УДК 517.8

# КЛАССИФИКАЦИЯ РОТАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ ЗАМКНУТОЙ СТРУНЫ С МАССИВНЫМИ ТОЧКАМИ

**Миловидов А.Е., Шаров Г.С.**
Кафедра функционального анализа и геометрии

*Поступила в редакцию 08.10.2007, после переработки 22.10.2007.*

Для замкнутой релятивистской струны с $n$ массивными точками проведена классификация ротационных состояний (отвечающих равномерному вращению системы). Эти состояния разделены на три класса: гипоциклоидальные, линейные и центральные. Исследованы характерные особенности этих классов.

For the closed relativistic string with $n$ point-like masses the rotational states (uniform rotations of the system) are classified. These states are divided into three classes: hypocycloidal, linear and central states. Specific features of these classes are studied.

**Ключевые слова:** замкнутая струна, классы ротационных состояний.
**Keywords:** closed string, classes of rotational states.

## 1. Ротационные состояния

Струнная модель экзотического адрона в виде замкнутой струны с $n$ точечными массами описывает механизм конфайнмента, а также квазилинейные траектории Редже — зависимость углового момента от квадрата энергии адрона [1] – [3]. Эта модель обобщает модель бариона «треугольник» при $n = 3$ [3] и различные струнные модели глюбола при $n = 2$ [4] – [7].

В работе [1] для замкнутой струны с натяжением $\gamma$, несущей $n$ точечных масс $m_1$, $m_2$, … $m_n$, были найдены точные решения уравнений движения, описывающие ротационное состояние — равномерное вращение системы. В этих решениях мировая поверхность струны $X^\mu(\tau,\sigma)$ в пространстве Минковского $R^{1,3}$ имеет вид

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + e_0^\mu(a_0\tau + b_0\sigma) + u(\sigma)\cdot e^\mu(\omega\tau) + \tilde{u}(\sigma)\cdot \acute{e}^\mu(\omega\tau). \qquad (1)$$

Здесь

$$e^\mu(\omega\tau) = e_1^\mu\cos\omega\tau + e_2^\mu\sin\omega\tau, \qquad \acute{e}^\mu(\omega\tau) = -e_1^\mu\sin\omega\tau + e_2^\mu\cos\omega\tau,$$

векторы $e_0$, $e_1$, $e_2$, $e_3$ образуют ортонормированный базис в $R^{1,3}$ с метрическим тензором $\eta_{\mu\nu} = (e_\mu, e_\nu) = \mathrm{diag}\,(1;-1;-1;-1)$. Область $\sigma_0(\tau) < \sigma < \sigma_n(\tau)$ изменения параметра $\sigma$ разделена траекториями массивных точек $\sigma = \sigma_i(\tau)$, $i = 0,1,\ldots,n$, их уравнения в $R^{1,3}$ имеют вид

$$x^\mu = x_i^\mu(\tau) \equiv X^\mu(\tau,\sigma_i(\tau)); \qquad (2)$$

при $i=0$ и $i=n$ они описывает одну и ту же траекторию $n$-ой точки

$$X^\mu(\tau^*,\sigma_n(\tau^*)) = X^\mu(\tau,\sigma_0(\tau)) \tag{3}$$

на трубкообразной мировой поверхности. Два параметра $\tau$ и $\tau^*$, входящие в условие замыкания мировой поверхности (3), связаны соотношением $\tau^*=\tau^*(\tau)$ [3].

Для ротационных состояний (1) функции

$$\sigma_i(\tau)=\sigma_i=\text{const},\quad i=0,2,\dots,n;\qquad \tau^*-\tau=2\pi\theta=\text{const}, \tag{4}$$

$$\frac{m_i\omega}{\gamma}\big[\dot x_i^2(\tau)\big]^{-1/2}=h_i=\text{const},\qquad i=1,2,\dots,n \tag{5}$$

являются константами, причем без потери общности можно положить

$$\sigma_0=0,\qquad \sigma_n=2\pi.$$

Функция

$$u(\sigma)=\begin{cases} A_1\cos\omega\sigma+B_1\sin\omega\sigma, & \sigma\in[0,\sigma_1],\\ A_2\cos\omega\sigma+B_2\sin\omega\sigma, & \sigma\in[\sigma_1,\sigma_2],\\ \dots \\ A_n\cos\omega\sigma+B_n\sin\omega\sigma, & \sigma\in[\sigma_{n-1},2\pi],\end{cases} \tag{6}$$

и подобная ей $\tilde u(\sigma)=\tilde A_i\cos\omega\sigma+\tilde B_i\sin\omega\sigma$, $\sigma\in[\sigma_{i-1},\sigma_i]$ непрерывны, но их производные имеют разрывы на линиях $\sigma=\sigma_i$ (позициях масс $m_i$).

Функция (1) является решением уравнений движения струны

$$\frac{\partial^2X^\mu}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2X^\mu}{\partial\sigma^2}=0,$$

уравнений на траекториях массивных точек (2) ($i=1,\dots,n-1$)

$$m_i\frac{d}{d\tau}\frac{\dot x_i^\mu(\tau)}{\sqrt{\dot x_i^2(\tau)}}+\gamma\Big[X'^\mu(\tau,\sigma_i-0)-X'^\mu(\tau,\sigma_i+0)\Big]=0, \tag{7}$$

$$m_n\frac{d}{d\tau}\frac{\dot x_0^\mu(\tau)}{\sqrt{\dot x_0^2(\tau)}}+\gamma\Big[X'^\mu\big(\tau^*(\tau),2\pi\big)-X'^\mu(\tau,0)\Big]=0, \tag{8}$$

и удовлетворяет условиям ортонормальности

$$(\dot X\pm X')^2=0 \tag{9}$$

(здесь $\dot X^\mu\equiv\partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu\equiv\partial_\sigma X^\mu$), если значения параметров $\omega$, $\theta$, $\sigma_i$, $h_i$, $A_i$, $B_i$ связаны приведенными ниже соотношениями [1].

Условия непрерывности мировой поверхности $X^\mu(\tau,\sigma)$ на линиях (2) (непрерывность функций $u(\sigma)$ и $\tilde u(\sigma)$ при $\sigma=\sigma_i$), условие замыкания (3) и уравнения (7), (8) приводят к равенству

$$b_0=-\theta a_0 \tag{10}$$

и к следующей системе уравнений относительно записанных в матричном виде

$$\mathcal{A}_i=\begin{pmatrix}A_i\\ \tilde A_i\end{pmatrix},\qquad \mathcal{B}_i=\begin{pmatrix}B_i\\ \tilde B_i\end{pmatrix},\qquad i=1,\dots,n \tag{11}$$

множителей функций $u(\sigma)$ и $\tilde{u}(\sigma)$:

$$\mathcal{A}_{i+1} = (1 + h_i C_i S_i)\,\mathcal{A}_i + h_i S_i^2 \mathcal{B}_i, \quad \mathcal{B}_{i+1} = -h_i C_i^2 \mathcal{A}_i + (1 - h_i C_i S_i)\,\mathcal{B}_i, \quad 1 \le i < n. \tag{12}$$

$$\mathcal{A}_1 = M_\theta (C\mathcal{A}_n + S\mathcal{B}_n), \qquad \mathcal{B}_1 = M_\theta \Big[ -(S + h_n C)\,\mathcal{A}_n + (C - h_n S)\,\mathcal{B}_n \Big]. \tag{13}$$

Здесь и ниже используются обозначения $M_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{pmatrix}$,

$$C_i = \cos\omega\sigma_i, \quad S_i = \sin\omega\sigma_i, \quad C \equiv C_n = \cos 2\pi\omega, \quad S \equiv S_n = \sin 2\pi\omega,$$
$$C_\theta = \cos 2\pi\theta\omega, \quad S_\theta = \sin 2\pi\theta\omega, \quad c_i = \cos\omega(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \quad s_i = \sin\omega(\sigma_i - \sigma_{i-1}).$$

Условие существования нетривиальных решений системы (12), (13) сводится к виду [1]

$$2(C_\theta - C) + S\sum_{i=1}^n h_i - \sum_{i<j} h_i h_j \sin\omega(\sigma_j - \sigma_i)\cdot\sin\omega(2\pi - \sigma_j + \sigma_i) +$$
$$+ \sum_{i<j<k} h_i h_j h_k \sin\omega(\sigma_j - \sigma_i)\cdot\sin\omega(\sigma_k - \sigma_j)\cdot\sin\omega(2\pi - \sigma_k + \sigma_i) - \cdots - (-1)^n \prod_{i=1}^n h_i s_i = 0. \tag{14}$$

Кроме этого, к ограничениям на значения параметров (11) приводит подстановка выражения (1) в условия ортонормальности (9):

$$\omega^2(A_i^2 + B_i^2 + \tilde{A}_i^2 + \tilde{B}_i^2) = a_0^2(1 + \theta^2), \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{15}$$
$$\omega^2(\tilde{A}_i B_i - A_i \tilde{B}_i) = a_0^2\theta, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Уравнения (15) независимы, а из уравнений (16) только одно независимо, например, с $i = 1$. Если оно выполнено, то из уравнений (12) следует выполнение остальных.

## 2. Гипоциклоидальные состояния

Ротационные состояния (1), характеризуемые значением параметра (4)

$$\theta \ne 0,$$

будем называть гипоциклоидальными. Как было показано в работе [1], они описывают равномерное вращение замкнутой струны, имеющей форму объединения отрезков гипоциклоиды, соединенных под ненулевыми углами в массивных точках.

Для гипоциклоидальных состояний при выполнении условия (14) с помощью системы (12), (13) можно выразить столбец $\mathcal{B}_1$ через $\mathcal{A}_1$ (последний можно выбрать произвольно):

$$B_1 = \frac{-C_* A_1 + S_\theta \tilde{A}_1}{S_*}, \qquad \tilde{B}_1 = -\frac{S_\theta A_1 + C_* \tilde{A}_1}{S_*}. \tag{17}$$

Здесь выражения

$$C_* = C - C_\theta - h_1 C_1 (SC_1 - S_1 C - h_2 s_2 s_3) - h_2 C_2 s_3,$$
$$S_* = S - h_1 S_1 (SC_1 - S_1 C - h_2 s_2 s_3) - h_2 S_2 s_3$$

приведены для случая $n = 3$, переход к $n = 2$ обеспечивается равенством $s_3 = 0$.

Подстановка величин (17) в первые уравнения (15), (16) приводит к двум уравнениям, из которых следует равенство

$$\frac{C_*^2 + S_*^2 + S_\theta^2}{S_* S_\theta} = \frac{1+\theta^2}{\theta}. \tag{18}$$

Значения параметров $\omega$ (безразмерных частот), $\theta$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ следует находить из системы уравнений (14), (18), дополненной $n-1$ уравнениями

$$C_i(h_iC_i+2S_i)(A_i^2+\tilde{A}_i^2)+S_i(h_iS_i-2C_i)(B_i^2+\tilde{B}_i^2) = 2(C_i^2-S_i^2-h_iC_iS_i)(A_iB_i+\tilde{A}_i\tilde{B}_i), \tag{19}$$

— разностями уравнений (15), преобразованными с учетом (12).

Приведем вид данной системы уравнений в важном для приложений случае $n = 2$. При этом уравнения (14) и (18) имеют соответственно вид

$$2(C_\theta - C) + (h_1 + h_2)\, S - h_1 h_2 s_1 s_2 = 0, \tag{20}$$

$$2S + (h_1 + h_2)\, C - h_1 h_2 c_1 s_2 = S_\theta(\theta + \theta^{-1}). \tag{21}$$

При $n = 2$ единственное уравнение (19) после подстановки (17) сводится к простому виду

$$\sin\big[2\omega(\pi - \sigma_1)\big] = 0$$

и определяет следующий набор допустимых значений $\sigma_1$:

$$\sigma_1 = \pi + \frac{\pi k}{2\omega}, \quad k \in Z, \quad |k| < 2\omega. \tag{22}$$

Уравнения, связывающие массы $m_i$ и скорости массивных точек $v_i$, следуют из равенств (5), (15), (16), (18):

$$a_0 = \frac{m_1\omega}{\gamma h_1\sqrt{1-v_1^2}} = \cdots = \frac{m_n\omega}{\gamma h_n\sqrt{1-v_n^2}}, \tag{23}$$

$$v_1^2 = \theta\frac{S - h_2 s_1 s_2}{S_\theta}, \qquad v_2^2 = \theta\frac{S - h_1 s_1 s_2}{S_\theta}, \quad (n = 2). \tag{24}$$

Система уравнений (20)–(22), как и обобщающая ее на случай $n > 2$ система (14), (18), (19), имеет счетный набор решений ($\omega$, $\theta$, $\sigma_i$), каждое из которых отвечает определенному типу состояния (1). Различные типы решений (1) различаются числом и расположением точек возврата вращающейся гипоциклоиды (сечения $t = \mathrm{const}$ мировой поверхности), которые движутся со скоростью света.

Классификацию этих решений проведем в рамках предложенного ранее подхода [1, 3], а именно, при фиксированных значениях $\gamma$, $a_0$ для заданного топологического типа решения (1) рассмотрим предел $m_i \to 0$. В этом пределе величины

$h_i$ стремятся к нулю, скорости $v_i$ стремятся к скорости света, а значения параметров $2\omega$ и $2\omega\theta$ стремятся к целым числам [1], для которых мы введем следующие обозначения:

$$n_1 = \Big| \lim_{m_i \to 0} 2\omega \Big|, \qquad n_2 = \lim_{m_i \to 0} 2\theta\omega. \tag{25}$$

В силу неравенства $|\theta| < 1$ и условий (14), (22), приводящих к равенству

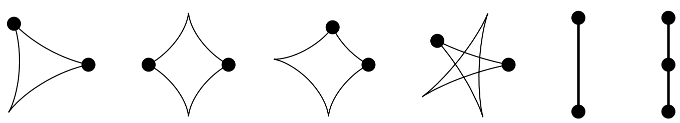


*Рис. 1: Примеры ротационных состояний с указанием типа* $(n_1, n_2, k)$.

Примеры ротационных состояний (1) (сечения $t = \text{const}$ мировой поверхности) приведены на рис. 1 с указанием соответствующих значений $n_1$, $n_2$, $k$ (22), (25). Обозначены позиции массивных точек. Первые четыре состояния являются гипоциклоидальными и отвечают $n = 2$. Параметры $\omega$ и $\theta$ для этих состояний определены из системы двух уравнений (20) и (21) при заданных значениях параметров $m_1 = m_2$ и $k$ в (22); значения остальных параметров — из уравнений (12), (17), (23), (24).

Последние два из показанных на рис. 1 состояний, характеризуются значением $\theta = 0$ (следовательно, $n_2 = 0$) и представляют соответственно линейные и центральные состояния.

## 3. Линейные состояния

Ротационные состояния (1), характеризуемые значением параметра $\theta = 0$ и ненулевыми скоростями массивных точек ($v_i \neq 0$), будем называть линейными.

Они описывают равномерное вращение имеющей прямолинейную форму несколько раз сложенной замкнутой струны. Эти состояния можно рассматривать как частный случай гипоциклоидальных и при $n = 2$ классифицировать их с помощью тех же целочисленных параметров (22), (25), но в рамках ограничения $n_2 = 0$. Два оставшихся параметра $n_1$ и $k$ связаны ограничениями (26) и, следовательно, являются четными.

Простейшее линейное состояние, имеющее тип (2,0,0), показано на рис. 1. Оно отвечает равномерному вращению системы из двух масс, связанных двумя прямолинейными отрезками струны. Если один из этих отрезков заменить на трехзвенную ломаную с двумя точками возврата (они движутся со скоростью света), которая лежит на той же прямой, то мы получим линейное состояние с типом (4,2,0). Симметричное расположение точек возврата на отрезках $[0, \sigma_1]$ и $[\sigma_1, 2\pi]$ при $\sigma_1 = \pi$ определяет тип (4,0,0).

При задании параметризации (1) линейного состояния в столбце (11) $\mathcal{A}_1$ положим $\tilde{A}_1 = 0$ (направим вектор $e(\omega\tau)$ вдоль струны). В силу равенства $S_\theta = 0$ и уравнений (17), (10), (12) получаем, что $\tilde{B}_1 = 0$, $b_0 = 0$ и $\tilde{u}(\sigma) = 0$. Следовательно, параметризация (1) мировой поверхности линейного состояния имеет вид

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + e_0^\mu a_0 \tau + u(\sigma) \cdot e^\mu(\omega\tau). \tag{27}$$

Параметры, входящие в это выражение по-прежнему определяются уравнениями (12) – (23), с учетом того факта, что для линейных состояний (27) при $\theta = 0$ уравнения (16) обращаются в тождества, а уравнения (18) и (21) теряют смысл (заменяются уравнением $\theta = 0$). Значения параметров $\omega$, $\sigma_i$ определяются из системы (14), (19). В случае $n = 2$ значение $\sigma_1$ по-прежнему выражается из формулы (22) с точностью до четного числа $k$, а уравнение (14) имеет вид (20). Подстановка в него $C_\theta = 1$ и следующих из (22) равенств $s_2 = (-1)^k s_1 = s_1$, $2s_1^2 = 1 - C$, приводит это уравнение к виду

$$(h_1 h_2 - 4)\,\mathrm{tg}\,\pi\omega = 2(h_1 + h_2). \tag{28}$$

Скорости массивных точек для линейных состояний определяются выражениями

$$v_i = 2(4 + h_i^2)^{-1/2}, \tag{29}$$

следующими из уравнений (15), (17), (22), (28) при $\theta = 0$.

### 4. Центральные состояния

Центральными состояниями будем называть ротационные состояния (1) с $\theta = 0$, $n_2 = 0$, в которых одна или несколько массивных точек покоятся в центре вращения. Пример такого состояния с $n = 3$ массивными точками показан на рис. 1 справа.

Мировую поверхность центрального состояния без потери общности можно задать в виде (27). Вычислим значения параметров в этом выражении для центрального состояния с $n = 3$, массой $m_3$, покоящейся в центре вращения ($v_3 = 0$), и массами $m_1$, $m_2$, движущимися с ненулевыми скоростями $v_1$ и $v_2$. Равенство $v_3 = 0$

приводит для данной системы к равенству $u(0) = 0$ функции (6), что равносильно уравнению
$$A_1 = 0, \tag{30}$$
которое делает невозможным использование для данного состояния уравнений (17).

Выразив с помощью уравнений (12) коэффициенты $A_2$, $B_2$, $A_3$, $B_3$ через $B_1$, например, $A_3 = (h_1 s_1^2 + h_2 S_2^2 - h_1 h_2 S_2 s_1 s_2)\, B_1$, и подставив эти выражения в уравнения (13), получим с учетом равенства (30) два уравнения, связывающие неизвестные пока значения параметров $\omega$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $h_1$, $h_2$. Эти уравнения, имеющие следствием уравнение (14), после преобразований сводятся к виду
$$s_1 + s_2 c_3 + c_2 s_3 = h_2 s_2 s_3, \qquad s_3 + s_1 c_2 + c_1 s_2 = h_1 s_1 s_2. \tag{31}$$

Другие соотношения между упомянутыми параметрами следуют из двух уравнений (19) с $i = 1$ и $i = 2$. Они после преобразований принимают вид
$$h_1 = 2\frac{c_1}{s_1} = 2\operatorname{ctg}\omega\sigma_1, \qquad h_2 = 2\frac{c_3}{s_3} = 2\operatorname{ctg}\omega(\pi - \sigma_1), \tag{32}$$
а также включают равенство
$$\sigma_2 - \sigma_1 = \pi, \tag{33}$$
влекущее $c_2 = c_1 c_3 - s_1 s_3 = \cos\pi\omega$, $s_2 = s_1 c_3 + c_1 s_3 = \sin\pi\omega$, $S = 2 s_2 c_2$.

С учетом последних соотношений определим все коэффициенты функции $u(\sigma)$:
$$A_2 = 2 s_1 c_1 B_1, \quad B_2 = (s_1^2 - c_1^2) B_1, \quad A_3 = -S B_1, \quad B_3 = C B_1,$$
найдем из уравнения (15) $a_0 = \omega B_1$, и, исследовав выражение $\dot{X}^\mu$ при $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$, вычислим скорости массивных точек. Они после учета равенства (33) сводятся к виду
$$v_1 = s_1, \qquad v_2 = s_3.$$

Эти равенства в совокупности с уравнениями (32) позволяют выразить
$$h_i = 2\sqrt{v_i^{-2} - 1}, \qquad i = 1, 2$$
(что совпадает с уравнениями (29)) и, с учетом равенств (23), получить уравнение
$$\frac{m_1 v_1}{1 - v_1^2} = \frac{m_2 v_2}{1 - v_2^2}.$$

Если исходными данными центрального ротационного состояния являются значения параметров $m_1$, $m_2$, $\gamma$, $v_1$, то, определив с помощью последних уравнений $v_2$, $h_1$ и $h_2$, мы можем вычислить из системы уравнений (32) значения
$$\omega = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{h_1} + \operatorname{arctg}\frac{2}{h_2}\right) + n_1^*; \qquad \sigma_1 = \frac{1}{\omega}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{h_1} + k\right),$$
а также значения остальных параметров в выражении (27) с помощью приведенных здесь формул.

Авторы признательны РФФИ за поддержку в рамках проекта 05-02-16722.

### Список литературы

[1] Шаров Г.С. Спектр состояний замкнутой струны, нагруженной массивными точками. // Вестник ТвГУ, Сер. Прикладная математика, 2007. Вып. № 5 [33]. С. 21-27.

[2] Шаров Г.С. Струнные модели бариона и траектории Редже. // Ядерная физика. 1999. Т. 62. №10. С. 1831.

[3] Sharov G.S. String baryonic model "triangle": Hypocycloidal solutions and the Regge trajectories. // Physical Review D. 1998 V. 58. №11. P. 114009.

[4] Sharov G.S. String models of glueball and Regge trajectories. / hep-ph/0612277.

[5] Миловидов А.Е., Шаров Г.С. Замкнутые релятивистские струны в пространствах с нетривиальной геометрией. // Теоретич. и математич. физика. 2005. Т. 142. №1. С. 72.

[6] Pons J.M., Russo J.G., Talavera P. Semiclassical string spectrum in a string model dual to large N QCD. // Nucl. Phys. B. 2004 V. 700. P. 71, hep-th/0406266.

[7] Mathieu V., Semay C., Brau F. Casimir scaling, glueballs and hybrid gluelumps. // Eur. Phys. J. A. 2006, V. 27. P. 225, hep-ph/0511210