УДК 330.322

ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ МНОГОПЕРИОДНОГО ПОРТФЕЛЬНОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИЯХ РИСКА

Нефедов А.Н.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 10.10.2007, после переработки 19.10.2007.

Рассматривается постановка задачи выбора оптимального, с точки зрения инвестора, многопериодного инвестиционного портфеля в условиях стохастической неопределенности. Вводится новый критерий, количественно характеризующий динамику капитализации портфеля, и предлагается метод его оценки. Рассматривается применение имитационного моделирования для решения поставленной задачи.

The target setting of optimal choice of prolonged investment portfolio in conditions of stochastic uncertainty, depending on the investor's standpoint, is investigated. The new criterion, which characterizes quantitatively the dynamics of portfolio capitalization, is introduced, and the method of rating it is called to attention. Application of imitating modeling for the formulated problem is considered.

Ключевые слова: портфель, инвестиционный коридор, функция полезности, дисконтирование, имитационное моделирование.
Keywords: portfolio, investment corridor, utility function, discounting, imitation modeling.

Введение

В теории инвестиционного анализа разработано множество подходов [1, 2] к решению задачи формирования оптимального, с точки зрения лица, принимающего решения (ЛПР), инвестиционного портфеля. Но их использование обосновано только при выполнении жестких предположений относительно характеристик финансовых титулов портфеля, сроков его реализации, предпочтений ЛПР, а также объема и свойств исходных данных. Указанные предположения, как правило, не соответствуют реальности. Поэтому представляется актуальной задача разработки методов оценки многопериодных портфельных инвестиций, не критичных к нарушению допущений классических подходов.

В данной работе рассматривается применение имитационного моделирования к решению задачи формирования оптимального многопериодного инвестиционного портфеля в условиях стохастической неопределенности при стремлении ЛПР к его максимальной остаточной стоимости. Вводится новый критерий, количественно характеризующий динамику капитализации портфеля. Предлагается метод оценки введенного критерия, основанный на понятии инвестиционного коридора и использующий механизм дисконтирования и наращения капитала для компенсации выходов траектории портфеля за границы коридора.

1. Имитационная модель

В условиях стохастической неопределенности динамика капитализации портфеля представляет собой случайный процесс, распределение которого при отсутствии ограничений на характеристики финансовых титулов портфеля, как правило, неизвестно, что исключает возможность аналитического решения многопериодной портфельной задачи. В связи с этим предлагается рассматривать неопределенность на уровне параметров инвестиционной среды, обуславливающих капитализацию портфеля в каждый момент анализируемого периода. Их перечень и связь с капитализацией определяется использованием расчетной модели капитализации, которой может быть, например, известная модель остаточной стоимости [3] или ее модификации [4].

Формально модель портфеля $\mathbf{z} \in R_+^N$ описывается парой $\langle C_t, \mathbf{\Theta} \rangle$, где N – количество титулов портфеля, $C_t\left(C_{t-1}\left(\mathbf{z}\right), x_1\left(t\right), ..., x_n\left(t\right)\right)$ – функция расчета капитализации портфеля в момент времени t, а $\mathbf{\Theta} = \{\varrho_1, ..., \varrho_n\}$ – совокупность вероятностных моделей параметров $x_1\left(t\right), ..., x_n\left(t\right)$ инвестиционной среды, обуславливающих капитализацию (например, кредитные процентные ставки, уровень инфляции и пр.). Структура функции $C_t\left(C_{t-1}\left(\mathbf{z}\right), x_1\left(t\right), ..., x_n\left(t\right)\right)$ определяется выбранной аналитиком (в частности ЛПР) расчетной моделью капитализации. Предполагается, что $x_1\left(t\right), ..., x_n\left(t\right),\ \forall t \in [1, T]$ – независимые между собой случайные величины, каждая из которых описывается распределением с плотностью [5]:

$$\varrho_i(x_i) = (1 - \varepsilon_i) N(a_i, \sigma_i^2) + \varepsilon_i \phi(x_i),$$

где $N(a_i, \sigma_i^2)$ – плотность усеченного нормального распределения с математическим ожиданием a_i и дисперсией σ_i^2, $\phi(x_i)$ – плотность равномерного распределения на отрезке $[a_i - 3\sigma_i, a_i + 3\sigma_i]$ или $[0, a_i + 3\sigma_i]$, если $a_i - 3\sigma_i \leq 0$, а $\varepsilon_i \in [0, 1]$ – вероятность того, что величина x_i распределена по равномерному закону $\phi(x_i)$. Параметры $a_i, \sigma_i, \varepsilon_i$ оцениваются с использованием критериев математической статистики [6] на основе статистических данных.

При помощи имитационного моделирования генерируется множество реализаций $\left\{\tilde{\mathbf{x}}^i\left(t\right) | t \in [1, T]\right\}_{i=1}^m$, инвестиционной среды, где $\tilde{\mathbf{x}}^i\left(t\right) = \left(\tilde{x}_1^i\left(t\right), ..., \tilde{x}_n^i\left(t\right)\right)$, на основе которого формируется множество $\left\{\tilde{C}_t^i\left(\mathbf{z}\right) | t \in [1, T]\right\}_{i=1}^m$ траекторий для рассматриваемой структуры $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_N)$ портфеля. Конечная точка $C_T\left(\tilde{C}_t\left(\mathbf{z}\right)\right)$ траектории $\tilde{C}_t\left(\mathbf{z}\right)$ представляет собой остаточную стоимость портфеля на момент достижения инвестиционного горизонта T, которая является основным критерием оценки портфеля.

При наличии дополнительной исходной информации, формируемой методами анализа сценариев [7]: пессимистичный $\underline{C}\left(t\right)$ и оптимистичный $\overline{C}\left(t\right)$, с точки зрения ЛПР, сценарии реализации портфеля; становится возможным количественно оценить динамику капитализации портфеля, что позволит ранжировать портфели по предпочтению при равных остаточных стоимостях. Зависимость оценки $q \in R^1$ от всей траектории $\tilde{C}_t(\mathbf{z})$ представим в виде функции $q\left(\tilde{C}_t(\mathbf{z})\right)$.

В качестве механизма выбора оптимального портфеля используется концепция ожидаемой полезности [8]. Пусть u функция полезности, определенная на показателях остаточной стоимости и динамики капитализации портфеля. Тогда задача поиска портфеля есть задача максимизации ожидаемой полезности:

$$\mathbf{z}_m^* = \arg\max_{\mathbf{z}\in Z}\left\{\bar{u}_m\left(C_T\left(C_t(\mathbf{z})\right), q\left(C_t(\mathbf{z})\right)\right)\right\}, \tag{1}$$

$$Z = \left\{\mathbf{z}:\ \sum_{i=1}^{N} z_i = 1,\ z_i \geq 0,\ \forall i = \overline{1,N}\right\},$$

где Z – множество допустимых портфелей, оценка $\bar{u}_m\left(C_T\left(C_t(\mathbf{z})\right), q\left(C_t(\mathbf{z})\right)\right)$ ожидаемой полезности портфеля $\mathbf{z}$ на множестве $\left\{\tilde{C}_t^i(\mathbf{z})\right\}_{i=1}^m$ его реализаций определяется соотношением [8]:

$$\bar{u}_m\left(C_T\left(C_t(\mathbf{z})\right), q\left(C_t(\mathbf{z})\right)\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u\left(C_T\left(\tilde{C}_t^i(\mathbf{z})\right), q\left(\tilde{C}_t^i(\mathbf{z})\right)\right). \tag{2}$$

Число имитаций m не может быть определено известными методами [9], так как структура оценки (2) как функции относительно переменной $\mathbf{z}$ меняется с ростом числа имитаций. Каждое дополнительное наблюдение $\tilde{\mathbf{x}}^{m+1}(t)$ или набор $\left\{\tilde{\mathbf{x}}^i(t)\right\}_{i=m+1}^{m+d}$ наблюдений приводит к необходимости заново решать задачу (1), что может привести к иному результату, в рамках заданной погрешности поиска. Поэтому в качестве отклика предлагается рассматривать оптимальный портфель $\mathbf{z}_m^*$, который есть решение задачи (1) на m имитациях с точностью ε, задаваемой для используемого метода оптимизации. Так как (2) есть статистика с накоплением выборочных данных, то результат задачи (1) при $m \to \infty$ определит ε-окрестность $U(\mathbf{z}^*, \varepsilon) = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in Z,\ \varrho(\mathbf{z}^*, \mathbf{z}) < \varepsilon\}$ истинного решения $\mathbf{z}^*$, где ϱ – евклидова метрика. Будем считать, что устойчивое состояние достигнуто, если получаемые при последовательном наращивании имитаций решения попадают в окрестность $U(\mathbf{z}^*, \varepsilon)$. Здесь возникают сложности с определением момента достижения устойчивого состояния, связанные с неизвестностью $\mathbf{z}^*$, а также с проблемой риска преждевременной остановки [10].

В первом случае предлагается использовать в качестве решения состояние $\mathbf{z}_m^*$, полученное на базе m наблюдений и корректировать его по мере увеличения числа имитаций.

Во избежание преждевременной остановки, предлагается тестировать текущее состояние $\mathbf{z}_m^*$, последующими состояниями $\mathbf{z}_{m+1}^*, \mathbf{z}_{m+2}^*, ..., \mathbf{z}_{m+d}^*$ следующим образом:

$$\mathbf{z}_{m+1}^* \in U(\mathbf{z}_m^*, \varepsilon), \mathbf{z}_{m+2}^* \in U(\mathbf{z}_m^*, \varepsilon), ..., \mathbf{z}_{m+d}^* \in U(\mathbf{z}_m^*, \varepsilon),$$

где d – заданная глубина проверки. То есть, если указанное условие выполнено, процесс наращения числа имитаций останавливается и в качестве решения задачи берется $\mathbf{z}_{m+d}^*$, как решение, полученное на максимальном количестве имитаций.

Если $\exists g \in \overline{1,d} : \mathbf{z}^*_{m+g} \notin U(\mathbf{z}^*_m, \varepsilon)$, то в качестве нового текущего состояния рассматривается $\mathbf{z}^*_{m+g}$. Процесс иллюстрирован на рис. 1.

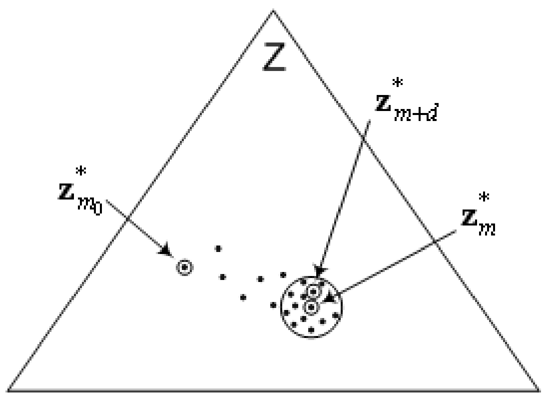

Рис. 1

Здесь $\mathbf{z}^*_{m_0}$ – исходное состояние, полученное на заданном начальном уровне имитаций m_0.

2. Поиск оптимального портфеля

Для решения задачи (1) применяется алгоритм адаптивного случайного спуска [11], который формулируется в рекуррентной форме:

$$\mathbf{z}^{k+1} = \begin{cases} \mathbf{z}^k + \alpha_k\gamma, \text{ если } \bar{u}_m\left(\mathbf{z}^k + \alpha_k\gamma\right) > \bar{u}_m\left(\mathbf{z}^k\right) \\ \mathbf{z}^k, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

здесь $\bar{u}_m\left(\mathbf{z}^k\right) = \bar{u}_m\left(C_T\left(C_t\left(\mathbf{z}^k\right)\right), q\left(C_t\left(\mathbf{z}^k\right)\right)\right)$, γ – единичный случайный вектор, определяющий направление движения, α_k – рабочий шаг. Для обеспечения движения вдоль множества Z, элементы вектора γ должны удовлетворять соотношению $\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i = 0$, причем $\gamma_i \in [-1, 1]$. Распределение вероятностей элементов вектора γ принимается равномерным. Для исключения ситуаций, связанных с выходом за пределы Z, плотность распределения γ_i определяется на отрезке $[a, b]$, где

$$a = -1 - \sum_{j\in J^-}\gamma_j,\ b = 1 - \sum_{j\in J^+}\gamma_j,$$

где J^+ – множество индексов выбранных ранее элементов $\gamma_j > 0$, J^- – индексы элементов $\gamma_j \le 0$. Индексы формируются путем случайного выбора без повторения из исходного множества $\{1, ..., N\}$. Выбор осуществляется до тех пор, пока не останется один элемент, значение по которому однозначно определяется исходя из условия $\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i = 0$. Поиск нового направления γ осуществляется только при неудачном движении по старому направлению.

Адаптация величины рабочего шага α_k сопряжена с необходимостью отслеживать выполнение условия $\mathbf{z}^{k+1} \in Z$. Предлагается следующий вариант

$$\alpha^{k+1} = \begin{cases} 2\alpha^k, \text{ если } \mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \alpha_k \gamma \text{ и } \mathbf{z}^{k+1} \in Z, \\ \frac{\alpha^k}{2}, \text{ если } \mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k \text{ и } \mathbf{z}^{k+1} \in Z, \\ \alpha^k, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что диапазон возможных значений рабочего шага зависит от текущего направления. Поиск осуществляется до тех пор, пока не будет выполнено условие $\alpha^{k+1} < \varepsilon$. Во избежание получения локальных решений, используется параллельный поиск из нескольких случайных начальных приближений (метод мультистарта [12]) с последующим выбором наилучшего результата.

3. Метод оценки динамики капитализации

Для выработки единой количественной оценки $q\left(\tilde{C}_t(\mathbf{z})\right)$ динамики капитализации портфеля необходимо учитывать выходы его траектории $\tilde{C}_t(\mathbf{z})$ за рамки инвестиционного коридора $\left\langle \underline{C}(t), \overline{C}(t) \right\rangle$. В данной работе предлагается метод, осуществляющий компенсацию выходов за коридор при помощи механизмов дисконтирования и наращения капитала.

Траекторию портфеля $\tilde{C}_t(\mathbf{z})$ в дальнейшем будем обозначать функцией $C(t)$. Пусть $\underline{\Delta} C(t) = C(t) - \underline{C}(t) < 0$ – упущенный, а $\overline{\Delta} C(t) = C(t) - \overline{C}(t) > 0$ дополнительный капитал, полученный в момент времени $t \in [1, T]$. Непрерывное множество таких моментов есть негативный $M^- = \{t | \underline{\Delta} C(t) < 0\}$ и позитивный $M^+ = \left\{t | \overline{\Delta} C(t) > 0\right\}$ периоды реализации соответственно (рис. 2), а $M = \{M^-\}$ – множество негативных и $\bar{M} = \{M^+\}$ – множество позитивных периодов на траектории портфеля $[1, T]$.

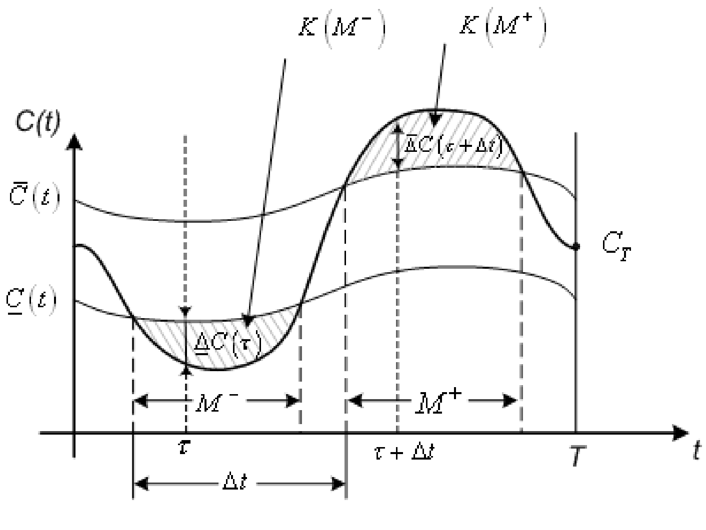

Рис. 2

Совокупный упущенный капитал $K\left(M^{-}\right)$ в период M^{-} равен

$$K\left(M^{-}\right)=\int\limits_{M^{-}}\underline{\Delta}C\left(t\right)dt,$$

а совокупный дополнительный капитал $K\left(M^{+}\right)$ в период M^{+}

$$K\left(M^{+}\right)=\int\limits_{M^{+}}\overline{\Delta}C\left(t\right)dt.$$

Компенсация $K\left(M^{-}\right)$ при помощи $K\left(M^{+}\right)$ осуществляется с использованием операции дисконтирования. Объем $K\left(M^{-},M^{+}\right)$ совокупного капитала предназначенного для компенсации определяется соотношениями

$$K\left(M^{-},M^{+}\right)=\int\limits_{\tau\in M^{-}}\overleftarrow{\Delta}C\left(\tau,\tau+\Delta t\right)d\tau,$$

$$\overleftarrow{\Delta}C\left(\tau,t\right)=\Delta C(\tau,t)\int_{r(\tau,t)}r(\tau,t)\gamma(r(\tau,t))dr(\tau,t),$$

$$\Delta C\left(\tau,t\right)=\min\left\{\underline{\Delta}C\left(\tau\right),\overline{\Delta}C\left(t\right)\right\},$$

здесь $\overleftarrow{\Delta}C\left(\tau,t\right)$ – дисконтированный к моменту времени τ капитал, полученный в момент t, $\Delta t=\inf M^{+}-\inf M^{-}$, $r\left(\tau,t\right)$ – норма дисконта между моментами τ и t, $\gamma\left(r\left(\tau,t\right)\right)$ – плотность распределения нормы дисконта.

Величина $r\left(\tau,t\right)$ рассчитывается с использованием формулы сложных процентов

$$r\left(\tau,t\right)=\prod_{l=\tau}^{t}\left(1+r\left(l\right)\right),$$

а коэффициент дисконтирования $r\left(l\right)$ в момент времени l определяется с использованием уравнения Фишера [1]

$$r(l)=s(l)+i(l)+s(l)i(l),$$

где $s(t)$ – кредитная процентная ставка, а $i(t)$ – уровень инфляции.

В случае обратного расположения периодов M^{-} и M^{+} на временной оси компенсация осуществляется с использованием операции наращения:

$$K\left(M^{-},M^{+}\right)=\int\limits_{\tau\in M^{+}}\vec{\Delta}C\left(\tau,\tau+\Delta t\right)d\tau,$$

$$\overleftarrow{\Delta}C\left(\tau,t\right)=\Delta C(\tau,t)\int_{r(\tau,t)}r^{-1}(\tau,t)\gamma(r(\tau,t))dr(\tau,t),$$

$$\Delta C\left(\tau,t\right)=\min\left\{\overline{\Delta}C\left(\tau\right),\underline{\Delta}C\left(t\right)\right\},$$

где $\vec{\Delta}C\left(\tau,t\right)$ – наращенный к моменту времени t капитал, момента τ.

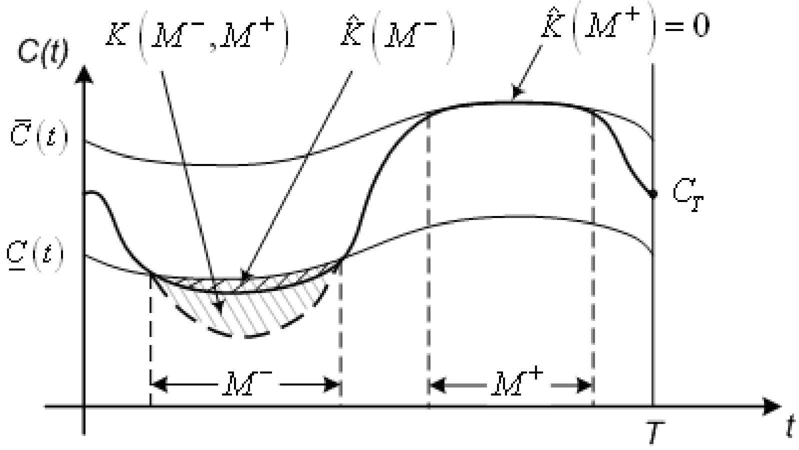

Рис. 3

Процесс компенсации символически описывается следующими соотношениями:

$$\hat{K}\left(M^{-}\right)=K\left(M^{-}\right)+K\left(M^{-},M^{+}\right),$$

$$\hat{K}\left(M^{+}\right)=K\left(M^{+}\right)-K\left(M^{-},M^{+}\right),$$

где $\hat{K}\left(M^{-}\right)$ – остаточный упущенный капитал компенсируемого периода, $\hat{K}\left(M^{+}\right)$ – остаточный дополнительный капитал компенсирующего периода.

Если в результате компенсации $\hat{K}\left(M^{+}\right)=0$, то $\bar{M}^{H}=\bar{M}/M^{+}$ (рис. 3), если $\hat{K}\left(M^{-}\right)=0$, то $M^{H}=M/M^{-}$. Корректировка траектории осуществляется до тех пор, пока $M^{H}=\emptyset$ или $\bar{M}^{H}=\emptyset$.

Для корректного сравнения портфелей по критерию динамики капитализации стоимость остаточного упущенного или добавочного капитала на скорректированной траектории приводится к единому моменту времени, например, к начальному $\tau=0$.

Тогда оценка q динамики капитализации портфеля равна

$$q=\begin{cases}\sum\limits_{M^{+}\subseteq\bar{M}^{H}}\int\limits_{t\in M^{+}}\overline{\Delta}\hat{C}\left(t\right)\int\limits_{r(0,t)}r\left(0,t\right)\gamma\left(r\left(0,t\right)\right)dr\left(0,t\right)dt, & M^{H}=\emptyset,\\ \sum\limits_{M^{-}\subseteq M^{H}}\int\limits_{t\in M^{-}}\underline{\Delta}\hat{C}\left(t\right)\int\limits_{r(0,t)}r^{-1}\left(0,t\right)\gamma\left(r\left(0,t\right)\right)dr\left(0,t\right)dt, & \bar{M}^{H}=\emptyset,\\ 0,\ \bar{M}=\emptyset,\ M=\emptyset,\end{cases}$$

где $\hat{C}\left(t\right)$ – скорректированная траектория портфеля (рис. 3), $\Delta\hat{C}\left(t\right)=\hat{C}\left(t\right)-\underline{C}\left(t\right)<0$, $\bar{\Delta}\hat{C}\left(t\right)=\hat{C}\left(t\right)-\bar{C}\left(t\right)>0$.

Критерий $q\in R^{1}$ положительно ориентирован и имеет денежное измерение. Он представляет собой оценку возможных потерь или дополнительной прибыли, в процессе реализации портфеля. Важно отметить, что по своему смыслу он близок к критерию остаточной стоимости и, следовательно, понятен для ЛПР, в той степени, при которой становится возможным выявить его предпочтения на данном показателе.

4. Восстановление функции полезности

Двухкритериальная функция полезности (ФП) $u\left(C_T, q\right)$ представляется в аддитивной форме [8]:

$$u\left(C_T, q\right) = k_C u_C\left(C_T\right) + k_q u_q\left(q\right),$$

в предположении о независимости по полезности критериев C_T и q. Здесь $k_C, k_q > 0$ – шкалирующие константы, $u_C\left(C_T\right)$, $u_q\left(q\right)$ – условные однокритериальные ФП.

Восстановление ФП на критерии q осуществляется с использованием известных методов [8, 13], основанных на интервальных оценках предпочтений ЛПР, которые представляются областями $[q_i^H, q_i^B]$ расположения детерминированных эквивалентов $\hat{q}_i$ лотерей $\Lambda(q_i, h) = \langle q_i - h, q_i + h, 0.5, 0.5\rangle$, $h > 0$ с неопределенным выигрышем $\tilde{q}_i = \{q_i - h, q_i + h\}$. На основе анализа множества лотерей устанавливается параметрическое семейство функций из предложенных в [8, 13], зависящее от вектора параметров $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, то есть проводится структурная идентификация ФП.

Параметрическая идентификация ФП $u_q(q, \lambda)$ осуществляется методом наименьших квадратов, что формализуется в виде задачи условной оптимизации

$$u_q\left(q, \lambda^*\right) = \arg \min_{u_q(q,\lambda)\in \mathbf{U}} \sum_{i=1}^{s} \left(\bar{u}_q\left(\tilde{q}_i, \lambda\right) - u_q\left(\hat{q}_i, \lambda\right)\right)^2,$$

где $\mathbf{U}$ – выбранное параметрическое семейство ФП,

$$\bar{u}_q\left(\tilde{q}_i, \lambda\right) = 0.5\left(u_q\left(q_i - h, \lambda\right) + u_q\left(q_i + h, \lambda\right)\right)$$

– ожидаемая полезность лотереи $\Lambda\left(q_i, h\right)$,$s$ – число лотерей.

Восстановление ФП на критерии C_T осуществляется аналогично.

Заключение

Рассмотренная задача и предложенный подход к ее решению, в отличие от известных методов, позволяют рассматривать портфели инвестиционных проектов любого типа и учитывать многопериодные аспекты их реализации, что в целом более адекватно отражает реальные условия. Возможность использования различных моделей расчета капитализации и, как следствие, учета большего числа факторов, определяющих результат портфельной инвестиции, позволяют повысить качество получаемого решения.

Список литературы

[1] Шарп У.Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. Инфра-М, 2003.

[2] Гитман Л.Дж., Джонк М.Д. Основы инвестирования. М.: Дело, 1997.

[3] Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты. СПб Питер 2001.

[4] Лившиц С.В. О методологии оценки эффективности производственных инвестиционных проектов в Российской переходной экономике // Экономика и математические методы. Т 35. Вып. 1. 2004.

[5] Хьюбер П. Робастность в статистике: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.

[6] Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984.

[7] Маховикова Г.А., Терехова В.В., Бузова И.А., Коммерческая оценка инвестиций. СПб Питер 2004.

[8] Кини Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М: Радио и связь 1981.

[9] Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Вып.2. М.: Статистика, 1978.

[10] Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. М.: Мир 1978.

[11] Растригин Л.А. Адаптация сложных систем. – Рига: Зинатне, 1981.

[12] Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.

[13] Катулев А.Н., Михно В.Н., Виленчик Л.С. и др. Современный синтез критериев в задачах принятия решений. М.: Радио и связь, 1992.