s\bar 1}| = l_s$, и положим $I_s = (I_{s\bar 0}, I_{s\bar 1})$, $I = (I_1, \dots, I_r)$. Каждому набору $I_s$ поставим в соответствие матрицу

$$Z_{I_s} = \begin{pmatrix} X_s & \Xi_s \\ \mathrm{H}_s & Y_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, \dots, r, \tag{1}$$

размера $(k_{s-1}+l_{s-1})\times(k_s+l_s)$, такую, что $X_s = (x^s_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k_{s-1}\times k_s}(\mathbb{C})$, $Y_s = (y^s_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{l_{s-1}\times l_s}(\mathbb{C})$, а $\Xi_s = (\xi^s_{ij})$ и $\mathrm{H}_s = (\eta^s_{ij})$ состоят из некоторых нечетных элементов. При этом в матрице $Z_{I_s}$ в строках с номерами $i \in I_{s\bar 0}$ и $k_{s-1}+i$, $i \in I_{s\bar 1}$, должна стоять единичная подматрица $E_{k_s+l_s}$. Легко видеть, что наборам $I_{\bar 0} = (I_{1\bar 0}, \dots, I_{r\bar 0})$ и $I_{\bar 1} = (I_{1\bar 1}, \dots, I_{r\bar 1})$ отвечают карты на многообразиях флагов в некоторых открытых множествах $U_{I_{\bar 0}} \subset \mathbf{F}^m_{k_1,\dots,k_r}$ и $V_{I_{\bar 1}} \subset \mathbf{F}^n_{l_1,\dots,l_r}$ соответственно, локальными координатами в которых служат элементы строк матриц $X_s$ и $Y_s$, не входящие в единичную подматрицу. Таким образом, мы определили набор карт в открытых множествах $\{W_I = U_{I_{\bar 0}} \times V_{I_{\bar 1}}\}$ на $\mathbf{F}^m_{k_1,\dots,k_r} \times \mathbf{F}^n_{l_1,\dots,l_r}$, занумерованный наборами $I = (I_s)$ и покрывающий это многообразие. Рассмотрим $W_I$ как суперобласть, четные координаты в которой определены выше, а нечетными координатами служат элементы матриц $\Xi_s$ и $\mathrm{H}_s$, не входящие в единичную подматрицу. Таким образом, координаты в этой суперобласти определяются координатными матрицами $(Z_{I_1}, \dots, Z_{I_r})$. Зададим теперь функции перехода между двумя суперобластями, определенными наборами $I = (I_s)$ и $J = (J_s)$, с помощью формул

$$Z_{J_1} = Z_{I_1} C^{-1}_{I_1 J_1}, \quad Z_{J_s} = C_{I_{s-1} J_{s-1}} Z_{I_s} C^{-1}_{I_s J_s}, \quad s \geq 2, \tag{2}$$

где $C_{I_s J_s}$ — обратимая подматрица матрицы $Z_{I_s}$, состоящая из строк с номерами из $J_s$. Склеенные с помощью этих функций перехода суперобласти определяют некоторое супермногообразие, которое и называется супермногообразием флагов $\mathbf{F}^{m|n}_{k|l}$. В случае $r = 1$ супермногообразие флагов называется *суперграссманианом* и обозначается также через $\mathbf{Gr}_{m|n,k|l}$ (см. [2]).

Пусть теперь заданы число $n \in \mathbb{N}$ и набор неотрицательных целых чисел $k = (k_1, \dots, k_r)$, такой, что $0 < k_1 < \ldots < k_r < n$. Определим *супермногообразие* $\Pi$-*симметричных флагов* типа $k = (k_1, \dots, k_r)$ в $\mathbb{C}^{n|n}$ как некоторое подсупермногообразие супермногообразия $\mathbf{F}^{n|n}_{k|k}$. Его редукцией будет диагональное подмногообразие в $\mathbf{F}^n_k \times \mathbf{F}^n_k$, которое естественным образом отождествляется с $\mathbf{F}^n_k$. Для каждого $s = 1, \dots, r$ фиксируем некоторый набор $I_{s\bar 0} \subset \{1, \dots, k_{s-1}\}$, где $|I_{s\bar 0}| = k_s$ и $k_0 = n$, и рассмотрим определенную выше локальную карту на супермногообразии $\mathbf{F}^{n|n}_{k|k}$, соответствующую набору пар $I_s = (I_{s\bar 0}, I_{s\bar 0})$. Такие карты покрывают диагональ в $\mathbf{F}^n_k \times \mathbf{F}^n_k$, и в соответствующих им координатных матрицах (1) оба блока четных (соответственно нечетных) координат имеют одинаковые размеры. Определим подсупермногообразие $\Pi$-симметричных флагов в этих локальных картах уравнениями $X_s = Y_s$, $\Xi_s = \mathrm{H}_s$, которые, как легко видеть, согласованы с функциями перехода между двумя такими картами, заданными формулами (2). Соответствующие координатные матрицы (1) будут иметь вид

$$Z_{I_s} = \begin{pmatrix} X_s & \Xi_s \\ \Xi_s & X_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, \dots, r. \tag{3}$$

Мы будем считать четными и нечетными локальными координатами на подсупермногообразии элементы матриц $X_s$ и $\Xi_s$ соответственно, не входящие в единичную подматрицу. Функции перехода между двумя картами, отвечающими различным наборам, задаются формулами (2). Полученное супермногообразие можно рассматривать как «множество неподвижных точек» автоморфизма, индуцированного некоторым нечетным инволютивным преобразованием суперпространства $\mathbb{C}^{n|n}$ (см. [1]). Оно будет обозначаться через $\mathbf{\Pi F}^{n|n}_{k|k}$. В случае $r = 1$ супермногообразие П-симметричных флагов называется П-*симметричным суперграссманианом*; мы будем обозначать его также через $\mathbf{\Pi Gr}_{n|n,k|k}$ (см. [2]).

Далее мы будем использовать терминологию и обозначения, принятые в [1, 2]. Комплексное супермногообразие записывается в виде $(M, \mathcal{O})$, где $M$ — его редукция, являющаяся обычным комплексным многообразием, а $\mathcal{O}$ — структурный пучок. С каждым супермногообразием $(M, \mathcal{O})$ связан касательный пучок $\mathcal{T} = \mathcal{D}er\,\mathcal{O}$ на $M$, являющийся пучком супералгебр Ли относительно операции $[X, Y] = YX - (-1)^{p(X)p(Y)}XY$. Глобальные сечения пучка $\mathcal{T}$ называются ***голоморфными векторными полями*** на $(M, \mathcal{O})$; они составляют комплексную супералгебру Ли $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$, которая конечномерна, если $M$ компактно. Наша задача состоит в вычислении этой супералгебры Ли в случае, когда $(M, \mathcal{O})$ — супермногообразие П-симметричных флагов заданного типа.

Через $\mathfrak{q}_n(\mathbb{C})$ будет обозначаться подсупералгебра Ли в $\mathfrak{gl}_{n|n}(\mathbb{C})$, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}),$$

и снабженная обычной $\mathbb{Z}$-градуировкой. Заметим (см. [1]), что на супермногообразии $\Pi\mathbf{F}^{n|n}_{k|k}$ определено действие линейной супергруппы Ли $Q_n(\mathbb{C})$, соответствующей супералгебре Ли $\mathfrak{q}_n(\mathbb{C})$. Это действие во введенных выше картах записывается формулами вида

$$\begin{aligned} &(L, (Z_{I_1}, \dots, Z_{I_r})) \mapsto (\tilde{Z}_{J_1}, \dots, \tilde{Z}_{J_r}), \\ \text{где}\ \ &L \in Q_n(\mathbb{C}),\ \tilde{Z}_{J_1} = LZ_{I_1}C_1^{-1},\ \ \tilde{Z}_{J_s} = C_{s-1}Z_{I_s}C_s^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $C_1$ — обратимая подматрица матрицы $LZ_{I_1}$, стоящая в строках с номерами из $J_1$, а $C_s$, $s \geq 2$, — обратимая подматрица матрицы $C_{s-1}Z_{I_s}$, стоящая в строках с номерами из $J_s$. Это действие индуцирует некоторый гомоморфизм супералгебр Ли $\mu : \mathfrak{q}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$. В случае $r = 1$ в [2] доказано, что $\operatorname{Ker}\mu = \langle E_{2n} \rangle$, где $E_{2n}$ – единичная матрица порядка $2n$; это доказательство легко переносится на общий случай. Следовательно, $\mu$ индуцирует инъективный гомоморфизм супералгебр Ли $\mathfrak{q}_n(\mathbb{C})/\langle E_{2n} \rangle \to \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$. Мы докажем далее, что для большинства типов флагов этот гомоморфизм является изоморфизмом. При этом будет использоваться метод, разработанный в [3] для решения аналогичной задачи для супермногообразий флагов $\mathbf{F}^{m|n}_{k|l}$.

## 2. Замечания о суперрасслоениях

Напомним, что *морфизмом* комплексного супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ в комплексное супермногообразие $(M_1, \mathcal{O}_1)$ называется пара $F = (f, \tilde{f})$, где $f : M \to M_1$

— голоморфное отображение и $\tilde{f} : \mathcal{O}_1 \to f_*(\mathcal{O})$ — гомоморфизм пучков супералгебр (см. [1]). Морфизм супермногообразий называется изоморфизмом, если существует обратный к нему морфизм.

**Определение.** Говорят, что задано *суперрасслоение* со слоем $(F, \mathcal{O}_F)$, базой $(B, \mathcal{O}_B)$, пространством $(M, \mathcal{O}_M)$ и проекцией $P = (p, \tilde{p}) : (M, \mathcal{O}) \to (B, \mathcal{O}_B)$, если существуют открытое покрытие $\{U_i\}$ многообразия $B$ и изоморфизмы супермногообразий $\psi_i : (\pi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_M) \to (U_i, \mathcal{O}_B) \times (F, \mathcal{O}_F)$, такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} (\pi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_M) & \xrightarrow{\psi_i} & (U_i, \mathcal{O}_B) \times (F, \mathcal{O}_F) \\ \downarrow P & & \downarrow pr \\ (U_i, \mathcal{O}_B) & = & (U_i, \mathcal{O}_B) \end{array},$$

где $pr$ – проекция на первый сомножитель.

**Замечание.** Из формул (2) легко следует, что при $r > 1$ супермногообразие $\mathbf{\Pi F}^{n|n}_{k|k}$ представляет собой пространство суперрасслоения с базой $\mathbf{\Pi Gr}_{n|n,k_1|k_1}$ и слоем $\mathbf{\Pi} F^{k_1|k_1}_{k'|k'}$, где $k' = (k_2, \ldots, k_r)$. Из формул (3) следует, что проекция $P$ этого суперрасслоения эквивариантна относительно естественных действий супергруппы $Q_n(\mathbb{C})$ на его пространстве и базе.

Пусть $P = (p, \tilde{p}) : (M, \mathcal{O}) \to (M_1, \mathcal{O}_1)$ — морфизм супермногообразий. Векторное поле $v \in \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$ называется *проектируемым* относительно $P$, если существует такое поле $v_1 \in \mathfrak{v}(M_1, \mathcal{O}_1)$, что $\tilde{p}(v_1 f) = v(\tilde{p}(f))$ для любых $f \in \mathcal{O}_1$. При этом говорят, что *поле $v$ проектируется в поле $v_1$*. Проектируемые векторные поля составляют подалгебру $\overline{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})$ супералгебры Ли $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$.

В случае, если $P$ — проекция суперраслоения, гомоморфизм пучков $\tilde{p} : \mathcal{O}_1 \to p_*(\mathcal{O})$ инъективен, и поэтому каждое проектируемое поле $v$ проектируется в единственное векторное поле $v_1 = \mathcal{P}(v)$. Отображение $\mathcal{P} : \overline{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O}) \to \mathfrak{v}(M_1, \mathcal{O}_1)$ является гомоморфизмом супералгебр Ли. Поле $v \in \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$ называется *вертикальным*, если $\mathcal{P}(v) = 0$. Вертикальные поля составляют идеал $\operatorname{Ker} \mathcal{P}$ в супералгебре Ли $\overline{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})$.

Нам понадобится следующая теорема, по существу полученная в [4].

**Теорема 1.** *Пусть $P : (M, \mathcal{O}_M) \to (B, \mathcal{O}_B)$ — проекция суперрасслоения со слоем $(F, \mathcal{O}_F)$. Если $\mathcal{O}_F(F) = \mathbb{C}$, то любое векторное поле из $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_M)$ проектируемо относительно $P$.*

Для произвольного суперрасслоения $((M, \mathcal{O}_M), (F, \mathcal{O}_F), (B, \mathcal{O}_B), P)$ мы определили в [3] пучок $\mathcal{W}$ на $B$, сопоставляющий каждому открытому множеству $U \subset B$ множество всех вертикальных векторных полей на $(p^{-1}(U), \mathcal{O}_M)$. Там же было доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть $F$ компактно. Тогда $\mathcal{W}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_B$-модулей, ранг которого равен $\dim \mathfrak{v}(F, \mathcal{O}_F)$, причем $\mathcal{W}(B)$ совпадает с идеалом всех вертикальных векторных полей в $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_M)$.*

Следуя [3], построим по пучку $\mathcal{W}$ градуированный пучок супералгебр Ли, являющийся пучком $\mathcal{F}_B$-модулей, где $\mathcal{F}_B$ — структурный пучок обычного комплексного аналитического многообразия $B$. Для этого рассмотрим хорошо известную фильтрацию пучка $\mathcal{O}_B$

$$\mathcal{O}_B = \mathcal{J}^0 \supset \mathcal{J}^1 \supset \mathcal{J}^2 \ldots$$

степенями пучка идеалов $\mathcal{J}$, порожденного нечетными элементами пучка $\mathcal{O}_B$. Напомним, что с ней связан градуированный пучок супералгебр

$$\tilde{\mathcal{O}}_B = \bigoplus_{p\geq 0} (\tilde{\mathcal{O}_B})_p,$$

где $(\tilde{\mathcal{O}}_B)_p = \mathcal{J}^p/\mathcal{J}^{p+1}$. Супермногообразие $(B, \tilde{\mathcal{O}}_B)$ называется *ретрактом* супермногообразия $(B, \mathcal{O}_B)$.

Полагая $\mathcal{W}_{(p)} = \mathcal{J}^p\mathcal{W}$, получаем фильтрацию пучка $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{(0)} \supset \mathcal{W}_{(1)} \supset \ldots . \tag{5}$$

Определим градуированный пучок $\mathcal{F}_B$-модулей

$$\tilde{\mathcal{W}} = \bigoplus_{p\geq 0} \tilde{\mathcal{W}}_p, \quad \text{где} \quad \tilde{\mathcal{W}}_p = \mathcal{W}_{(p)}/\mathcal{W}_{(p+1)}. \tag{6}$$

$\mathbb{Z}_2$-градуировка пучков $\mathcal{W}_{(p)}$ индуцирует $\mathbb{Z}_2$-градуировку пучков $\tilde{\mathcal{W}}_p$, и при этом естественное отображение $\mathcal{W}_{(p)} \to \tilde{\mathcal{W}}_p$ будет четным.

### 3. Функции на супермногообразиях П-симметричных флагов

В этом пункте мы докажем, что описанное в п. 2 суперрасслоение супермногообразия П-симметричных флагов удовлетворяет условию теоремы 1. Заметим сначала, что верно следующее простое утверждение (см. [3]).

**Лемма 1.** *Пусть $(M, \mathcal{O}_M)$ — пространство суперрасслоения с базой $(B, \mathcal{O}_B)$ и слоем $(F, \mathcal{O}_F)$, причем $\mathcal{O}_B(B) = \mathbb{C}$ и $\mathcal{O}_F(F) = \mathbb{C}$. Тогда $\mathcal{O}_M(M) = \mathbb{C}$.*

Теперь докажем основной результат этого пункта.

**Теорема 3.** *Пусть $(M, \mathcal{O}) = \mathbf{\Pi F}^{n|n}_{k|k}$, тогда $\mathcal{O}(M) = \mathbb{C}$.*

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда $(M, \mathcal{O}) = \mathbf{\Pi Gr}_{n|n,k|k}$. Докажем сначала, что на ретракте $(M, \tilde{\mathcal{O}})$ П-симметричного суперграссманиана нет непостоянных голоморфных функций. Для этого воспользуемся теоремой Бореля – Вейля – Ботта (см. [5]). Многообразие $M = \mathbf{Gr}_{n,k}$ есть однородное пространство, изоморфное $G/H$, где $G = GL_n(\mathbb{C})$, а

$$H = \left\{ \left( \begin{array}{cc} A & 0 \\ C & B \end{array} \right) \middle| \; A \in GL_{n-k}(\mathbb{C}), \;\; B \in GL_k(\mathbb{C}) \right\}. \tag{7}$$

Редуктивная часть $R$ подгруппы $H$ определяется уравнением $C = 0$ и изоморфна группе $GL_{n-k}(\mathbb{C}) \times GL_k(\mathbb{C})$. Пусть $\varrho_1$, $\varrho_2$ – стандартные представления групп $GL_{n-k}(\mathbb{C})$, $GL_k(\mathbb{C})$ соответственно. Рассмотрим голоморфное векторное расслоение $\mathbf{E} \to M$, соответствующее локально свободному пучку $\mathcal{E} = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$. В [2] доказано, что $\mathbf{E}$ — однородное векторное расслоение, отвечающее вполне приводимому представлению $\varphi$ группы $H$, ограничение которого на $R$ имеет вид

$$\varphi|R = \varrho_1^* \otimes \varrho_2.$$

Поскольку $\tilde{\mathcal{O}}_p \simeq \bigwedge^p \mathcal{E}$, нам нужно найти пространство голоморфных сечений однородного расслоения $\bigwedge^p \mathbf{E}$, отвечающего представлению $\bigwedge^p \varphi = \bigwedge^p(\varrho_1^* \otimes \varrho_2)$. Для этого нужно найти доминантные старшие веса этого представления (см. [5]). Рассмотрим подалгебру Картана $\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, соответствующей группе Ли $G$. При $p > 0$ любой вес такого представления имеет вид:

$$\Lambda = -\mu_{i_1} - \dots - \mu_{i_p} + \mu_{j_1} + \dots + \mu_{j_p},$$

где $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n-k$, $n-k+1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n$. При $p = 0$ старший вес равен 0.

Вес $\Lambda = 0$, очевидно, доминантен. При $p > 0$ пусть $\mu^1 = \mu_{i_a}$, где $i_a = \max\{i_1, \dots i_p\}$, а $\mu^2 = \mu_{j_b}$, где $j_b = \min\{j_1, \dots, j_p\}$, тогда $(\Lambda, \mu^1 - \mu^2) < 0$. Следовательно, вес $\Lambda$ не является доминантным, так что имеем $\tilde{\mathcal{O}}_0(M) = \mathbb{C}$, $\tilde{\mathcal{O}}_p(M) = \{0\}$ при $p > 0$.

Рассмотрим теперь функции на $(M, \mathcal{O})$. Очевидно, $\mathcal{J}^p(M) = \{0\}$ при достаточно больших $p$. Для любого $p \geq 0$ имеется точная последовательность пространств сечений

$$0 \to \mathcal{J}^{p+1}(M) \to \mathcal{J}^p(M) \to \tilde{\mathcal{O}}_p(M).$$

Рассуждая по индукции, видим, что $\mathcal{J}^p(M) = \{0\}$ для $p > 0$. Далее заметим, что на любом супермногообразии есть глобально определенные постоянные функции. Следовательно, $\mathcal{O}(M) = \mathcal{J}^0(M) = \mathbb{C}$.

Используя полученный результат и лемму 1, легко доказать теорему в общем случае по индукции. $\square$

## 4. Векторные поля на супермногообразии $\Pi$-симметричных флагов

Супералгебра Ли векторных полей на суперграссманиане $\mathbf{\Pi Gr}_{n|n,k|k}$ была вычислена в работе [2]:

**Теорема 4.** *Пусть* $(M, \mathcal{O}) = \mathbf{\Pi Gr}_{n|n,k|k}$, *тогда*

1. $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \simeq \mathfrak{q}_n(\mathbb{C})/\langle E_{2n}\rangle$, *при* $(n,k) \neq (2,1)$;
2. $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \simeq \mathfrak{q}_2(\mathbb{C})/\langle E_4\rangle \supplus \langle z\rangle$, *при* $(n,k) = (2,1)$, *причем* $\mathrm{ad}\, z$ *действует на супералгебре Ли* $\mathfrak{q}_2(\mathbb{C})/\langle E_4\rangle$ *как градуирующий оператор.*

Далее приняты следующие обозначения: $(M, \mathcal{O}) = \mathbf{\Pi F}^{n|n}_{k|k}$, $(B, \mathcal{O}_B) = \mathbf{\Pi Gr}_{n|n,k_1|k_1}$, $(F, \mathcal{O}_F) = \mathbf{\Pi F}^{k_1|k_1}_{k'|k'}$. В силу теорем 1 и 4 проекция суперрасслоения $(M, \mathcal{O}) \to (B, \mathcal{O}_B)$ определяет гомоморфизм супералгебр Ли $\mathcal{P} : \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \to \mathfrak{v}(B, \mathcal{O}_B)$. Из эквивариантности проекции расслоения относительно действий (3) супергруппы Ли $Q_n(\mathbb{C})$ на $(M, \mathcal{O})$ и $(B, \mathcal{O}_B)$ следует, что соответствующие этим действиям гомоморфизмы $\mu : \mathfrak{q}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$ и $\mu_B : \mathfrak{q}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{v}(B, \mathcal{O}_B)$ удовлетворяют условию $\mu_B = \mathcal{P} \circ \mu$. Заметим, что база $(B, \mathcal{O}_B)$ нашего суперрасслоения не относится к исключительному случаю теоремы 5, так что гомоморфизм $\mathcal{P}$ сюръективен. Далее мы докажем, что $\mathcal{P}$ инъективен. Тогда $\mu = \mathcal{P}^{-1} \circ \mu_B$ также будет сюръективным гомоморфизмом, откуда, как мы видели в п. 1, следует, что $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \simeq \mathfrak{q}_n(\mathbb{C})/\langle E_{2n}\rangle$.

В связи с этим мы займемся изучением идеала вертикальных полей $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P} \subset \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$. В п. 2 мы построили локально свободный аналитический пучок $\tilde{\mathcal{W}}$

на $B$. Мы имеем также естественное действие группы $G = GL_n(\mathbb{C})$ на пучке $\mathcal{W}$, сохраняющее фильтрацию (5) и индуцирующее действие этой группы на пучке $\tilde{\mathcal{W}}$, сохраняющее градуировку. Это позволяет, в частности, рассматривать голоморфное векторное расслоение $\mathbf{W}_0 \to B$, отвечающее пучку $\tilde{\mathcal{W}}_0$, как однородное векторное расслоение. Используя обозначения доказательства теоремы 3, вычислим линейное представление подгруппы $H \subset G$, возникающее в слое этого расслоения над точкой $o = H \in B$. Этот слой естественно отождествляется с супералгеброй Ли $\mathfrak{v}(F, \mathcal{O}_F)$ векторных полей на $(F, \mathcal{O}_F)$.

Рассмотрим локальную карту в окрестности точки $o$ на П-симметричном суперграссманиане $(B, \mathcal{O}_B)$, соответствующую набору $I_{1\bar{0}} = \{n-k_1+1, \dots, n\}$. Соответствующая координатная матрица (3) записывается в виде

$$Z_{I_1} = \begin{pmatrix} X_1 & \Xi_1 \\ E_{k_1} & 0 \\ \Xi_1 & X_1 \\ 0 & E_{k_1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Эту карту дополним до атласа в окрестности слоя над точкой $o$ в $(M, \mathcal{O})$, используя некоторые наборы $I_{s\bar{0}}$, $s = 2, \dots, r$, и записывая соответствующие координатные матрицы в виде (3). В обозначениях (7) и (8) группа $H$ преобразует матрицу $Z_{I_1}$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ C & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C & B \end{pmatrix} Z_{I_1} = \begin{pmatrix} AX_1 & A\Xi_1 \\ CX_1 + B & C\Xi_1 \\ A\Xi_1 & AX_1 \\ C\Xi_1 & CX_1 + B \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица $Z_{I_2}$ преобразуется так:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} CX_1 + B & C\Xi_1 \\ C\Xi_1 & CX_1 + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & \Xi_2 \\ \Xi_2 & X_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} BX_2 + CX_1X_2 + C\Xi_1\Xi_2 & B\Xi_2 + CX_1\Xi_2 + C\Xi_1X_2 \\ B\Xi_2 + CX_1\Xi_2 + C\Xi_1X_2 & BX_2 + CX_1X_2 + C\Xi_1\Xi_2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{9}$$

Заметим, что координатные матрицы $Z_{I_s}$, $s \geq 2$, задают локальные координаты на слое $(F, \mathcal{O}_F)$. Чтобы записать в этих координатах действие группы $H$ на слое расслоения $\mathbf{W_0}$ над точкой $o$, нужно положить в (9) $X_1 = 0$, $\Xi_1 = 0$ и соответствующим образом преобразовать матрицы $Z_{I_s}$, $s \geq 3$. Отсюда следует, что нильрадикал группы $H$ и подгруппа $GL_{n-k_1}(\mathbb{C})$ ее редуктивной части $R$ действуют на $(F, \mathcal{O}_F)$ тривиально, а подгруппа $GL_{k_1}(\mathbb{C}) \subset R$ действует стандартным образом, т.е. как четная часть супергруппы $Q_{k_1}(\mathbb{C})$ (см. (4)). Далее, индуцированное действие группы $GL_{k_1}(\mathbb{C})$ в $\mathfrak{v}(F, \mathcal{O}_F)$ совпадает с присоединенным представлением четной части супергруппы $Q_{k_1}(\mathbb{C})$. Несложное вычисление приводит теперь к следующей лемме, в которой через $\mathrm{Ad}_{k_1}$ обозначено присоединенное представление группы $GL_{k_1}(\mathbb{C})$ в пространстве $\mathfrak{sl}_{k_1}(\mathbb{C})$, а через 1 – одномерное тривиальное представление.

**Лемма 2.** *Представление $\psi$ группы $H$ в слое $(\mathbf{W}_0)_o = \mathfrak{v}(F, \mathcal{O}_F)$ вполне приводимо. Если $\mathfrak{v}(F, \mathcal{O}_F) \simeq \mathfrak{q}_{k_1}(\mathbb{C})/\langle E_{2n}\rangle$, то*

$$\psi|_{\mathfrak{v}(F,\mathcal{O}_F)_{\bar{0}}} = \mathrm{Ad}_{k_1}, \quad \psi|_{\mathfrak{v}(F,\mathcal{O}_F)_{\bar{1}}} = \mathrm{Ad}_{k_1} + 1. \tag{10}$$

*Если* $\mathfrak{v}(F,\mathcal{O}_F)\simeq\mathfrak{q}_2(\mathbb{C})/\langle E_4\rangle \not\ni \langle z\rangle$ *(в этом случае* $r=2$*), то*

$$\psi|_{\mathfrak{v}(F,\mathcal{O}_F)_{\bar 0}}=\mathrm{Ad}_2+1,\ \ \psi|_{\mathfrak{v}(F,\mathcal{O}_F)_{\bar 1}}=\mathrm{Ad}_2+1. \tag{11}$$

Далее мы будем использовать карту на $\mathbf{\Pi F}^{n|n}_{k|k}$, соответствующую наборам $I_{s\bar 0}$, где $I_{1\bar 0}$ выбран выше, а $I_{s\bar 0}=\{k_{s-1}-k_s+1,\dots,k_{s-1}\}$, $s\geq 2$. Координатные матрицы этой карты имеют вид

$$Z_{I_s}=\begin{pmatrix} X_s & \Xi_s\\ E_{k_s} & 0\\ \Xi_s & X_s\\ 0 & E_{k_s}\end{pmatrix},$$

где $X_s=(x^s_{ij})$, $\Xi_s=(\xi^s_{ij})$. Область определения этой карты будет обозначаться через $U$.

**Лемма 3.** *Среди фундаментальных векторных полей на* $(M,\mathcal{O})$ *есть поля, которые в* $U$ *записываются в виде*

$$\frac{\partial}{\partial x^1_{ij}},\ \frac{\partial}{\partial \xi^1_{ij}},\ u_{ij}+\frac{\partial}{\partial x^2_{ij}},\ v_{ij}+\frac{\partial}{\partial \xi^2_{ij}},$$

*где* $u_{ij}$, $v_{ij}$ *– векторные поля, которые выражаются только через координаты из* $Z_{I_1}$.

*Доказательство* проведем, например, для поля $\frac{\partial}{\partial x^1_{11}}$. Это поле соответствует однопараметрической подгруппе $\exp(tE_{1,n-k_1+1})$. Действительно, действие этой подгруппы записывается в координатах следующим образом:

$$\begin{pmatrix} X_1 & \Xi_1\\ E_{k_1} & 0\\ \Xi_1 & X_1\\ 0 & E_{k_1}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} \tilde X_1 & \Xi_1\\ E_{k_1} & 0\\ \Xi_1 & X_1\\ 0 & E_{k_1}\end{pmatrix},\ Z_{I_s}\mapsto Z_{I_s},\ s\geq 2,$$

где

$$\tilde X_1=\begin{pmatrix} t+x^1_{11} & \dots & x^1_{1k_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x^1_{n-k_1,1} & \dots & x^1_{n-k_1,k_1}\end{pmatrix}.\square$$

Выберем некоторый базис $(v_q)$ супералгебры Ли $\mathfrak{v}(F,\mathcal{O}_F)$. В силу леммы 1 из [3] любое вертикальное векторное поле на $(M,\mathcal{O})$ однозначно записывается в области $U$ (или в любой подобласти $V\subset U$) в виде

$$v=\sum_q f_q v_q, \tag{12}$$

где $f_q$ – голоморфные функции на $U$ (или в $V$) от координат из матрицы $Z_{I_1}$. Далее нам понадобится

**Лемма 4.** *Пусть* $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}\neq\{0\}$. *Тогда существует поле* $v\in\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}\setminus\{0\}$, *для которого запись* (12) *имеет вид* $v=\sum_q f_q v_q$, *где* $f_q$ *– голоморфные функции от четных координат из матрицы* $Z_{I_1}$.

*Доказательство.* Пусть в записи (12) ненулевого вертикального поля $v$ встречаются функции $f_q$, зависящие, например, от $\xi^1_{ij}$. Тогда $v = \xi^1_{ij}v' + v''$, где $v'$ и $v''$ — вертикальные векторные поля, коэффициенты которых в записи (12) не зависят от $\xi^1_{ij}$, причем $v' \neq 0$. Используя лемму 3 и тот факт, что $\operatorname{Ker}\mathcal{P}$ – идеал в $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$, видим, что $v' = [v, \frac{\partial}{\partial \xi^1_{ij}}] \in \operatorname{Ker}\mathcal{P}$. Так из записи (12) можно последовательно исключить все координаты $\xi^1_{ij}$. □

Обозначим через $\mathcal{V}$ подпучок пучка $\mathcal{W}|_U$, состоящий из полей, в записи (12) которых $f_q$ – голоморфные функции от четных координат из матрицы $Z_{I_1}$. Имеем $\mathcal{W}|_U = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}_{(1)}|_U$. Из этого следует, что пучки $\mathcal{W}_0|_U$ и $\mathcal{V}$ естественно изоморфны. Далее мы будем отождествлять пучки $\mathcal{W}_0|_U$ и $\mathcal{V}$ с помощью этого изоморфизма.

Пусть $\alpha : \mathcal{W}(B) \to \mathcal{W}_0(B)$ — естественное отображение. Напомним, что $\alpha$ четно и $G$-эквивариантно. Очевидно, $\operatorname{Ker}\alpha$ – это множество полей, в записи (12) которых функции $f_q$ принадлежат идеалу, порожденному нечетными координатами $\xi^1_{ij}$. В локальной карте $U$ отображение $\alpha$ действует по формуле $\alpha(w) = w|_{\xi^1_{ij}=0}$, где $w \in \mathcal{W}_{(0)}(B)$, а через $w|_{\xi^1_{ij}=0}$ обозначен элемент из $\mathcal{V}(U)$, который получается из $w$, если положить все $\xi^1_{ij} = 0$.

Пусть $\mathbf{E}$ –однородное векторное расслоение над однородным многообразием $G/P$, $x_0 = P$, и пусть $v_{x_0} \in \mathbf{E}_{x_0}$ – $P$-инвариант. По элементу $v_{x_0}$ можно построить $G$-инвариантное сечение расслоения $\mathbf{E}$ следующим образом. Пусть $v_{x_1} \in \mathbf{E}_{x_1}$ определяется по формуле $v_{x_1} := g(v_{x_0})$, где $x_1 = gx_0$. Очевидно, это определение не зависит от выбора $g$. Действительно, пусть $x_1 = g_1x_0$ и $x_1 = g_2x_0$, тогда $g_2 = g_1h$, $h \in P$. Следовательно, $g_2(v_{x_0}) = (g_1h)(v_{x_0}) = g_1(v_{x_0})$.

Далее, мы применим эту конструкцию для построения $G$-инварианта $v$, соответствующего $P$-инварианту $v_{x_0}$ расслоения $\mathbf{W}_0$ в координатной окрестности $U$. В нашем случае $x_0 = P$ имеет координаты $X^1 = 0$, пусть $x_1$ имеет координаты $X^1 = A$, тогда

$$g = \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Пучки $\mathcal{W}|_U$, $\mathcal{W}_{(1)}|_U$ и $\mathcal{V}$ являются свободными аналитическими пучками $\mathcal{F}_B$-модулей. Обозначим соответствующие им расслоения через $\mathbf{W}|_U$, $\mathbf{W}_{(1)}|_U$ и $\mathbf{V}$. Имеем $\mathbf{W}|_U = \mathbf{V} \oplus \mathbf{W}_{(1)}|_U$. С использованием отождествления расслоений $\mathbf{W}_0|_U$ и $\mathbf{V}$, которое индуцируется изоморфизмом соответствующих пучков, действие группы $G$ на $\mathbf{W}_0$ над $U$ можно разложить в композицию вложения $\mathbf{V}$ в $\mathbf{W}|_U$, действия $G$ на $\mathbf{W}|_U$ и проекции $\mathrm{pr}_{\mathbf{V}}$ на слагаемое $\mathbf{V}$. Следовательно, $v_{x_1} = g(v_{x_0}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{V}}(v_{x_0} \circ g^{-1})$. Теперь для нахождения элемента $v$ в координатах нужно найти выражение координат в окрестности точки $x_1$ через координаты окрестности точки $x_0$.

$$\begin{pmatrix} E & A & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & A \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 & \Xi^1 \\ E & 0 \\ \Xi^1 & X^1 \\ 0 & E \end{pmatrix}, Z_{I_2}, \dots = \begin{pmatrix} X^1 + A & \Xi^1 \\ E & 0 \\ \Xi^1 & X^1 + A \\ 0 & E \end{pmatrix}, Z_{I_2}, \dots . \tag{13}$$

Докажем теперь следующую теорему.

**Теорема 5.** *Пусть $r > 1$ и $\mathfrak{v}(F, \mathcal{O}_F) \simeq \mathfrak{q}_{k_1}(\mathbb{C})/\langle E_{2k_1}\rangle$, тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{P} = \{0\}$ и $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \simeq \mathfrak{q}_n(\mathbb{C})/\langle E_{2n}\rangle$.*

*Доказательство.* Найдем сначала глобальные сечения расслоения $\mathbf{W}_0$. При этом, как в теореме 3, мы будем пользоваться теоремой Бореля - Вейля - Ботта (см. [5]). Представление $\psi$ группы $P$ в слое $\mathbf{W}_0$ описывается леммой 2. Из (10) следует, что старшие веса представления $\psi$ имеют вид: $\mu_{n-k_1+1}-\mu_n$ $(\times 2)$, 0. Первый вес не является доминантным, так как по определению супермногообразия П-симметричных флагов $k_1<n$, второй, очевидно, доминантен. Таким образом, пространство сечений расслоения $\mathbf{W}_0$ представляет собой чисто нечетный неприводимый $G$-модуль со старшим весом 0. Следовательно, $\mathcal{W}_0(B)=\mathcal{W}_0(B)_{\bar 1}\simeq\mathbb{C}$.

$H$-инвариант $v_{x_0}$, который является базисом одномерного инвариантного подпространства пространства $\mathfrak{v}(M_2,\mathcal{O}_2)_{\bar 1}$, соответствующего представлению 1, определяется однопараметрической подгруппой

$$\beta(\tau)=\begin{pmatrix} E_{k_1} & \tau E_{k_1}\\ \tau E_{k_1} & E_{k_1}\end{pmatrix}$$

в супергруппе $Q_{k_1}$.

В построенной выше карте имеем:

$$v_{x_0}=2\sum_{ij}\xi_{ij}^2\frac{\partial}{\partial x_{ij}^2}+u, \tag{14}$$

где $u$ – векторное поле, которое выражается только через координаты из $Z_{I_s}$, $s\geq 3$. Теперь из (13) получаем, что базисное сечение $v$ расслоения $\mathbf{W}_0$ в выбранной координатной окрестности имеет вид (14), т.е. по форме записи совпадает с $v_{x_0}$.

Пусть теперь $\operatorname{Ker}\mathcal{P}\neq\{0\}$ и $w\in\operatorname{Ker}\mathcal{P}/\{0\}$ – поле из леммы 4. Очевидно, в нашей локальной карте записи полей $w$ и $\alpha(w)$ будут иметь один и тот же вид, следовательно, $w=av$, $a\in\mathbb{C}$.

Далее, $\alpha([w,v_{ij}+\frac{\partial}{\partial\xi_{ij}^2}])=2a\frac{\partial}{\partial x_{ij}^2}=0$, поскольку коммутатор – четное векторное поле и принадлежит $\operatorname{Ker}\mathcal{P}$. Следовательно, $a=0$, что противоречит тому, что $w\neq 0$, и доказывает теорему.□

Рассмотрим теперь случай, когда слоем расслоения $(M,\mathcal{O})$ является суперграссманиан $\mathbf{\Pi Gr}_{2|2,1|1}$, т.е. суперграссманиан из пункта 2 теоремы 4.

**Теорема 6.** *Пусть* $r=2$ *и* $(F,\mathcal{O}_F)=\mathbf{\Pi Gr}_{2|2,1|1}$, *тогда* $\mathfrak{v}(\mathbf{\Pi F}^{n|n}_{2,1|2,1})\simeq\mathfrak{q}_n(\mathbb{C})/\langle E_{2n}\rangle$.

*Доказательство.* Как и в теореме 5, найдем глобальные сечения расслоения $\mathbf{W}_0$. Из (11) следует, что старшие веса представления $\psi$ имеют вид: $\mu_{n-k_1+1}-\mu_n$ $(\times 2)$, 0 $(\times 2)$, откуда по теореме Бореля-Вейля-Ботта получаем $\mathcal{W}_0(B)_{\bar 0}=\mathcal{W}_0(B)_{\bar 1}=\mathbb{C}$. Базисное сечение $\mathcal{W}_0(B)_{\bar 1}$ было вычислено в теореме 5. Оно имеет вид $v=2\xi_{11}^2\frac{\partial}{\partial x_{11}^2}$. Базисом одномерного инвариантного подпространства в $\mathfrak{v}(F,\mathcal{O}_F)_{\bar 0}$, соответствующего представлению 1 является $z=\xi_{11}^2\frac{\partial}{\partial\xi_{11}^2}$. Из (13) получаем, что в выбранной выше локальной карте базисное сечение $\mathcal{W}_0(B)_{\bar 0}$ имеет вид $s=\xi_{11}^2\frac{\partial}{\partial\xi_{11}^2}$.

Пусть опять $w$ – поле из леммы 4. Записи полей $\alpha(w)$ и $w$ имеют один и тот же вид, следовательно, $w=av+bs$, $a,b\in\mathbb{C}$, где либо $a$ либо $b$ не равно 0. Далее,

$$\begin{aligned}&\alpha([w,v_{11}+\frac{\partial}{\partial\xi_{11}^2}])=\alpha(2a\frac{\partial}{\partial x_{11}^2}+b\frac{\partial}{\partial\xi_{11}^2})=\\&2a\frac{\partial}{\partial x_{11}^2}+b\frac{\partial}{\partial\xi_{11}^2}\in\mathcal{W}_0(M_1)=\langle u,z\rangle,\end{aligned}$$

откуда, $a = b = 0$, что и доказывает теорему. $\square$

По индукции получаем следующий основной результат:

**Теорема 7.** *Пусть* $r > 1$, *тогда* $\mathfrak{v}(\mathbf{\Pi F}^{n|n}_{k|k}) \simeq \mathfrak{q}_n(\mathbb{C})/\langle E_{2n}\rangle$.

## Список литературы


[1] Манин Ю.И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[2] Onishchik A.L. Non-split supermanifolds associated with the cotangent bundle. Université de Poitiers, Département de Math., N 109. Poitiers, 1997.

[3] Вишнякова Е.Г. Векторные поля на супермногообразиях флагов. Современные проблемы математики и информатики. Вып.8, Ярославль, ЯрГУ, 2006, С 11-23.

[4] Башкин М.А. Векторные поля на прямом произведении комплексных супермногообразий. Современные проблемы математики и информатики. Вып. 3. Ярославль, ЯрГУ, 2000. С. 11-16.

[5] Ахиезер Д.Н. Однородные комплексные многообразия. Комплексный анализ – многие переменные - 4. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 10. М., ВИНИТИ, 1986. С. 223-276.