

**УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ
ЗАМКНУТОЙ СТРУНЫ С МАССИВНЫМИ ТОЧКАМИ**

Г.С. Шаров

Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 29.01.2008, после переработки 11.02.2008.

Для замкнутой релятивистской струны с 3 массивными точками исследуется проблема устойчивости центральных ротационных состояний, характеризуемых наличием массивной точки в центре вращения. Вопрос об устойчивости этих состояний важен для их приложения к описанию адронов. Показано, что центральное состояние неустойчиво, если масса в центре меньше критического значения, равного энергии струны с остальными массивными точками.

For the closed relativistic string with 3 point-like masses the stability problem of the central rotational states is considered. The problem of stability for these states is important for their applications to describing hadrons. It is shown that the central rotational state is not stable, if the central mass is less than the critical value. This value equals energy of the string with other massive points.

Ключевые слова: замкнутая струна, центральные ротационные состояния, устойчивость.

Keywords: closed string, central rotational states, stability.

Введение

В работах [1, 2] рассмотрена модель бариона (или экзотического адрона) в виде замкнутой релятивистской струны, нагруженной n точечными массами. Для этой системы были найдены точные решения уравнений движения, описывающие ротационное состояние — равномерное вращение системы, вычислены энергия и угловой момент ротационных состояний, исследованы квазилинейные траектории Редже, проведена классификация ротационных состояний. Было показано [2], что эти состояния подразделяются на 1) гипоциклоидальные, в которых вращающаяся струна составлена из отрезков гипоциклоиды, соединенных в массивных точках; 2) линейные, отвечающие вращению струны, сложенной из нескольких прямолинейных отрезков и несущей массивные точки в местах сгибов; 3) центральные, отличающиеся от линейных наличием одной или нескольких массивных точек в центре вращения.

С точки зрения приложений в адронной спектроскопии крайне важен вопрос об устойчивости ротационных состояний относительно малых возмущений, исследованный ранее для различных струнных моделей мезонов и барионов [3, 4].

В настоящей работе рассмотрена проблема устойчивости для центрального ротационного состояния с $n = 3$ точечными массами m_1, m_2, m_3 , одна из которых (m_3) покоится в центре вращения. В частных случаях при равенстве нулю одной или двух масс имеем аналогичную задачу для центральных состояний систем с $n < 3$. Случай $m_3 = 0$ соответствует задаче об устойчивости линейного ротационного состояния с двумя точечными массами m_1 и m_2 .

1. Динамические уравнения и центральные состояния

Динамические уравнения, описывающие движение замкнутой релятивистской струны с n точечными массами m_j , с натяжением γ , мировой поверхностью $X^\mu(\tau, \sigma)$ в пространстве Минковского $R^{1,3}$ выводятся из действия и имеют вид [1]

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = 0 \quad (1)$$

$$m_j \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}_j^\mu(\tau)}{\sqrt{\dot{x}_j^2(\tau)}} + \gamma \left[X'^\mu + \dot{\sigma}_j(\tau) \dot{X}^\mu \right] \Big|_{\sigma=\sigma_j-0} - \gamma \left[X'^\mu + \dot{\sigma}_j(\tau) \dot{X}^\mu \right] \Big|_{\sigma=\sigma_j+0} = 0, \quad (2)$$

$$m_n \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}_0^\mu(\tau)}{\sqrt{\dot{x}_0^2(\tau)}} + \gamma \left[X'^\mu(\tau^*(\tau), 2\pi) - X'^\mu(\tau, 0) \right] = 0. \quad (3)$$

при выполнении налагаемых без ограничения общности условий ортонормальности

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (4)$$

и условий

$$\sigma_0(\tau) = 0, \quad \sigma_n(\tau) = 2\pi. \quad (5)$$

Здесь $\dot{X}^\mu \equiv \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu \equiv \partial_\sigma X^\mu$, скалярное произведение в $R^{1,3}$ $(a, b) = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, скорость света $c = 1$, параметр σ изменяется в пределах $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_n$, то есть $\sigma \in [0, 2\pi]$, уравнения $\sigma = \sigma_j(\tau)$ или

$$x^\mu = x_j^\mu(\tau) \equiv X^\mu(\tau, \sigma_j(\tau)), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

определяют траектории массивных точек, причем при $j = 0$ и $j = n$ они описывают одну и ту же траекторию n -ой точки

$$X^\mu(\tau^*, 2\pi) = X^\mu(\tau, 0) \quad (6)$$

на мировой поверхности, имеющей форму трубки. Два параметра τ и τ^* , входящие в условие замыкания мировой поверхности (6), связаны соотношением $\tau^* = \tau^*(\tau)$ [5, 6].

Решение системы (1)–(6), описывающее центральное ротационное состояние с $n = 3$ и массой m_3 , покоящейся в центре вращения, получено в работе [2] в виде

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + e_0^\mu a_0 \tau + u(\sigma) \cdot e^\mu(\omega \tau). \quad (7)$$

Здесь

$$e^\mu(\omega\tau) = e_1^\mu \cos \omega\tau + e_2^\mu \sin \omega\tau, \quad (8)$$

векторы e_0, e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный базис в $R^{1,3}$. В условии замыкания (6) $\tau^* = \tau$. Для решения (7) константами являются величины

$$\sigma_j(\tau) = \sigma_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$Q_j = \frac{\gamma}{m_j} \sqrt{\dot{x}_j^2(\tau)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Вид функции

$$u(\sigma) = \frac{a_0}{\omega} \cdot \begin{cases} \sin \omega\sigma, & \sigma \in [0, \sigma_1], \\ 2s_1c_1 \cos \omega\sigma + (s_1^2 - c_1^2) \sin \omega\sigma, & \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ -S \cos \omega\sigma + C \sin \omega\sigma, & \sigma \in [\sigma_2, 2\pi], \end{cases} \quad (11)$$

определяется из уравнения (1), непрерывности функции $X^\mu(\tau, \sigma)$ при $\sigma = \sigma_j$ и условий (2)–(6) [2]. Здесь и ниже используем обозначения для констант

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \omega\sigma_1, & s_1 &= \sin \omega\sigma_1, & C &= \cos 2\pi\omega, & S &= \sin 2\pi\omega, \\ c_3 &= \cos \omega(2\pi - \sigma_2), & s_3 &= \sin \omega(2\pi - \sigma_2), & C_2 &= \cos \omega\sigma_2, & S_2 &= \sin \omega\sigma_2. \end{aligned}$$

Выражение (7) описывает равномерное вращение двух совмещенных прямолинейных отрезков струны, которые соединяют две точки с массами m_1, m_2 , равномерно движущиеся по окружностям со скоростями v_1 и v_2 . Система вращается в плоскости e_1, e_2 с угловой скоростью $\Omega = \omega/a_0$. При этом точка с массой m_3 покоится на струне в центре вращения ($v_3 = 0$). Значения параметров (10) $\sigma_j, Q_j, m_j, v_j, a_0$ связаны соотношениями [2]

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \pi, \quad (12)$$

$$v_1 = s_1 = \sin \omega\sigma_1, \quad v_2 = s_3 = \sin \omega(\pi - \sigma_1), \quad (13)$$

$$2\frac{Q_1}{\omega} = \frac{s_1}{c_1} = \frac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2}}, \quad 2\frac{Q_2}{\omega} = \frac{s_3}{c_3} = \frac{v_2}{\sqrt{1-v_2^2}}, \quad (14)$$

$$a_0 = \frac{m_1 Q_1}{\gamma \sqrt{1-v_1^2}} = \frac{m_2 Q_2}{\gamma \sqrt{1-v_2^2}} = \frac{m_3 Q_3}{\gamma}, \quad (15)$$

$$\frac{m_1 v_1}{1-v_1^2} = \frac{m_2 v_2}{1-v_2^2}. \quad (16)$$

Если исходными данными центрального ротационного состояния являются значения параметров m_1, m_2, γ, v_1 , то, определив с помощью уравнения (16) значение v_2 , мы можем вычислить из уравнений (13) значения

$$\omega = \frac{(-1)^{k_1} \arcsin v_1 + (-1)^{k_2} \arcsin v_2}{\pi} + 2(k_1 + k_2), \quad \sigma_1 = \frac{(-1)^{k_1} \arcsin v_1 + 2\pi k_1}{\omega}. \quad (17)$$

Здесь k_1 и k_2 — произвольные целые числа, при которых имеют место неравенства $0 < \sigma_1 < \pi, s_1 > 0, s_3 > 0$. Простейшему случаю $k_1 = k_2 = 0$ соответствуют два совмещенных прямолинейных отрезка струны, соединяющие точки с массами $m_1,$

m_2 . Для других разрешенных значений k_1 и k_2 эти отрезки имеют форму ломаных, сложенных на одной (вращающейся) прямой, при этом точки сгиба (точки возврата), движутся по окружностям со скоростью света. Возникающие при этом различные топологические типы решений (7) классифицированы в работе [2].

2. Анализ устойчивости

Для анализа устойчивости центральных ротационных состояний (7) применим метод, разработанный ранее для других струнных моделей [3], [4], [7]. Рассмотрим общее решение уравнения движения (1) струны

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}[\Psi_{j+}^\mu(\tau + \sigma) + \Psi_{j-}^\mu(\tau - \sigma)], \quad \sigma \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j], \quad j = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Здесь $\Psi_{j\pm}^\mu(\tau \pm \sigma)$ — гладкие вектор-функции одного аргумента, мировая поверхность (18) является гладкой между мировыми линиями массивных точек.

Мы обозначим $\check{\Psi}_{j\pm}^\mu$ функции в выражении (18) для центрального ротационного состояния (7). Производные этих функций $\check{\Psi}_{j\pm}^\mu$ в соответствии с (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \check{\Psi}_{1\pm}^{\prime\mu}(\tau) &= a_0 [e_0^\mu \pm e^\mu(\omega\tau)], \\ \check{\Psi}_{2\pm}^{\prime\mu}(\tau) &= a_0 [e_0^\mu + 2v_1 c_1 \acute{e}^\mu(\omega\tau) \pm (2v_1^2 - 1) e^\mu(\omega\tau)], \\ \check{\Psi}_{3\pm}^{\prime\mu}(\tau) &= a_0 [e_0^\mu - S \acute{e}^\mu(\omega\tau) \pm C e^\mu(\omega\tau)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Для описания произвольного малого возмущения, то есть движения, близкого к ротационному (7), зададим вектор-функции $\Psi_{j\pm}^{\prime\mu}$ близкие к $\check{\Psi}_{j\pm}^{\prime\mu}$ в виде

$$\Psi_{j\pm}^{\prime\mu}(\tau) = \check{\Psi}_{j\pm}^{\prime\mu}(\tau) + \varphi_{j\pm}^{\prime\mu}(\tau). \quad (20)$$

Возмущение $\varphi_{j\pm}^{\prime\mu}(\tau)$ считаем малым, опуская ниже квадратичные по $\varphi_{j\pm}$ слагаемые.

Из условий ортонормальности (4) следуют условия светоподобности

$$\Psi_{j+}^{\prime 2} = \Psi_{j-}^{\prime 2} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

как для функций $\Psi_{j\pm}^{\prime\mu}$, так и для $\check{\Psi}_{j\pm}^{\prime\mu}$ в выражении (20), что в первом порядке малости по $\varphi_{j\pm}$ порождает равенство нулю скалярного произведения

$$(\check{\Psi}_{j\pm}^{\prime\mu}, \varphi_{j\pm}) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Для возмущенных движений равенства $\tau^* = \tau$ и $\sigma_j(\tau) = \sigma_j = \text{const}$ (9), вообще говоря, не выполняются и должны быть заменены на равенства

$$\tau^*(\tau) = \tau + \delta(\tau), \quad \sigma_1(\tau) = \sigma_1 + \delta_1(\tau), \quad \sigma_2(\tau) = \sigma_2 + \delta_2(\tau), \quad (22)$$

где $\delta(\tau)$ и $\delta_j(\tau)$ — малые возмущения.

Выражение (18) с функциями (20) является решением уравнений движения струны (1). Поэтому уравнения эволюции малых возмущений $\varphi_{j\pm}^{\prime\mu}(\tau)$, $\delta(\tau)$ и $\delta_j(\tau)$

мы находим, подставляя выражения (20), (19) и (22) в оставшиеся уравнения (2), (3), условие замыкания (6) и условия непрерывности на линиях $\sigma = \sigma_j(\tau)$

$$X^\mu(\tau, \sigma_j(\tau) - 0) = X^\mu(\tau, \sigma_j(\tau) + 0), \quad j = 1, 2 \quad (23)$$

в линейном по $\varphi_{j\pm}^\mu$ и δ_j приближении. При этом надо учесть равенства (21), нелинейные множители $\left\{ \left[\frac{d}{d\tau} X(\tau, \sigma_j(\tau)) \right]^2 \right\}^{-1/2}$ и поправку от возмущения аргументов τ^* и $\sigma_j(\tau)$ (22), например:

$$\check{\Psi}_{n\pm}^{\prime\mu}(\tau^* \pm 2\pi) \simeq \check{\Psi}_{n\pm}^{\prime\mu}(\tau \pm 2\pi) + \delta(\tau) \check{\Psi}_{n\pm}^{\prime\prime\mu}(\tau \pm 2\pi).$$

Наряду с вектором $e^\mu(\omega\tau)$ (8) введем ортогональный ему единичный вектор

$$\acute{e}^\mu(\omega\tau) = -e_1^\mu \sin \omega\tau + e_2^\mu \cos \omega\tau,$$

вращающийся в плоскости e_1, e_2 .

Обозначим следующим образом скалярные произведения векторов возмущений (21) на векторы $e_0, e_3, e^\mu(\omega\tau), \acute{e}^\mu(\omega\tau)$:

$$\varphi_{j\pm}^0 \equiv (e_0, \varphi_{j\pm}), \quad \varphi_{j\pm}^3 \equiv (e_3, \varphi_{j\pm}), \quad \varphi_{j\pm} \equiv (e, \varphi_{j\pm}), \quad \acute{\varphi}_{j\pm} \equiv (\acute{e}, \varphi_{j\pm}), \quad (24)$$

Подставив выражения (19) в равенства (21), получим 6 уравнений для проекций (24) возмущений:

$$\begin{aligned} \varphi_{1\pm}^0(\tau) \pm \varphi_{1\pm}(\tau) &= 0, \\ \varphi_{2\pm}^0(\tau) + 2v_1 c_1 \acute{\varphi}_{2\pm}(\tau) \pm (2v_1^2 - 1) \varphi_{2\pm}(\tau) &= 0, \\ \varphi_{3\pm}^0(\tau) - S \acute{\varphi}_{3\pm}(\tau) \pm C \varphi_{3\pm}(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Подстановка выражений (18), (20), (19) и (22) в указанные уравнения (2), (3), (6) и (23) после упрощения приводит к следующей системе из 6 векторных линейизованных уравнений для возмущений $\varphi_{\pm}^{\prime\mu}, \delta_j$ и δ :

$$\begin{aligned} \varphi_{1+}^{\prime\mu}(+1) + \varphi_{1-}^{\prime\mu}(-1) - \varphi_{2+}^{\prime\mu}(+1) - \varphi_{2-}^{\prime\mu}(-1) + 4c_1 a_0 [e^\mu(\omega\tau) \dot{\delta}_1(\tau) + \omega \acute{e}^\mu(\omega\tau) \delta_1] &= 0, \\ \varphi_{2+}^{\prime\mu}(+2) + \varphi_{2-}^{\prime\mu}(-2) - \varphi_{3+}^{\prime\mu}(+2) - \varphi_{3-}^{\prime\mu}(-2) - 4c_3 a_0 [e^\mu(\omega\tau) \dot{\delta}_2(\tau) + \omega \acute{e}^\mu(\omega\tau) \delta_2] &= 0, \\ \varphi_{3+}^{\prime\mu}(+) + \varphi_{3-}^{\prime\mu}(-) - \varphi_{1+}^{\prime\mu}(\tau) - \varphi_{1-}^{\prime\mu}(\tau) + 2a_0 e_0^\mu \dot{\delta}(\tau) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} [\varphi_{1+}^{\prime\mu}(+1) + \varphi_{1-}^{\prime\mu}(-1) + 2c_1 a_0 (e^\mu \dot{\delta}_1 + \omega \acute{e}^\mu \delta_1) + G_1 (e_0^\mu + v_1 \acute{e}^\mu)] + \\ + Q_1 [\varphi_{1+}^{\prime\mu}(+1) - \varphi_{1-}^{\prime\mu}(-1) - \varphi_{2+}^{\prime\mu}(+1) + \varphi_{2-}^{\prime\mu}(-1)] &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} [\varphi_{2+}^{\prime\mu}(+2) + \varphi_{2-}^{\prime\mu}(-2) - 2c_3 a_0 (e^\mu \dot{\delta}_2 + \omega \acute{e}^\mu \delta_2) + G_2 (e_0^\mu - v_2 \acute{e}^\mu)] + \\ + Q_2 [\varphi_{2+}^{\prime\mu}(+2) - \varphi_{2-}^{\prime\mu}(-2) - \varphi_{3+}^{\prime\mu}(+2) + \varphi_{3-}^{\prime\mu}(-2)] &= 0. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\tau} [\varphi_{1+}^{\prime\mu} + \varphi_{1-}^{\prime\mu} + (\varphi_{1+} - \varphi_{1-}) e_0^\mu] + Q_3 [\varphi_{3+}^{\prime\mu}(+) - \varphi_{3-}^{\prime\mu}(-) - \varphi_{1+}^{\prime\mu} + \varphi_{1-}^{\prime\mu} + 2\omega a_0 \acute{e}^\mu \delta] = 0.$$

В 3 последних уравнениях опущены аргументы (τ) для $\varphi_{1\pm}^\mu$, δ , δ_j и $(\omega\tau)$ для e^μ , \acute{e}^μ ; введены обозначения для других аргументов

$$(\pm_1) \equiv (\tau \pm \sigma_1), \quad (\pm_2) \equiv (\tau \pm \sigma_2), \quad (\pm) \equiv (\tau \pm 2\pi),$$

а также

$$G_1 = \varphi_{1+}(+1) - \varphi_{1-}(-1) - v_1 c_1^{-1} [\dot{\varphi}_{1+}(+1) + \dot{\varphi}_{1-}(-1) - 2\omega a_0 \delta_1],$$

$$G_2 = c_3^{-1} \left\{ C_2 [\varphi_{2-}(-2) - \varphi_{2+}(+2)] + S_2 [\dot{\varphi}_{2+}(+2) + \dot{\varphi}_{2-}(-2)] + 2\omega v_2 a_0 \delta_2 \right\}.$$

Первые два уравнения (26) следуют из условий непрерывности (23), третье — из условия замыкания (6), остальные — из уравнений (2) и (3). При упрощении уравнений (26) использованы равенства (12)–(17), (19) и (25).

Умножая скалярно уравнения (26) на базисные векторы e_0 , e_3 , $e(\tau)$, $\acute{e}(\tau)$, получим линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (с отклоняющимся аргументом) относительно δ , δ_j и проекций (24). Она определяет эволюцию малых возмущений ротационного состояния (7).

Шесть уравнений этой системы с шестью неизвестными функциями $\varphi_{j\pm}^3$, полученные как проекции уравнений (26) на вектор e_3 (ортогональный плоскости вращения), образуют следующую замкнутую подсистему:

$$\begin{aligned} \varphi_{j+}^3(+j) + \varphi_{j-}^3(-j) &= \varphi_{j^*+}^3(+j) + \varphi_{j^*-}^3(-j), \\ \varphi_{3+}^3(+) + \varphi_{3-}^3(-) &= \varphi_{1+}^3(\tau) + \varphi_{1-}^3(\tau), \\ \dot{\varphi}_{j+}^3(+j) + \dot{\varphi}_{j-}^3(-j) + Q_j [\varphi_{j+}^3(+j) - \varphi_{j-}^3(-j) - \varphi_{j^*+}^3(+j) + \varphi_{j^*-}^3(-j)] &= 0, \\ \dot{\varphi}_{1+}^3(\tau) + \dot{\varphi}_{1-}^3(\tau) + Q_3 [\varphi_{3+}^3(+) - \varphi_{3-}^3(-) - \varphi_{1+}^3(\tau) + \varphi_{1-}^3(\tau)] &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $j = 1, 2$, $j^* \equiv j + 1$. Система (27) — однородная с отклоняющимся аргументом.

Ищем решения этой системы в виде гармоник

$$\varphi_{j\pm}^3 = B_{j\pm}^3 \exp(-i\xi\tau). \quad (28)$$

Эта подстановка преобразует (27) в линейную однородную систему из 6 алгебраических уравнений относительно 6 амплитуд $B_{j\pm}^3$. Она имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда равен нулю ее определитель:

$$\begin{vmatrix} E_{1+} & E_{1-} & -E_{1+} & -E_{1-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{2+} & E_{2-} & -E_{2+} & -E_{2-} \\ -1 & -1 & 0 & 0 & E_{3+} & E_{3-} \\ (i\xi - Q_1)E_{1+} & (i\xi + Q_1)E_{1-} & Q_1E_{1+} & -Q_1E_{1-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (i\xi - Q_2)E_{2+} & (i\xi + Q_2)E_{2-} & Q_2E_{2+} & -Q_2E_{2-} \\ -i\xi - Q_3 & -i\xi + Q_3 & 0 & 0 & Q_3E_{3+} & -Q_3E_{3-} \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь $E_{j\pm} = \exp(\mp i\xi\sigma_j)$. Это уравнение сводится к виду

$$\begin{aligned} & 2(\cos 2\pi\xi - 1) - \xi(Q_1^{-1} + Q_2^{-1} + Q_3^{-1}) \sin 2\pi\xi + \\ & + \xi^2 \left(\frac{\sin^2 \pi\xi}{Q_1 Q_2} + \frac{\tilde{s}_3 \sin \sigma_2 \xi}{Q_2 Q_3} + \frac{\tilde{s}_{23} \sin \sigma_1 \xi}{Q_1 Q_3} \right) - \frac{\xi^3 \tilde{s}_3 \sin \sigma_1 \xi \cdot \sin \pi\xi}{Q_1 Q_2 Q_3} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\tilde{s}_3 = \sin(\pi - \sigma_1)\xi$, $\tilde{s}_{23} = \sin(2\pi - \sigma_1)\xi$.

Уравнение (29) определяет спектр частот ξ поперечных (по отношению к плоскости вращения e_1, e_2) малых возмущений рассматриваемого центрального ротационного состояния. Если у этого уравнения найдется комплексный корень $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ с положительной мнимой частью ξ_2 , то амплитуда соответствующего возмущения будет расти экспоненциально:

$$\varphi_k^3 = B_k^3 \exp(-i\xi_1\tau) \cdot \exp(\xi_2\tau).$$

В этом случае исследуемое ротационное состояние оказывается неустойчивым [3, 4].

Анализ левой части $f(\xi)$ уравнения (29) при комплексных $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, иллюстрируемый рис. 1, показывает, что все корни этого уравнения вещественны ($\xi = \xi_1$) и образуют счетный набор. На рис. 1 жирными и тонкими линиями показаны линии нулевого уровня соответственно вещественной и мнимой части функции $f(\xi) = f(\xi_1 + i\xi_2)$ в уравнении (29). Корням данного уравнения соответствуют точки пересечения жирной и тонкой линии на рис. 1. Исходными данными ротационного состояния (7) являются указанные значения параметров (10) Q_1, Q_2 и Q_3 . Они позволяют определить значения ω, σ_1, v_j и др. с помощью уравнений (12)–(17). Например, ω является одним из корней уравнения

$$\operatorname{tg} \pi\omega = \frac{2\omega(Q_1 + Q_2)}{\omega^2 - 4Q_1Q_2}, \quad (30)$$

следующего из уравнений (14). Для состояния на рис. 1а выбран корень этого уравнения $\omega \simeq 0,766898$, отвечающий отношению масс $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 1 : 2,79$; для состояния на рис. 1б $\omega \simeq 2,331$, $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 3,12 : 13,18$. Частота уравнения ω для состояния на рис. 1а — наименьший положительный корень уравнения (30), ей соответствуют значения $k_1 = k_2 = 0$ в формуле (17) и прямолинейные отрезки струны между массивными точками. Состояние на рис. 1б определяется значениями $k_1 = 0, k_2 = 1$ и наличием двух точек возврата на струне.

Исследование уравнения (29) показывает, что при всех допустимых значениях Q_j, k_1, k_2 все корни этого уравнения являются вещественными числами, поэтому амплитуды поперечных малых возмущений (28) не растут с ростом времени.

3. Малые возмущения в плоскости вращения

Полученный результат не позволяет сделать вывод об устойчивости рассматриваемого центрального ротационного состояния, так как для этого необходимо рассмотреть малые возмущения других типов. Для этого умножим скалярно 6 уравнений системы (26) на 3 вектора $e_0, e(\tau), \acute{e}(\tau)$, используя при этом соотношения

$$e^\mu(\tau) = c_1 e^\mu(\pm_1) \mp s_1 \acute{e}^\mu(\pm_1) = C_2 e^\mu(\pm_2) \mp S_2 \acute{e}^\mu(\pm_2) = C e^\mu(\pm) \mp S \acute{e}^\mu(\pm)$$

и их аналоги для $\acute{e}(\tau)$ для умножения на вектор-функции $\varphi_{j\pm}^\mu(\pm_j)$ с различными аргументами.

Если из получившихся уравнений исключить функции $\varphi_{j\pm}^0$ с помощью соотношений (25), например, $\varphi_{1\pm}^0(\tau) = \mp \varphi_{1\pm}(\tau)$, то среди оставшихся 18 уравнений три

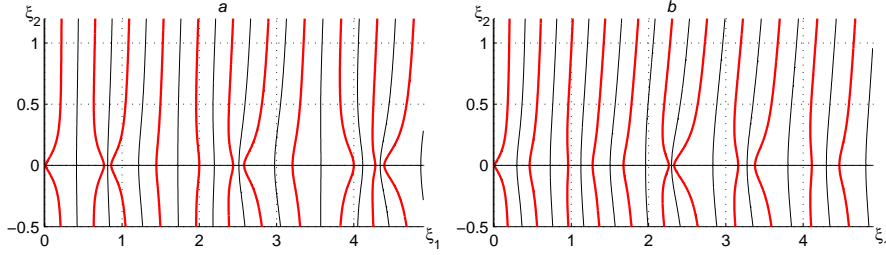


Рис. 1: Линии нулевого уровня вещественной части (жирные) и мнимой части (тонкие) уравнения (29); а) $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$, б) $Q_1 = 1, Q_2 = 0,4, Q_3 = 0,1$.

окажутся линейными комбинациями остальных. Исключив их, получим систему из 15 линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом относительно 15 неизвестных функций $\varphi_{j\pm}, \dot{\varphi}_{j\pm}$ ($j = 1, 2, 3$), $\delta_1, \delta_2, \delta$ — аналог системы (27). Для иллюстрации приведем 8 уравнений этой системы, которые являются следствием 1-го, 3-го и 6-го уравнений (26):

$$\begin{aligned}
&\varphi_{1+}(+1) - \varphi_{1-}(-1) + (c_1^2 - s_1^2)[\varphi_{2+}(+1) - \varphi_{2-}(-1)] - 2s_1c_1[\dot{\varphi}_{2+}(+1) + \dot{\varphi}_{2-}(-1)] = 0, \\
&c_1[\varphi_{1+}(+1) + \varphi_{1-}(-1) - \varphi_{2+}(+1) - \varphi_{2-}(-1) - 4a_0\dot{\delta}_1(\tau)] + \\
&\quad + s_1[\dot{\varphi}_{1-}(-1) - \dot{\varphi}_{1+}(+1) + \dot{\varphi}_{2+}(+1) - \dot{\varphi}_{2-}(-1)] = 0, \\
&s_1[\varphi_{1+}(+1) - \varphi_{1-}(-1) - \varphi_{2+}(+1) + \varphi_{2-}(-1)] + \\
&\quad + c_1[\dot{\varphi}_{1+}(+1) + \dot{\varphi}_{1-}(-1) - \dot{\varphi}_{2+}(+1) - \dot{\varphi}_{2-}(-1) - 4\omega a_0\delta_1(\tau)] = 0, \\
&\varphi_{1+}(\tau) + \varphi_{1-}(\tau) - C\varphi_{3+}(+) - C\varphi_{3-}(-) + S\dot{\varphi}_{3+}(+) - S\dot{\varphi}_{3-}(-) = 0, \\
&\dot{\varphi}_{1+}(\tau) + \dot{\varphi}_{1-}(\tau) - S\varphi_{3+}(+) + S\varphi_{3-}(-) - C\dot{\varphi}_{3+}(+) - C\dot{\varphi}_{3-}(-) = 0, \\
&\varphi_{1+}(\tau) - \varphi_{1-}(\tau) - C\varphi_{3+}(+) + C\varphi_{3-}(-) + S\dot{\varphi}_{3+}(+) + S\dot{\varphi}_{3-}(-) + 2a_0\dot{\delta}(\tau) = 0, \\
&\dot{\varphi}_{1+} + \dot{\varphi}_{1-} - \omega(\varphi_{1+} + \varphi_{1-}) = Q_3[\varphi_{1+} - \varphi_{1-} - C(\varphi_{3+} - \varphi_{3-}) + S(\dot{\varphi}_{3+} + \dot{\varphi}_{3-})], \\
&\dot{\varphi}_{1+} + \dot{\varphi}_{1-} + \omega(\varphi_{1+} + \varphi_{1-}) = Q_3[\dot{\varphi}_{1+} - \dot{\varphi}_{1-} - S(\varphi_{3+} + \varphi_{3-}) - C(\dot{\varphi}_{3+} - \dot{\varphi}_{3-}) + 2\omega a_0\delta].
\end{aligned}$$

В последних уравнениях опущены аргументы (τ) для $\varphi_{1\pm}, \dot{\varphi}_{1\pm}, \delta$, и (\pm) для $\varphi_{3\pm}, \dot{\varphi}_{3\pm}$.

Если мы ищем решения этой системы в виде гармоник (28)

$$\varphi_{j\pm} = B_{j\pm}e^{-i\xi\tau}, \quad \dot{\varphi}_{j\pm} = \dot{B}_{j\pm}e^{-i\xi\tau}, \quad 2a_0\delta_j = \Delta_j e^{-i\xi\tau}, \quad 2a_0\delta = \Delta e^{-i\xi\tau}, \quad (31)$$

то получим линейную однородную систему из 15 алгебраических уравнений относительно 15 амплитуд $B_{j\pm}, \dot{B}_{j\pm}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta$. Приравнивая к нулю ее определитель, получаем уравнение вида $f(\xi) = 0$, корни которого являются частотами малых возмущений (в плоскости вращения e_1, e_2) рассматриваемого ротационного состояния.

Для выполнения очень большого объема вычислений при нахождении упомянутого определителя необходимо было прибегнуть к помощи символьных вычислений в пакете MATLAB с проверкой их численными методами. На первом этапе задача была решена для симметричного состояния с одинаковыми массами подвижных точек:

$$m_1 = m_2, \quad \sigma_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (32)$$

Равенства (32) влекут равенства $s_1 = s_3$, $c_1 = c_3$, $v_1 = v_2$, $Q_1 = Q_2$.

В этом случае полученное уравнение спектра частот малых возмущений распадается на множители, то есть равносильно совокупности следующих уравнений:

$$\left(\xi \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{2} - \omega \operatorname{tg} \frac{\pi \omega}{2} \right) \left(c_1^2 \xi^2 - 2s_1 c_1 \omega \xi \operatorname{ctg} \frac{\pi \xi}{2} - S_1^* \omega^2 \right) = 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{c} \xi (\xi^2 - \omega^2) [\tilde{s} c_1^3 \xi^3 - 3\tilde{c} s_1 c_1^2 \omega \xi^2 - \tilde{s} (1 + 3s_1^2) c_1 \omega^2 \xi + \tilde{c} s_1 S_1^* \omega^3] = \\ & = (\tilde{c}_1 c_1^2 \xi^2 + 2\tilde{s}_1 s_1 c_1 \omega \xi - \tilde{c}_1 S_1^* \omega^2) \times \\ & \times 4Q_3 \left[c_1 \xi^3 \cos \frac{3\pi \xi}{2} + 2(\tilde{c} \tilde{s}_1 s_1 \omega + \tilde{s} \tilde{c}_1 c_1 Q_3) \xi^2 + (\tilde{c} \tilde{c}_1 c_1 \omega + 2\tilde{s} \tilde{s}_1 s_1 Q_3) \omega \xi + \tilde{c} \tilde{s}_1 s_1 \omega^3 \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь

$$S_1^* = 1 + s_1^2, \quad \tilde{c} = \cos \pi \xi, \quad \tilde{s} = \sin \pi \xi, \quad \tilde{c}_1 = \cos \sigma_1 \xi, \quad \tilde{s}_1 = \sin \sigma_1 \xi.$$

Исследование уравнения (33) (распадающегося на два множителя) при комплексных $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ показывает, что при всех значениях параметров ω и $Q_1 = \frac{1}{2}\omega s_1/c_1$ все корни этого уравнения являются вещественными и образуют счетный набор. В этом смысле поведение этих корней аналогично поведению корней уравнения (29).

Иначе ведут себя корни уравнения (34). Они показаны на рис. 2 в виде пересечений жирных и тонких линий для состояний двух видов: слева — при $Q_1 = Q_2 = 1/4$, $\omega = 1/2$, $v_1 = v_2 \simeq 0,707$; справа — при $Q_1 = Q_2 = 1$, $\omega \simeq 0,766898$, $v_j \simeq 0,934$ (ср. с рис. 1а) при различных значениях Q_3 и соответствующих $m_3 = \gamma a_0/Q_3$ (15).

Рис. 2 демонстрирует наличие комплексных корней уравнения (34) с положительными мнимыми частями $\xi_2 > 0$ в случае, когда значение параметра Q_3 (и связанное с ним значение m_3) не является слишком большим или слишком малым. Эти корни соответствуют наличию экспоненциально растущих мод возмущений: $|\varphi| \sim \exp(\xi_2 \tau)$.

Такая же картина имеет место и при других значениях ω . Это позволяет сделать вывод о неустойчивости центрального ротационного состояния вида (32), если масса в центре удовлетворяет ограничениям

$$0 < m_3 < m_{3cr}. \quad (35)$$

Критическое значение m_{3cr} (и соответствующая значение Q_{3cr}) определяется из условия исчезновения комплексных корней уравнения (34) (с $\operatorname{Im} \xi \neq 0$) при $m_3 > m_{3cr}$.

При любых $Q_1 = Q_2$ и при сколь угодно малых $m_3 > 0$ (больших Q_3) на мнимой оси существует корень $\xi^* = i\xi_2^*$ ($\xi_2^* > 0$), стремящийся к нулю при $m_3 \rightarrow 0$. Для состояний с $\omega \leq 0,5$, $Q_1 \leq 0,25$ уравнение (34) не имеет других комплексных

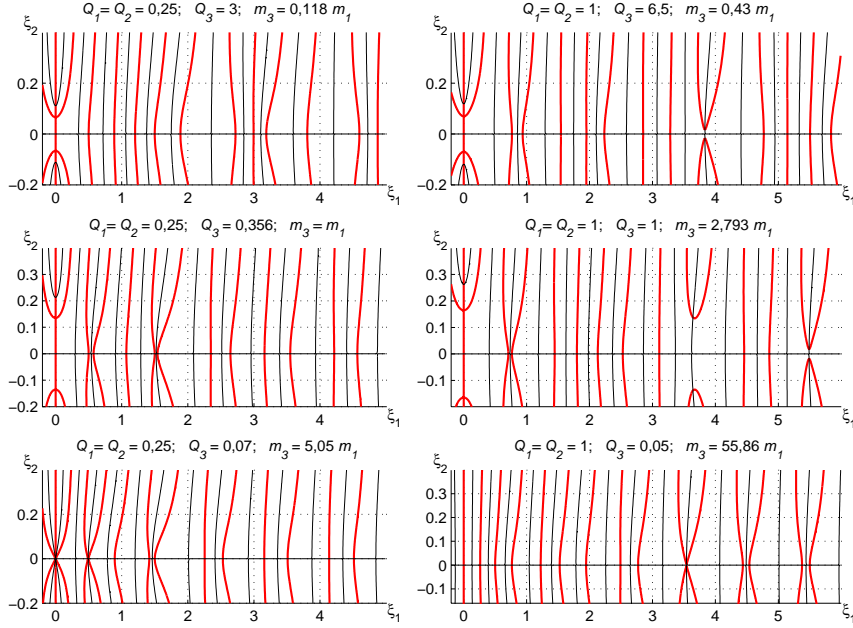


Рис. 2: Линии нулевого уровня вещественной части (жирные) и мнимой части (тонкие) уравнения (34) при указанных значениях Q_j и m_3 .

корней кроме $\xi^* = i\xi_2^*$. С увеличением массы m_3 величина ξ_2^* (инкремент роста возмущений) возрастает, достигая максимума при m_3 , близких к m_1 по порядку величины. При дальнейшем увеличении m_3 (уменьшении Q_3) инкремент ξ_2^* уменьшается, обращаясь в нуль при критическом значении $m_{3cr} \equiv m_{3cr}^* = \gamma a_0 / Q_{3cr}^*$, фигурирующем в условии (35). Для случая $Q_1 = Q_2 = 1/4$ величина $m_{3cr}^* \simeq 5,05 m_1$.

Критическое значение Q_{3cr}^* , отвечающее исчезновению корня ξ^* , можно вычислить, подставив в уравнение (34) $\xi = i\xi_2$, и исследовав его поведение при $\xi_2 \rightarrow 0$:

$$s_1 S_1^* \omega^5 \xi_2 - 2Q_3 S_1^* \omega^4 \frac{c_1(1 + \operatorname{ch} \pi \xi_2) + s_1 \omega \operatorname{sh} \pi \xi_2}{\operatorname{ch} \pi \xi_2} + \varphi(\xi_2) = 0, \quad \varphi(\xi_2) = \mathcal{O}(\xi_2^3).$$

Функция $\varphi(\xi_2) = \varphi_3 \xi_2^3 + \varphi_5 \xi_2^5 + \dots$ положительна при $\xi_2 > 0$ (содержит только положительные слагаемые), поэтому корень $\xi_2 = \xi_2^*$ данного уравнения существует только при условии $2Q_3(2c_1 + \pi s_1 \omega) > s_1 \omega$. Из этого условия с учетом равенств (14) и (32) находим критическое значение параметра (10) $Q_{3cr} = Q_{3cr}^*$ для корня $i\xi_2^*$:

$$Q_{3cr}^* = \frac{1}{2\pi + 4c_1(\omega s_1)^{-1}} = \frac{1}{2\pi + 2Q_1^{-1}}. \quad (36)$$

В пределе $m_1 \rightarrow 0$, $m_2 \rightarrow 0$ ($Q_j \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$) выражение (36) принимает вид, совпадающий с полученным в работах [7] условием неустойчивости $Q > Q_{cr}^* = (2\pi)^{-1}$ центрального ротационного состояния для замкнутой струны с

одной точечной массой. Уравнение спектра малых возмущений для этой струны [7]

$$\xi^3 + 2Q(2\xi^2 + \omega^2) \operatorname{tg} \pi\xi + 4Q^2\xi \operatorname{tg}^2 \pi\xi - \omega^2\xi = 0$$

следует из уравнения (34) ($Q \equiv Q_3$) в указанном пределе $m_j \rightarrow 0$, $j = 1, 2$.

Опишем подробнее структуру комплексных корней уравнения (34). В силу нечетности и вещественности коэффициентов функции $f(\xi)$ в этом уравнении его корни расположены симметрично относительно каждой из осей. Поэтому при подсчете числа корней будем учитывать только корни в квадранте $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $\xi_2 > 0$.

При $Q_1 > 1/4$ для некоторого интервала значений m_3 существует второй комплексный корень уравнения (34) (обозначаемый ниже ξ°), при больших значениях Q_1 , соответствующих $v_1 \rightarrow 1$, появляются третий и последующие корни. В частности, на рис. 2 при $Q_1 = 1$ корень ξ° появляется при $Q_3 < 6,667$; при $Q_3 = 1$ комплексные корни имеют значения $\xi^* \simeq 0,262i$; $\xi^\circ \simeq 3,64 + 0,137i$. Здесь же наблюдается и третий корень $\xi^\Delta \simeq 5,49 + 0,017i$ существующий в диапазоне $0,86 < Q_3 < 1,65$.

При различных Q_1 критическое значение Q_{3cr} определяется исчезновением комплексного корня ξ^* или ξ° . В примерах на рис. 2 при $Q_1 = 1/4$ реализуется первый вариант, и $Q_{3cr} = Q_{3cr}^* \simeq 0,07$; при $Q_1 = 1$ — второй: $Q_{3cr} = Q_{3cr}^\circ \simeq 0,05$.

В случае $m_3 = 0$, что соответствует пределу $Q_3 \rightarrow \infty$, масса в центре отсутствует, ротационное состояние является линейным с $n = 2$, и уравнение (34) принимает вид

$$\left(\xi + \omega \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi\xi}{2} \right) \xi \sin \pi\xi = 0. \quad (37)$$

При всех значениях ω оно имеет лишь вещественные корни. Это свидетельствует об устойчивости линейных ротационных состояний с $n = 2$ вида (32).

Устойчивость имеет место и при $Q_3 = 0$ ($m_3 \rightarrow \infty$).

Обобщим полученные результаты анализа устойчивости на случай произвольных масс, в частности $m_1 \neq m_2$. Уравнение спектра малых возмущений в плоскости вращения, обобщающее совокупность уравнений (33), (34), здесь не приведено из-за его громоздкости. Результаты исследования комплексных корней этого уравнения представлены на рис. 3 с использованием тех же обозначений, что и на рис. 2.

Для исследуемого состояния $\omega \simeq 0,62025$. Поведение комплексных корней качественно похоже на ситуацию при $m_1 = m_2$. А именно, при $m_1 \neq m_2$ в области значений массы m_3 (35) существуют комплексные корни, следовательно, состояние является неустойчивым. По-прежнему, в случаях $m_3 = 0$ (линейное ротационное состояние) и $m_3 \rightarrow \infty$ (фиксирована бесконечно тяжелая точка в центре) отсутствуют комплексные частоты, и имеет место устойчивость в линейном приближении.

Комплексные корни на рис. 3 как и на рис. 2 наблюдаются трех видов: чисто мнимый корень ξ^* , а также корни ξ° и ξ^Δ . Полагая для удобства $m_1 = 1$ (это равносильно равенству $\gamma a_0 \simeq 3,376$) заметим, что с увеличением значения m_3 корень ξ° появляется при $m_3 \simeq 0,42$, ξ^Δ — при $m_3 \simeq 1,64$; при $m_3 \simeq 30,7$ исчезает корень ξ° , при $m_3 \simeq 38,1$ исчезает корень ξ^* , наконец, последний корень ξ^Δ исчезает при $m_3 = m_{3cr} \simeq 67,5$ — критическом значении в условии (35). При других параметрах состояния критическая масса m_{3cr} определяется из условия исчезновения корня ξ^* или других корней.

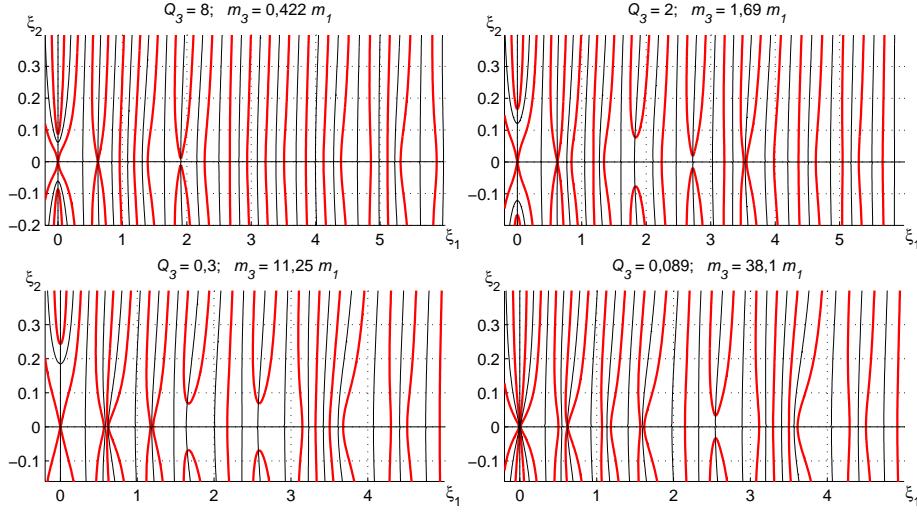


Рис. 3: Частоты малых возмущений для системы с $Q_1 = 1$, $Q_2 = \frac{1}{4}$ ($m_2 \simeq 10,5 m_1$) и указанными значениями Q_3 и m_3 .

Обобщение выражения (36) для критического значения параметра Q_{3cr}^* , определяющего исчезновение корня ξ^* , имеет вид

$$(Q_{3cr}^*)^{-1} = 2\pi + Q_1^{-1} + Q_2^{-1}.$$

С учетом равенства (15) $m_3 = \gamma a_0 / Q_3$ находим критическое значение массы

$$m_{3cr}^* = 2\pi\gamma a_0 + \frac{m_1}{\sqrt{1-v_1^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-v_2^2}} \equiv E - m_3, \quad (38)$$

которое совпадает с энергией данного состояния струны без вклада массы m_3 [1, 6].

Таким образом, можно сделать вывод о неустойчивости данного ротационного состояния, если центральная масса меньше энергии струны с остальными массами.

4. Численное моделирование возмущений ротационных состояний

Этот раздел посвящен численному исследованию характера и этапов развития обнаруженной выше неустойчивости центральных ротационных состояний (7). Использован предложенный в работах [3, 4, 7] метод расчета движения струны с массами m_j на основе заданных начальных условий — начального положения струны $X^\mu|_{ini} = \varrho^\mu(\tilde{\sigma})$ и начальных скоростей ее точек $\dot{X}^\mu|_{ini} = v^\mu(\tilde{\sigma})$, $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\sigma)$.

Если начальные условия соответствуют ротационному состоянию (7) с малым возмущением, то расчеты, приведенные на рис. 4 для указанных параметров состояния, показывают эволюцию данного возмущения в виде «фотографий» положения струны на плоскости вращения, сделанных через равные промежутки

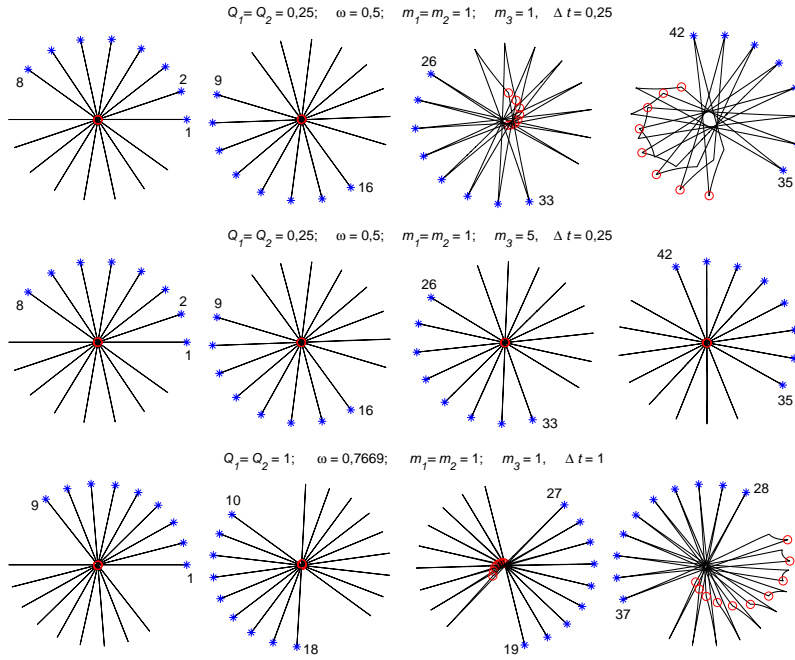


Рис. 4: Численное моделирование эволюции возмущений ротационных состояний.

времени Δt . Кружком обозначена позиция центральной точки m_3 , звездочкой — точки m_1 , рядом с ней проставлен номер «фотографии» струны. Для всех трех показанных состояний в начальных условиях задано возмущение скорости $v^\mu(\tilde{\sigma}) = v_{rot}^\mu(\tilde{\sigma}) + \delta v^\mu(\tilde{\sigma})$; малая поправка δv^μ отлична от нуля лишь на интервале $\tilde{\sigma}_2 < \tilde{\sigma} < \tilde{\sigma}_3$ ($\tilde{\sigma}_3 - \tilde{\sigma}_2 = \pi$) между массами m_2 и m_3 , где имеет вид $\delta v^\mu(\tilde{\sigma}) = 0,01 \sin(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_2)$.

Как видим, если значение m_3 находится в интервале (35), и инкремент роста возмущения ξ_2^* достаточно велик, то эволюция растущего возмущения приводит к отклонению массы m_3 от центрального положения и к превращению сложенной вдвое струны во вращающийся треугольник со сменой положений массивных точек. Такая ситуация имеет место в двух примерах на рис. 4, в которых $m_3 = 1$.

В случае $m_3 \in m_{3cr}$, малые возмущения не растут, центральная массивная точка остается вблизи центра, и состояние является устойчивым. Похожая картина наблюдается на рис. 4 в случае $m_3 = 5$, когда это значение близко к критическому $m_{3cr} \simeq 5,05$ — инкремент роста возмущений очень мал, поэтому они не заметны.

Заключение

Аналитическое исследование спектра малых возмущений и численное моделирование эволюции данных возмущений показали, что центральные ротационные состояния (7) струны с тремя массивными точками неустойчивы, если значение центральной массы m_3 лежит в интервале $0 < m_3 < m_{3cr}$. Критическое значение

m_{3cr} равно энергии системы $E - m_3$ без вклада m_3 (в единицах, в которых скорость света $c = 1$).

В случае $m_3 = 0$ линейное ротационное состояние с $n = 2$ устойчиво.

Наличие порогового значения m_{3cr} существенно отличает замкнутую струну от линейной струнной модели $q-q-q$ [8]. Для последней модели центральные ротационные состояния неустойчивы при любых значениях центральной массы.

Автор признателен РФФИ за поддержку в рамках проекта 05-02-16722.

Список литературы

- [1] Шаров Г.С. Спектр состояний замкнутой струны, нагруженной массивными точками // Вестник ТвГУ, Сер. Прикладная матем., 2007. №5 (33). Вып. 4. С. 21.
- [2] Миловидов А.Е., Шаров Г.С. Классификация ротационных состояний замкнутой струны с массивными точками // Вестник ТвГУ, Сер. Прикладная математика, 2007. №27 (55). Вып. 7. С. 131.
- [3] Sharov G.S. Quasirotational motions and stability problem in dynamics of string hadron models // Physical Review D. 2000. V. 62. №9. P. 094015, hep-ph/0004003.
- [4] Шаров Г.С. Неустойчивость струнной модели бариона Y в рамках классической динамики // Ядерная физика 2002. Т. 65. №5. С. 938.
- [5] Миловидов А.Е., Шаров Г.С. Замкнутые релятивистские струны в пространствах с нетривиальной геометрией // Теоретич. и математич. физика. 2005. Т. 142. №1. С. 72.
- [6] Sharov G.S. String baryonic model "triangle": Hypocycloidal solutions and the Regge trajectories // Physical Review D. 1998 V. 58. №11. P. 114009.
- [7] Миловидов А.Е., Шаров Г.С. Проблема устойчивости для замкнутой релятивистской струны с точечной массой // Вестник ТвГУ. Сер. Физика. Тверь. 2005, №9 (15), Вып. 2. С. 114, hep-th/0512323.
- [8] Шаров Г.С. Возмущения ротационных движений для струнных моделей адронов и проблема устойчивости // Известия вузов. Физика 2002. Т. 45. №1. С. 65.