УДК 519.6

ЗАДАЧА О ПОСТРОЕНИИ ВЫПУКЛОЙ ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ, ОБЛАДАЮЩЕЙ МИНИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДЬЮ ПОВЕРХНОСТИ, С ЗАДАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ШИРИНУ

Цветкова Е.Г.
Кафедра компьютерной безопасности и математических методов управления

Поступила в редакцию 15.06.2007, после переработки 08.10.2007.

В работе рассматривается задача о построении выпуклой фигуры вращения минимальной площади поверхности при заданных ограничениях на ширину, формализующаяся как задача оптимального управления. Для нахождения аналитического решения данной задачи применен двойственный метод. В работе приводится процесс построения оптимального решения.

The task about the construction of a convex rotary figure, having the minimal area of a surface and given restrictions on width, is considered in this work. The given problem is formalized as a task of optimum managements. For the finding of the analytical decision of the given task the dual method is applied. Process of constructions of the optimum decision is given in this work.

Ключевые слова: упорядоченное множество рациональных чисел, автоматные структуры.
Keywords: ordered set of the rational numbers, automatic structures.

Введение

Задачи о постоении оптимальных поверхностей состоят в нахождении поверхностей и тел, имеющих максимальную или минимальную площадь поверхности либо маскимальный или минимальный объем при заданных ограничениях. Подобные задачи имеют широкую область приложения не только в самой геометрии, но и в других науках, а также практическое применение. Они возникают в задачах упаковки тел и раскроя. Эти задачи могут быть формализованы как задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств. Аналитические методы вариационного исчисления предполагают условия гладкости на функции, используемые при формализации задачи, и в связи с этим не могут использоваться при решении подобных задач. Методы математической теории оптимального управления, в частности, двойственный метод, позволяют преодолевать указанные трудности. В данной работе решена задача о построении выпуклой центрально-симметричной фигуры вращения с заданными ограничениями на ширину, которая обладает минимальной площадью поверхности.

Ограниченную выпуклую пространственную фигуру $F \in R^3$ будем описывать с помощью ее опорной функции, которая определяется равенством

$$H(n) = \max_{y \in F}(n, y),$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ - единичный вектор направления. В сферической системе координат n имеет следующие компоненты: $n_1 = \cos(\theta)\sin(\varphi), n_2 = \sin(\theta)\sin(\varphi)$, $n_3 = \cos(\varphi), \Omega = \{(\varphi, \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}$.

Определение 1. *Плоскость* $\Pi(n) := \{x \in R^3 : (x, n) = H(n)\}$ *назовем опорной плоскостью для множества* F *в направлении* n. *Обозначим через* $h(\theta, \varphi) = H(cos\theta sin\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\varphi)$. *С геометрической точки зрения* $h(\theta, \varphi)$ *есть расстояние от начала координат до опорной плоскости* $\Pi(n)$ *[2].*

Определение 2. *Если опорная плоскость имеет только одну общую точку с множеством* F, *то она является регулярной. Если все опорные плоскости множества* F *регулярны, то такое множество называется регулярным множеством или овалоидом, а его опорная функция - регулярной [2].*

В случае регулярной фигуры $F \in R^3$ ее опорная функция $h(\theta, \varphi) = H(cos\theta sin\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\varphi)$ почти всюду в Ω удовлетворяет условиям [3]:

$$\varrho(t) \geq 0, \varrho(t)T(t) - \sigma^2(t) \geqslant 0, t \in \Omega,$$

где

$$\varrho(t) = h_{\varphi\varphi}(t) + h(t), \sigma(t) = \frac{h_{\varphi\theta}}{sin\varphi} - \frac{cos\varphi}{sin^2\varphi}h_\theta(t),$$

$$T(t) = \frac{h_{\theta\theta}}{sin^2\varphi} + \frac{cos\varphi}{sin\varphi}h_\varphi(t) + h(t), t = (\varphi, \theta).$$

Верно и обратное: любая 2π - периодическа функция, удовлетворяющая данным условиям и граничным условиям $h(\cdot, 0) = const, h(\cdot, \pi) = const$, однозначно определяет выпуклое регулярное множество $F \in R^3$. Нерегулярное множество не может быть описано с помощью перечисленных условий , однако его опорная функция может быть равномено аппроксимирована последовательностью опорных функций регулярных множеств.

Определение 3. *Шириной выпуклого множества в направлении* n *назовем функцию* $B(n) = H(n) + H(-n)$ *[2].*

Таким образом,площадь поверхности выпуклой фигуры $F \in R^3$ определим через равенство:

$$O(F) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [h^2(t) - \frac{{h_\varphi}^2(t)}{2} - \frac{{h_\theta}^2(t)}{2sin^2\varphi}]sin\varphi d\theta d\varphi.$$

Постановка задачи

Обозначим через Δ и D минимальную и максимальную ширину фигуры, соответственно. Не ограничивая общности, выберем начало координат так, чтобы в направлении $\varphi = 0$ фигура имела максимальную ширину , а начало сферической системы координат выберем так, чтобы опорная функция удовлетворяла следующим граничным условиям:

$$h(0,\varphi) = h(2\pi,\varphi), h(\theta,0) = h(\pi+\theta,0) = \frac{D}{2}, h(\pi,\frac{\pi}{2}) = h(0,\frac{\pi}{2}).$$

Рассматривается центрально-симметричная фигура вращения. В этом случае задача о нахождении выпуклой фигуры минимальной площади поверхности с заданными ограничениями на ширину формализуется следующим образом.
Требуется найти выпуклую фигуру вращения минимальной площади поверхности

$$O(F) = 2\pi\int_0^\pi [h^2(\varphi) - \frac{{h_\varphi}^2(\varphi)}{2}] sin\varphi d\varphi,$$

опорная функция $h(\theta,\varphi)$ которой удовлетворяет условиям:

$$(\frac{cos\varphi h_\varphi}{sin\varphi} + h)(h_{\varphi\varphi} + h) \geq 0,$$
$$h_{\varphi\varphi} + h \geq 0,$$
$$\Delta \leq h(\varphi) + h(\pi+\varphi) \leq D,$$
$$h(0) = h(\pi) = \frac{D}{2}, h(\varphi) = h(2\pi - \varphi).$$

Введем функции $x_1(\varphi) = h(\varphi) + h(-\varphi), x_2(\varphi) = x_{1\varphi}(\varphi)$ и обозначим независимую переменную через $t = \varphi$.
В новых обозначениях можем сформулировать задачу как одномерную задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$J(x,u) = \int_0^\pi [{x_1}^2(t) - \frac{{x_2}^2(t)}{2}] sintdt,$$
$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + u, t \in [0,\pi],$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u, t \in [0,\pi],$$
$$u(t) \geq 0, ..t \in [0,\pi],$$
$$\Delta \leq x_1 \leq D, t \in [0,\pi],$$
$$x_1(\tau_i) \leq a_i, i = \overline{1,N},$$
$$x_1(0) = x_1(\pi) = D.$$

Метод решения

Применим для решения задачи двойственный метод. Построим функцию Понтрягина

$$H(t,\xi,y,u) = -\xi_1^2 sint + \frac{1}{2}\xi_2^2 sin(t) + y_1\xi_2 - y_2\xi_1 + y_2 u.$$

Согласно принципу максимума, оптимальное управление

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & y_2(t) < 0, \\ c \geq 0, & y_2(t) = 0, \end{cases}$$

или $y_2(t)\overline{u}(t) = 0$, п.в. $t \in [0,\pi]$.
Функция Гамильтона задачи примет вид:

$$\aleph(t,\xi,y) = \begin{cases} -\xi_1^2 sint + \frac{1}{2}\xi_2^2 sin(t) + y_1\xi_2 - y_2\xi_1, y_2(t) \leq 0, \\ +\infty, y_2(t) > 0. \end{cases}$$

Выберем квадратичную S - функцию

$$S(t,\xi) = a(t) + y_1(t)\xi_1 + y_2(t)\xi_2 + \psi_1(t)\xi_1^2 + \psi_2(t)\xi_2^2 + \psi_3\xi_1\xi_2,$$

где $a(t), y_i(t), i = 1,2,$ - кусочно-непрерывные на отрезке $[0,\pi]$ функции, такие, что $\Lambda(t,\xi) := S_t(t,\xi) + \aleph(t,\xi,S_\xi(t,\xi)) \leq 0$.
С учетом соотношений:
$S_{\xi_1}(t,\xi) = y_1 + 2\psi_1\xi_1 + \psi_3\xi_2$,
$S_{\xi_2}(t,\xi) = y_2 + 2\psi_2\xi_2 + \psi_3\xi_1$,
$S_t = a' + y_1'\xi_1 + y_2'\xi_2 + \psi_1'\xi_1^2 + \psi_2'\xi_2^2 + \psi_3'\xi_1\xi_2$
неравенство Гамильтона - Якоби примет вид:

$$\Lambda(t,\xi) = (\psi_1' - sint - \psi_3)\xi_1^2 + (\psi_2' + \frac{1}{2}sint + \psi_3)\xi_2^2 + (y_1' - y_2)\xi_1 +$$
$$+ (y_2' + y_1 + (2\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3')\xi_1)\xi_2 + a' \leq 0.$$

На оптимальной траектории $\overline{x}(t)$ должно выполняться равенство Гамильтона - Якоби $\Lambda(t,\overline{x}(t)) = 0$.
Рассмотрим конечномерную экстремальную задачу при каждом фиксированном $t \in [0,\pi]$:

$$\Lambda(t,\xi) \to sup,$$
$$\Delta \leq \xi_1 \leq D,$$
$$\xi_1(\tau_i) \leq a_i, i = \overline{1,N}.$$

Применим для решения метод множителей Лагранжа.
Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = -\Lambda(t,\xi) + \mu(t)(\xi_1 - D) + \nu(t)(\Delta - \xi_1) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(\xi_1(\tau_i) - a_i).$$

Запишем необходимые условия максимума:

1) условие стационарности:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = -\Lambda_{\xi_1}(t, \overline{x}(t)) + \mu(t) - \nu(t) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = -\Lambda_{\xi_1}(t, \overline{x}(t)) = 0;$$

2) условие неотрицательности и согласования знаков:

$$\mu(t) \geq 0, \nu(t) \geq 0;$$

3) условие дополняющей нежесткости:

$$\mu(t)(\xi_1 - D) = 0,$$

$$\nu(t)(\Delta - \xi_1) = 0,$$

$$\lambda_i(\xi_1(\tau_i) - a_i) = 0.$$

С учетом соотношений:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = -2(\psi_1' - sint - \psi_3)\xi_1 - y_1' + y_2 - (2\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3')\xi_2 + \mu(t) - \nu(t) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_2} = -2(\psi_2' + \frac{1}{2}sint + \psi_3)\xi_2 - y_2' - y_1 - (2\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3')\xi_1,$$

необходимые условия оптимальности примут следующий вид:

$$2(\psi_1' - sint - \psi_3)\xi_1 + y_1' - y_2 + (2\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3')\xi_2 - \mu(t) + \nu(t) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 0,$$

$$2(\psi_2' + \frac{1}{2}sint + \psi_3)\xi_2 + y_2' + y_1 + (2\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3')\xi_1 = 0,$$

$$\mu(t)(\xi_1 - D) = 0,$$

$$\nu(t)(\Delta - \xi_1) = 0,$$

$$\lambda_i(\xi_1(\tau_i) - a_i) = 0,$$

$$\mu(t) \geq 0, \nu(t) \geq 0.$$

С учетом полученных соотношений $\Lambda(t,\xi)$ примет вид:

$$\Lambda(t,\xi) = -(\psi_1' - sint - \psi_3)\xi_1^2 - (2\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3')\xi_1\xi_2 -$$

$$-(\psi_2' + \frac{1}{2}sint + \psi_3)\xi_2^2 + (\mu(t) - \nu(t) + \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t))\xi_1.$$

Необходимым и достаточным условием максимума функции $\Lambda(t,\xi)$ является отрицательная определенность матрицы, составленной из ее вторых производных. Согласно критерию Сильвестра, для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы квадратичной формы имели знак $(-1)^k$, где k - порядок минора, или были равны нулю.
Для квадратичной формы $\Lambda(t,\xi)$ эти условия примут вид:

$$\begin{cases} \Lambda_{\xi_1\xi_1}\Lambda_{\xi_2\xi_2} - \Lambda_{\xi_1\xi_2}\Lambda_{\xi_2\xi_1} \geq 0, \\ \Lambda_{\xi_1\xi_1} < 0 \text{ или } \Lambda_{\xi_2\xi_2} < 0. \end{cases}$$

С учетом соотношений:
$\Lambda_{\xi_1\xi_1} = -(\psi_1' - sint - \psi_3), \Lambda_{\xi_1\xi_2} = -(2\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3'),$
$\Lambda_{\xi_2\xi_2} = -2(\psi_2' + \frac{1}{2}sint + \psi_3)$
получаем следующие условия:

$$4(\psi_1^{'} - sint - \psi_3)(\psi_2^{'} + \frac{1}{2}sint + \psi_3) - (2\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3^{'})^2 \geq 0,$$

$$-(\psi_1^{'} - sint - \psi_3) < 0 \text{ или } -2(\psi_2^{'} + \frac{1}{2}sint + \psi_3) < 0.$$

Легко проверить, что данным соотношениям удовлетворяют почти всюду функции вида $\psi_1(t) = \frac{1}{2}cost + \frac{1-2D}{4D}, \psi_2(t) = \frac{1}{2}cost + \frac{1-2D}{4D}, \psi_3(t) = 0$. Согласно критерию Сильвестра, это означает, что $\Lambda(t,\xi)$ всегда неположительна.
Таким образом, условие максимума $\Lambda(t,\xi)$ превращается в условие оптимальности в точках дифференцируемости функций $y_i(t), i = 1,2$. С учетом полученных соотношений для $\psi_i(t), i = \overline{1,3}$ эти условия примут вид:

$$y_1' = y_2 + \overline{x}_1 sint + \mu(t) - \nu(t) + \sum_{i=1}^{N}\lambda_i;$$

$$y_2' = -y_1;$$

$$\mu(t) \geq 0, \nu(t) \geq 0, \lambda_i(t) \geq 0, i = 1,\bar{}N;$$

$$\mu(t)(\overline{x}_1 - D) = 0, \nu(t)(\Delta - \overline{x}_1) = 0, \lambda_i(\overline{x}_1(\tau_i) - a_i) = 0, i = \overline{1,N}.$$

Рассмотрим двойственный функционал

$$L(S) := \inf_{\xi(t)\in Q}[S(\pi,\xi(\pi)) - S(0,\xi(0)) + \sum_k (S(t_k - 0, \xi(t_k)) - S(t_k + 0, \xi(t_k)))],$$

где t_k - точки возможного разрыва функции Кротова $S(t,\xi)$, исключая концевые точки отрезка 0 и π и множество

$$Q = (\xi(t) \in KC_{[0,\pi]} \mid \Delta \leq \xi_1 \leq D, t \in [0,\pi], \xi_1(0) = \xi_1(\pi) = D, \xi_1(\tau_i) \leq a_i, i = \overline{1,N}).$$

По теореме Кротова о строгой двойственности, для того, чтобы имело место равенство $L(S) = J(\overline{x}, \overline{u})$, необходимо выполнение следующих условий:

$$1)\aleph(t, \overline{x}(t), S_\xi(t, \overline{x}(t)) = H(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), S_\xi(t, \overline{x}(t)),\ \text{п.в.} t \in [0,\pi];$$

$$2) S_t(t, \overline{x}(t)) + \aleph(t, \overline{x}(t), S_\xi(t, \overline{x}(t)) = 0,\ \text{п.в.} t \in [0,\pi].$$

На оптимальном процессе достигается минимум функционала

$$L(S) := S(\pi, \overline{\xi}(\pi)) - S(0, \overline{\xi}(0)) + \sum_k (S(t_k - 0, \xi(t_k)) - S(t_k + 0, \xi(t_k))).$$

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$F(\xi(t_k)) := a(\pi) + y_1(\pi)\xi_1(\pi) + y_2(\pi)\xi_2(\pi) + (\frac{1}{4D} - 1)\xi_1^2(\pi) + (\frac{1}{4D} - 1)\xi_2^2(\pi) - a(0) -$$
$$- y1(0)\xi_1(0) - y2(0)\xi_2(0) - \frac{1}{4D}\xi_1^2(0) - \frac{1}{4D}\xi_2^2(0) + \sum_k (a(t_k - 0) - a(t_k + 0) + \xi_1(t_k)(y_1(t_k -$$
$$-0) - y_1(t_k + 0)) + \xi_2(t_k)(y_2(t_k - 0) - y_2(t_k + 0)))\xi_i(t_k), i = 1, 2,$$

удовлетворяющей неравенствам:

$$\Delta \leq \xi_1(t_k) \leq D, \xi_1(\tau_i) \leq a_i, i = \overline{1,N}.$$

Функция $F(\xi(t_k))$ зависит от значений $\xi_1(t_k), \xi_2(t_k), \xi_1(0), \xi_2(0), \xi_1(\pi), \xi_2(\pi)$. Минимум $F(\xi(t_k))$ достигается на значениях $\xi_i(t_k) = \overline{x}_i(t_k), i = 1, 2$.
Применим метод множителей Лагранжа к задаче минимизации

$$F(\xi(t_k)) \to inf,$$
$$\Delta \leq \xi_1(t_k) \leq D.$$

$$L = F(\xi(t_k)) + \sum_k \nu_k(\Delta - \xi_1(t_k)) + \sum_k \mu_k(\xi_1(t_k) - D) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(\xi_1(\tau_i) - a_i).$$

Находим необходимые условия оптимальности:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1(t_k)} = y_1(t_k - 0) - y_1(t_k + 0) + \mu_k(t) - \nu_k(t) + \lambda_k(t) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_2(t_k)} = y_2(t_k - 0) - y_2(t_k + 0) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1(0)} = -y_1(0) - \frac{1}{2D}\xi_1(0) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \xi_2(0)} = -y_2(0) - \frac{1}{2D}\xi_2(0) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1(\pi)} = y_1(\pi) + (\frac{1}{2D} - 2)\xi_1(\pi) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \xi_2(\pi)} = y_2(\pi) + (\frac{1}{2D} - 2)\xi_2(\pi) = 0,$$
$$\mu_k(t_k)(\xi_1(t_k) - D) = 0, \nu_k(t_k)(\Delta - \xi_1(t_k)) = 0, \lambda_i(\xi_1(\tau_i) - a_i) = 0, \overline{1,N},$$
$$\mu_k \geq 0, \nu_k \geq 0, \lambda_k \geq 0.$$

Необходимые условия минимума позволяют получить условие скачка функции Кротова $S(t,\xi)$ на оптимальном процессе $\overline{\xi}(t)$:

$$y_1(t_k - 0) - y_1(t_k + 0) + \mu_k(t) - \nu_k(t) + \lambda_k(t) = 0,$$
$$y_2(t_k - 0) - y_2(t_k + 0) = 0,$$
$$y_1(0) = -\frac{1}{2D}\xi_1(0),$$
$$y_2(0) = -\frac{1}{2D}\xi_2(0),$$
$$y_1(\pi) = (2 - \frac{1}{2D})\xi_1(\pi),$$
$$y_2(\pi) = (2 - \frac{1}{2D})\xi_2(\pi),$$
$$\mu_k(t_k)(\xi_1(t_k) - D) = 0, \nu_k(t_k)(\Delta - \xi_1(t_k)) = 0, \lambda_i(\xi_1(\tau_i) - a_i) = 0, \overline{1,N},$$
$$\mu_k \geq 0, \nu_k \geq 0, \lambda_k \geq 0.$$

Таким образом, функция $y_2(t)$ непрерывна в области определения. Непрерывность функции $y_1(t)$ может нарушаться только в тех точках, где $\overline{x}_1(t) = D$ или $\overline{x}_1(t) = \Delta$, а также в точках τ_i.

Построение оптимальной траектории.

Построим оптимальную траекторию вне участков $x_1(\tau_i) \leq a_i, i = \overline{1,N}$.

1. Пусть $\mu(t) > 0$ на некотором отрезке из области определения. Тогда $\nu(t) = 0, x_1(t) = D, \overline{u}(t) = D, y_2(t) = 0, y_1(t) = 0$. Следовательно, $\mu(t) = -Dsint$. На области определения данное равенство не выполняется. Противоречие показывает, что участки такого типа в оптимальной траектори не присутствуют.

2. Пусть $\nu(t) > 0$ на некоторм отрезке из области определения. Тогда $\mu(t) = 0, x_1(t) = \Delta, \overline{u}(t) = \Delta, y_2(t) = 0, y_1(t) = 0$. Следовательно, $\nu(t) = \Delta sint$. Такие участки возможны при $t \neq 0, t \neq \pi$. Тривиальная проверка второго неравенства выпуклости показывает, что такие участки допустимы.

Вспоминая геометрический смысл фазовой переменной, находим, что на этом интервале опорная функция постоянна. Геометрически это соответствует участку

границы выпуклой фигуры ширины Δ, вращающейся в пространстве вокруг оси, проходящей через центр симметрии фигуры.
3. Пусть $\mu(t) = \nu(t) = 0$. Следовательно, $y_1' - y_2 - x_1 sint = 0, y_2' + y_1 = 0$.
Пусть $y_2 \neq 0$. Тогда $\overline{u} = 0$.
С геометрической точки зрения это означает, что граница ножества на рассматриваемом участке является отрезком. Уравнение, которому удовлетворяет оптимальная траектория, имее вид: $x_1''(t) + x_1(t) = 0$, его решением является функция $x_1(t) = Acost + Bsint$.
Таким образом, оптимальное решение задачи примет вид:

если $0 \leq t \leq \alpha$, то $\overline{x}_1(t) = Dcost, \overline{u}(t) = 0$,

$y_2(t) = -\frac{\Delta^3}{D^2} sint + \frac{1}{2} Dsin2t - sin^2\alpha cost$

если $\alpha < t \leq \pi - \alpha$, то $\overline{x}_1(t) = \Delta, \overline{u}(t) = \Delta, y_2(t) = 0$,

если $\pi - \alpha < t \leq \pi$, то $\overline{x}_1(t) = -Dcost, \overline{u}(t) = 0$,

$y_2(t) = -\frac{\Delta^3}{D^2} sint - \frac{1}{2} Dsin2t + sin^2\alpha cost$

$$\overline{x}_1(\frac{\pi}{2} + \tau) = \overline{x}_1(\frac{\pi}{2} - \tau),$$

$$\overline{u}(\frac{\pi}{2} + \tau) = \overline{u}(\frac{\pi}{2} - \tau), \overline{p}_2(\frac{\pi}{2} + \tau) = \overline{p}_2(\frac{\pi}{2} - \tau), \tau \in [0, \pi];$$

$$\overline{x}_2(t) = \overline{x}_1{}'(t),$$

$$y_1(t) = -y_2'(t), t \neq \alpha, \pi - \alpha, \alpha = arccos(\frac{\Delta}{D}).$$

Функция $\overline{x}_2(t)$ не является непрерывной при $t = \alpha$ и $t = \pi - \alpha$.
На рисунках 1 - 6 представлены графики искомых функций состояния, управления, сопряженных функций и вид искомой фигуры .

С геометрической точки зрения полученный результат означает, что среди всех выпуклых фигур вращения с заданными ограничениями на ширину минимальной площадью поверхности обладает такая фигура, сечение которой, проходящее через ось вращения, при $t \in [\alpha, \pi - \alpha]$ имеет постоянную ширину Δ, а при всех других значениях - радиусы кривизны, равные нулю. В качестве плоской фигуры постоянной ширины, являющейся центральным сечением искомой поверхности вращения, можно взять круг, треугольник Релло и др. Примером такой плоской фигуры является круг радиуса $\frac{\Delta}{2}$, расположенный между двумя одинаковыми секторами, вершины которых находятся на расстоянии $\frac{D}{2}$ от центра круга, а ограничивающие сектора лучи касаются круга. Площадь поверхности полученной фигуры $S(F)_{min} = \frac{\pi}{2}(\frac{\Delta^3}{D} + \Delta D)$.

В рассмотренной задаче решением является минимизирующая последовательность, сходящаяся по мере к $\overline{x}(t)$. Функция $x_1{}^k(t)$ получается сглаживанием функции $\overline{x}_1(t)$ в окрестностях точек $t = \alpha$ и $t = \pi - \alpha$:

$$x_1{}^k = \alpha_k(t - \alpha - \frac{1}{k})^2 + \Delta, t \in [\beta_k, \alpha + \frac{1}{k}],$$

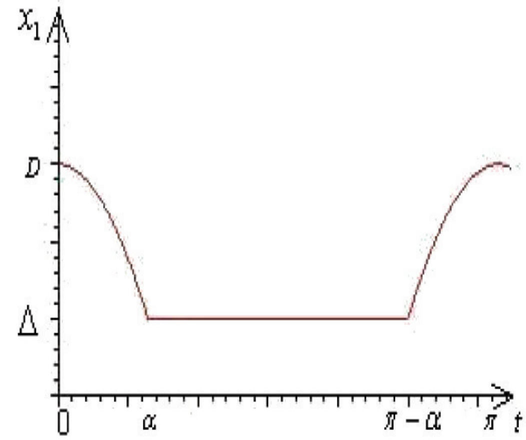

Рис. 1: График функции $x_1(t)$.

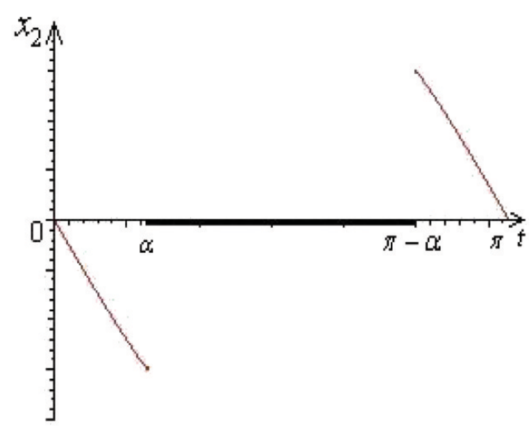

Рис. 2: График функции $x_2(t)$.

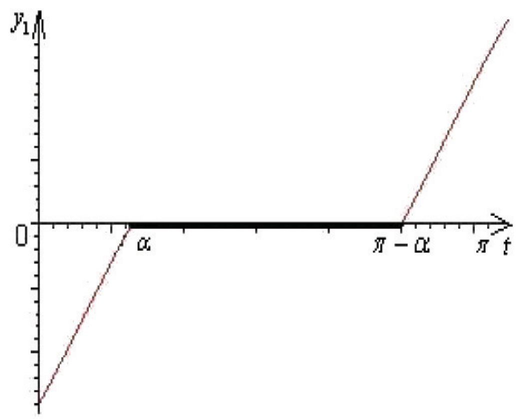

Рис. 3: График функции $y_1(t)$.

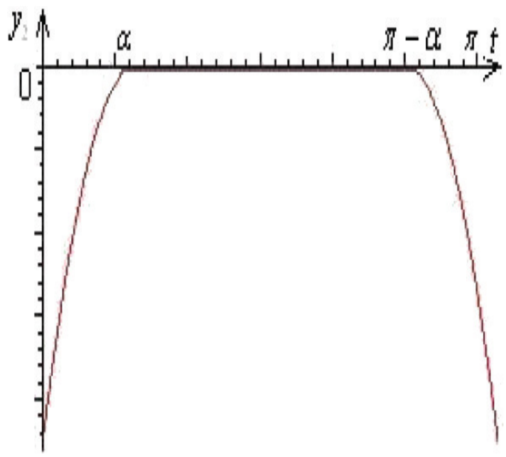

Рис. 4: График функции $y_2(t)$.

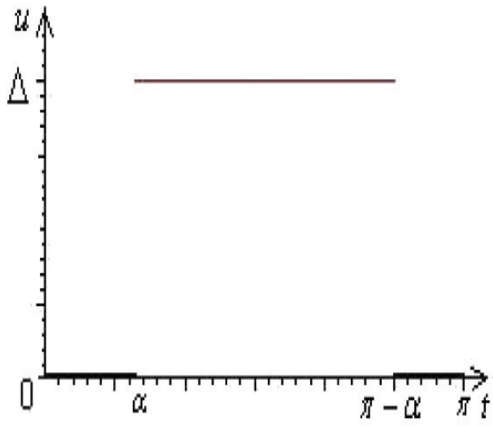

Рис. 5: График функции $u(t)$.

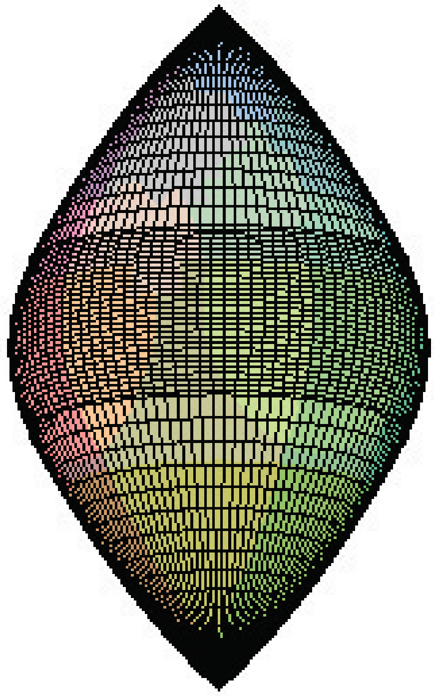

Рис. 6: Вид искомой фигуры.

$$x_1{}^k = \overline{x}_1(t), t \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus [\beta_k, \alpha + \frac{1}{k}],$$

$$x_1{}^k(\tfrac{\pi}{2} + \tau) = x_1{}^k(\tfrac{\pi}{2} - \tau), x_2{}^k(t) = \dot{x}_1^k(t), k = 1, 2, ..., \text{ при этом } \lim_{k \to \infty} \beta_k = \alpha.$$

Список литературы

[1] Андреева Е.А. Применение двойственного метода для решения одной экстремальной задачи геометрии. // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1985.

[2] Болтянский В.Г., Яглом И.М. Выпуклые фигуры. М.: Наука, 1951.

[3] Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. Берлин, 1934.

[4] Красноженов Г.Г. Построение плоской выпуклой фигуры максимального периметра с промежуточными ограничениями. ТГУ, 2001.