УДК 510.652

ЭФФЕКТИВНАЯ ТРАНСЛЯЦИЯ РАСШИРЕННЫХ $<$-ИНВАРИАНТНЫХ ФОРМУЛ В $<$-ОГРАНИЧЕННЫЕ В АРИФМЕТИКЕ СЕМЕНОВА[1]

С.М. Дудаков
Кафедра информатики

Поступила в редакцию 06.09.2007, после переработки 24.01.2008

Ранее было показано, что для арифметики Семенова имеет место коллапс к порядку. В данной работе мы демонстрируем, что в ряде случаев для арифметики Семенова возможна эффективная трансляция формул.

In previous papers it was established in the Semenov arithmetic there is the collapse result. Here we prove this result can be effective in many cases.

Ключевые слова: арифметика Семенова, коллапс к порядку.
Keywords: Semenov arithmetic, collapse result.

1. Введение

Задача, которая решается в данной работе, проистекает из теории баз данных (БД). БД — конечная совокупность конечных таблиц. Таблицы можно считать конечными отношениями, названия которых образуют конечную сигнатуру Ξ, а элементы таблиц берутся из какого-либо фиксированного множества A. Хотя количество таблиц и количество элементов в каждой из них конечно, но эти количества потенциально неограниченны, поэтому A следует считать бесконечным. Таким образом, БД можно считать алгебраической системой $\mathfrak{D}$ сигнатуры Ξ, носитель которой — конечное подмножество A. Любая информация реально храниться в некотором порядке, поэтому всегда можно считать, что на $\mathfrak{D}$ кроме отношений БД есть линейный порядок. Для извлечения информации из БД, как правило, используются языки первого порядка. В простейшем случае *запросы* являются замкнутыми формулами первого порядка, которые мы и будем рассматривать. Хорошо известно, что не всякое свойство алгебраических систем может быть записано такими формулами. Например, если сигнатура БД содержит только один одноместный предикатный символ P, то невозможно записать в этой сигнатуре формулу первого порядка, выделяющую в точности те БД, в которых количество элементов P является четным.

Один из путей, который помог бы преодолеть это ограничение, состоит в следующем. Обычно над множеством A, элементы которого используются для построения $\mathfrak{D}$, определены какие-либо стандартные отношения, образующие сигнатуру Σ.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 07-01-00637 и 08-01-00241.

Например, если $A = \omega$, то над ω в качестве таких отношений можно использовать операции сложения и умножения. Таким образом, элементы, составляющие $\mathfrak{D}$, являются элементами некой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ. Ю.Ш.Гуревич показал, что при использовании отношения порядка увеличение выразительной возможности действительно происходит. Возможно, что если в языке использовать не только отношения из Ξ и порядок, но и другие отношения из Σ (формулы в сигнатуре $\Sigma \cup \Xi$ называются *расширенными*), то тогда можно будет записать какие-то свойства, которые нельзя записать формулами в сигнатуре $(\leqslant, \Xi)$ (то есть, $<$-*ограниченными формулами*). Разумеется, речь должна идти не о связи отношений из Ξ и Σ, а только о свойствах отношений из Ξ. Более точно, мы хотим чтобы значение формулы не менялось при произвольных изоморфизмах $\mathfrak{D}$ внутри $\mathfrak{A}$, сохраняющих порядок. Такие формулы называются $<$-*инвариантными*.

Кроме того, реальные языки запросов, например, SQL, работают только с *активными* запросами, то есть такими, где все кванторы ограничены *активной областью* БД. Активная область — множество элементов, входящих в какое-либо отношение БД.

Как известно, (см., например, [9, 8, 7, 11, 1]) для многих разрешимых теорий имеет место свойство *коллапса к порядку*: для любой модели $\mathfrak{A}$ такой теории любая $<$-инвариантная в ней формула эквивалентна некоторой $<$-ограниченной. Но используемый для доказательства метод не позволяет получить *эффективный алгоритм трансляции*. В частном случае упорядоченных абелевых групп задача решена в [10]. В связи с этим в работе [8] поставлена задача разработки такого метода для разрешимых теорий.

В работах [2, 4] был предложен метод, позволяющий доказывать существование алгоритма трансляции $<$-инвариантных формул в активные $<$-ограниченные. В [2] показано, что эффективная трансляция возможна для арифметики Пресбургера, теории вещественно замкнутых полей и, вообще, для широкого круга квази-о-минимальных теорий.

В настоящей работе мы показываем возможность эффективной трансляции для арифметики Семенова в ряде случае.

Во втором параграфе мы даем основные определения. В третьем и четвертом — показываем, как полученные в [2, 4] результаты можно применить к арифметике Семенова.

2. Определения

Следующие определения введены А.Л.Семеновым в работах [5, 6].

Определение 1 (Семенов). *Одноместная функция f на множестве натуральных чисел называется* согласованной со сложением*, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *для любого натурального $\mathfrak{n}$ значение $f(x)$ периодично по модулю $\mathfrak{n}$ для всех x, начиная с некоторого;*

2) *для всякой неограниченной конечной суммы*

$$S(x) = \sum_i \mathfrak{a}_i f(x + \mathfrak{b}_i) \tag{1}$$

существует такое $\mathfrak{s}'_S \in \omega$, *что либо* $S(x+\mathfrak{s}'_S) > f(x)$ *для всех* $x \in \omega$, *либо* $S(x+\mathfrak{s}'_S) < -f(x)$ *для всех* $x \in \omega$;

3) f *строго возрастает.*

Функция называется эффективно согласованной со сложением, *если период в пункте* 1) *эффективно находится по* $\mathfrak{n}$, *по сумме* (1) *можно эффективно определить, является ли она ограниченной, и если не является, то константа* $\mathfrak{s}'_S$ *эффективно находится по* S.

Обогащение арифметики Пресбургера

$$\mathfrak{L}_{SF} = (\omega, 0, 1, <, +, f),$$

в котором функция f согласована со сложением, предложено А.Л.Семеновым в [5, 6]. Там же показано, что для случая эффективной согласованности такие обогащения разрешимы.

В [6] показано, что если функция f является согласованной со сложением и не определима с помощью сложения, то для всякого $\mathfrak{c} \in \omega$ существует $\mathfrak{s}_\mathfrak{c} \in \omega$ такое, что для всех $x \in \omega$

$$f(x+\mathfrak{s}_\mathfrak{c}) \geqslant \mathfrak{c} f(x) + \mathfrak{c}x, \tag{2}$$

откуда следует, что f растет не медленнее, чем показательная функция. В частности, существует такое $\mathfrak{s}_2 \in \omega$, что

$$f(x+\mathfrak{s}_2) \geqslant 2f(x). \tag{3}$$

Из вышесказанного следует, что для всякой неограниченной суммы $S(x)$ вида (1) существует константа $\mathfrak{s}_S \in \omega$ такая, что для всех x выполнено

$$f(x-\mathfrak{s}_S) \leqslant |S(x)| \leqslant f(x+\mathfrak{s}_S). \tag{4}$$

Если функция согласована со сложением эффективно, то все указанные константы: $\mathfrak{s}_\mathfrak{c}$, $\mathfrak{s}_2$ и $\mathfrak{s}_S$, можно эффективно найти.

В теории системы $\mathfrak{L}_{SF}$ определима обратная к f функция:

$$f^{-1}(x) = y \iff (f(0) \geqslant x \wedge y = 0) \vee (f(y) \leqslant x \wedge \forall z (f(z) \leqslant x \to z \leqslant y)).$$

Здесь мы для удобства полагаем, что если $f(0) = \mathfrak{n}$, то $f^{-1}(x) = 0$ при $x \leqslant \mathfrak{n}$.

Понятие сводимости введено в [7].

Определение 2 (Болдвин, Бенедикт). *Формула* $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ *называется* сводимой *на множестве* I *в алгебраической системе* $\mathfrak{A}$, *если существует порядковая формула* $\psi(\bar{w}, \bar{y})$ *такая, что*

$$\mathfrak{A} \models (\forall \bar{x})(\exists \bar{w} \in I)(\forall \bar{y} \in I)(\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{w}, \bar{y})).$$

В работах [2, 4] получены критерии, которые позволяют утверждать существования эффективного способа трансляции расширенных <-инвариантных формул в <-ограниченные.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ.* Трансляционным множеством *в $\mathfrak{A}$ называется почти неразличимая последовательность I, тип которой рекурсивен, и при этом любая формула сигнатуры Σ эффективно сводима на I для достаточно больших элементов из I.*

Основной результат, полученный в [2]:

Теорема 1. *Пусть T — полная разрешимая теория. Если в некоторой модели T существует трансляционное множество, то по каждой $<$-инвариантной расширенной формуле может быть эффективно построена эквивалентная активная $<$-ограниченная формула.*

3. Основная конструкция

Мы будем рассматривать произвольную эффективно согласованную со сложением функцию f. В дальнейшем мы считаем, что такая функция зафиксирована.

Для функции f, мы можем определить «гиперфункцию» F, например, следующим образом:

$$F(x) = a;\ F(x+1) = f(F(x)),$$

где a — первое число, для которого $f(a) > a$. Так как f строго возрастает, то и F тоже будет строго возрастать.

Определим множество I следующим образом:

$$I = \{F(x!) : x \in \omega\}.$$

В дальнейших построениях мы будем часто использовать термы одной переменной следующего вида:

$$t(x) = \alpha x + \sum_i \beta_i f(f^{-k_i}(x) + \mathfrak{a}_i) + \sum_i \gamma_i f^{-k'_i}(x). \tag{5}$$

Здесь $k_i \geqslant 0$ и f^{-1} — обратная к f функция, $f^0(x) = x$ и

$$f^{-k}(x) = \underbrace{f^{-1}(f^{-1}(\dots f^{-1}(}_{k \text{ раз}}x)\dots)).$$

Лемма 1. *Существует бесконечное подмножество $I' \subseteq I$ такое, что для любого терма $t(x)$ вида (5) при $\mathsf{x} \in I'$ для любого натурального $\mathfrak{p}$ значение $t(\mathsf{x})$ является константой по модулю $\mathfrak{p}$, начиная с некоторого x.*

Доказательство. Очевидно, что все сводится к определению остатков от деления чисел вида $f(f^{-k}(\mathsf{x}) + \mathfrak{a})$. А в силу периодичности f по всем модулям, достаточно ограничиться рассмотрением остатков $f^{-k}(\mathsf{x})$.

Ясно, что по модулю 1 все числа являются константами. Пусть построено бесконечное множество $I_m \subseteq I$ такое, что все $f^{-k}(\mathsf{x})$ являются константами по модулям $1, \dots, m$ для достаточно больших $\mathsf{x} \in I_m$. Пусть $I_m^0 = I_m$. Пусть $I_m^{i+1} \subseteq I_m^i$ — бесконечное множество, для которого $f^{-i}(\mathsf{x})$ является константой по модулю $m+1$. Тогда в качестве I_{m+1} берем множество минимальных элементов множеств I_m^i:

$$I_{m+1} = \{x_m^{ii} : i \in \omega\},$$

где x_m^{ij} означает j-ый по величине элемент множества I_m^i.

В качестве I' можно рассмотреть множество:

$$I' = \{i_m^m : m \in \omega\},$$

где с помощью i_m^n обозначен n-ый по величине элемент множества I_m $\square$

4. Доказательство основных результатов

Докажем главное для нас утверждение о термах вида (5).

Лемма 2. *Для всякого неограниченного терма $t(x)$ вида* (5) *существует натуральное число k_t, существует константа $\mathfrak{b}_t$, и для всех $\mathsf{x} \in I$, начиная с некоторого, выполнено*

$$f^{-k_t}(\mathsf{x}) - \mathfrak{b}_t \leqslant f^{-1}(|t(\mathsf{x})|) \leqslant f^{-k_t}(\mathsf{x}) + \mathfrak{b}_t.$$

При этом k_t и $\mathfrak{b}_t$ могут быть эффективно найдены по t.

Доказательство. Для удобства будем полагать $t(\mathsf{x})$ положительным. Противоположный случай получается заменой $t(x)$ на $-t(x)$.

Прежде всего отметим, что если $\mathsf{x} \in I$, то $f(f^{-k}(\mathsf{x})) = f^{-k+1}(\mathsf{x})$, поэтому слагаемые первого и третьего вида в термах (5) такой заменой можно исключить (для достаточно больших x) и считать, что терм $t(x)$ имеет вид

$$t(x) = \sum_i \beta_i f(f^{-k_i}(x) + \mathfrak{a}_i).$$

Будем также считать, что терм t не содержит подобных членов и все коэффициенты β_i не равны нулю.

Рассмотрим $s_l(x)$ — подсумму t вида

$$s_l(x) = \sum_{k_i = l} \beta_i f(f^{-k_i}(x) + \mathfrak{a}_i).$$

Тогда получим, что

$$t(x) = \sum_l s_l(x).$$

Согласно определению согласованной со сложением функции, или s_l является ограниченной по модулю (пусть в этом случае M_{s_l} — ограничивающая константа), или (неравенство (4)) существует константа $\mathfrak{s}_{s_l}$ и для любого x выполнено

$$f(f^{-k_i}(x) - \mathfrak{s}_{s_l}) \leqslant s_l(x) \leqslant f(f^{-k_i}(x) + \mathfrak{s}_{s_l})$$

для положительных сумм s_l или

$$f(f^{-k_i}(x) - \mathfrak{s}_{s_l}) \leqslant -s_l(x) \leqslant f(f^{-k_i}(x) + \mathfrak{s}_{s_l})$$

для отрицательных.

Если все суммы s_l оказываются ограниченными, то сам терм $t(x)$ тоже ограничен, что противоречит условию. Следовательно, хотя бы одна из сумм $s_l(x)$ не ограничена. Пусть k_t равняется минимальному из l, для которого $s_l(x)$ не ограничена.

Учитывая, что функция $f(x)$ растет не медленнее некоторой экспоненты (неравенство (2)), при $l > k_t$ выполнено $f^{-l}(x) \leqslant \log f^{-k_t}(x)$. Поэтому, начиная с некоторого x, будем иметь

$$\sum_{l>k_t} f(f^{-l}(x) \pm \mathfrak{s}_{s_l}) \pm \sum_l M_{s_l} \leqslant \frac{1}{2} f(f^{-k_t}(x) - \mathfrak{s}_{s_{k_t}}) \leqslant \frac{1}{2} f(f^{-k_t}(x) + \mathfrak{s}_{s_{k_t}}).$$

Для удобства считаем, что сумма $s_{k_t}(x)$ положительна. Для отрицательных все будет аналогично. Тогда получаем оценку $t(x)$ сверху:

$$\begin{aligned} t(x) = \sum_l s_l(x) = s_{k_t}(x) + \sum_{l>k_t} s_l(x) \leqslant \\ \leqslant f(f^{-k_t}(x) + \mathfrak{s}_{s_{k_t}}) + \sum_{l>k_t} f(f^{-l}(x) + \mathfrak{s}_{s_l}) + \sum_l M_l \leqslant \\ \leqslant \frac{3}{2} f(f^{-k_t}(x) + \mathfrak{s}_{s_{k_t}}). \end{aligned}$$

Такая же оценка снизу:

$$\begin{aligned} t(x) \geqslant f(f^{-k_t}(x) - \mathfrak{s}_{s_{k_t}}) - \sum_{l>k_t} f(f^{-l}(x) + \mathfrak{s}_{s_l}) - \sum_l M_l \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2} f(f^{-k_t}(x) - \mathfrak{s}_{s_{k_t}}). \end{aligned}$$

Снова учитывая, что f растет не медленнее экспоненты, получаем

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2} f(f^{-k_t}(x) - \mathfrak{s}_{s_{k_t}})\right) \geqslant f^{-k_t}(x) - \mathfrak{s}_{s_{k_t}} - \mathfrak{c}$$

и

$$f^{-1}\left(\frac{3}{2} f(f^{-k_t}(x) + \mathfrak{s}_{s_{k_t}})\right) \leqslant f^{-k_t}(x) + \mathfrak{s}_{s_{k_t}} + \mathfrak{c}$$

для некоторой константы $\mathfrak{c}$. Тогда $\mathfrak{b}_t = \mathfrak{s}_{s_{k_t}} + \mathfrak{c}$. □

Следствие 1. *Если $t_1(x)$ и $t_2(x)$ — два неограниченных терма вида* (5), $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in I$ *и $\mathsf{x}_1 < \mathsf{x}_2$, то $t_1(\mathsf{x}_1) < t_2(\mathsf{x}_2)$, начиная с некоторого x_1.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} t_1(\mathsf{x}_1) \leqslant f(f^{-1}(t_1(\mathsf{x}_1)) + 1) \leqslant \\ \leqslant f(f^{-k_{t_1}}(\mathsf{x}_1) + \mathfrak{b}_{t_1} + 1) \leqslant f(\mathsf{x}_1 + \mathfrak{b}_{t_1} + 1) < f(f^{-k_{t_2}}(\mathsf{x}_2) - \mathfrak{b}_{t_2}) \leqslant \\ \leqslant f(f^{-1}(t_2(\mathsf{x}_2))) \leqslant t_2(\mathsf{x}_2), \end{aligned}$$

если

$$\mathsf{x}_1 + \mathfrak{b}_{t_1} + 1 + \mathfrak{b}_{t_2} < f^{-k_{t_2}}(\mathsf{x}_2),$$

что, очевидно, выполнено для достаточно больших x_1 и x_2 из I. □

Лемма 3. *I' из леммы 1 — трансляционное множество в системе $\mathfrak{L}_{SF}$, если его тип рекурсивен.*

Доказательство. Будем считать, что $\bar{x}$ — переменные, принимающие значения из I', а $\bar{y}$ — произвольные переменные. Напомним (см.[6, 1]), что каждая формула в системе $\mathfrak{L}_{SF}$ эквивалентна экзистенциальной формуле

$$(\exists \bar{u})\psi(\bar{u}, \bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{y}}), \tag{6}$$

матрицу $\psi(\bar{u}, \bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{y}})$ которой составляют предикаты делимости и сравнения разделенных (см.[1]) термов, то есть неравенства вида

$$\underbrace{\sum_j (\mathfrak{a}_j f(u_{k_j} + \mathfrak{d}_j) + \mathfrak{b}_j u_{k_j})}_{(*)} - \sum_i t_i(\mathsf{x}_i) - r(\bar{\mathsf{y}}) \geqslant 0. \tag{7}$$

Здесь термы $t_i(\mathsf{x}_i)$ будут иметь вид взвешенной суммы слагаемых $f(\mathsf{x}_i)$ и x_i, то есть иметь вид (5). Терм $r(\bar{\mathsf{y}})$ может иметь какой угодно вид, для нас это не важно. Кроме ранее определенных операций мы в r будем допускать операцию $[v]_{I'}$, означающую наибольший элемент I', не превосходящий v. Мы покажем, с одной стороны, как определить истинность формулы на больших $\bar{\mathsf{x}}$, когда $\bar{\mathsf{y}}$ в формуле нет (т.е. что множество I' является почти неразличимым рекурсивного типа). С другой стороны, продемонстрируем, что формула является сводимой при достаточно больших x.

Мы сделаем это в два этапа. Сначала мы удалим кванторы, получив формулу вида

$$\sum_i t_i(\mathsf{x}_i) - r(\bar{\mathsf{y}}) \geqslant 0,$$

а затем покажем, как определить ее истинность для достаточно больших $\mathsf{x} \in I$, и докажем ее сводимость.

Без ограничения общности мы можем считать, что $\bar{u}$ и $\bar{\mathsf{x}}$ упорядочены по убыванию.

Если терм t_i ограничен по модулю, то его можно исключить из неравенств с помощью подстановки вместо него всевозможных значений и объединением получаемых формул с помощи дизъюнкции.

В дальнейшем будем считать, что все термы $t_i(\mathsf{x}_i)$ неограничены. Согласно следствию 1, мы можем для любого $\mathfrak{m}$ найти константу $M_{\mathfrak{m}}$ такую, что если все $\mathsf{x}_i > M_{\mathfrak{m}}$, то

$$\mathfrak{m}\left|\sum_{i>1} t_i(\mathsf{x}_i)\right| < t_1(\mathsf{x}_1).$$

Возьмем $\mathfrak{m} = 8$. Тогда для $\mathsf{x}_i > M_{\mathfrak{m}}$ получим

$$\frac{7}{8} t_1(\mathsf{x}_1) \leqslant \sum_i t_i(\mathsf{x}_i) \leqslant \frac{9}{8} t_1(\mathsf{x}_1). \tag{8}$$

Дальнейшие рассуждения будут сходны с доказательством теоремы 3 из [1]. Если для некоторого u_k термы вида $f(u_k + \mathfrak{d})$ не встречается в ψ, то элиминация квантора производится как в арифметике Пресбургера.

Напомним, что $u_1 > u_2 > \cdots > u_m$. Разобьем сумму $(*)$ на две части: $S(u_1)$ содержит все слагаемые вида $\mathfrak{a}_j f(u_1 + \mathfrak{d}_j)$, $s(\bar{u})$ — все остальное. Если сумма $S(u_1)$ ограничена по модулю, то она заменяется константами с последующим объединением полученных формул с помощью дизъюнкции.

Если $S(u_1)$ неограничена, то будем считать, что она положительна. Тогда существуют константы $\mathfrak{s}_S$ и $\mathfrak{s}^*$ такие, что

$$f(u_1 - \mathfrak{s}_S) \leqslant S(u_1) \leqslant f(u_1 + \mathfrak{s}_S) \tag{9}$$

и $f(u_1 - \mathfrak{s}_S) > 4|s(\bar{u})|$ при $u_1 > u_2 + \mathfrak{s}^*$. При $u_2 < u_1 \leqslant u_2 + \mathfrak{s}^*$ квантор по u_1 удаляется так же подстановкой и дизъюнкцией. При $u_1 > u_2 + \mathfrak{s}^*$ получаем

$$|s(\bar{u})| < \frac{1}{4} f(u_1 - \mathfrak{s}_S) \leqslant \frac{1}{4} S(u_1).$$

Для x_1 возможны три ситуации:

$$\mathsf{x}_1 \geqslant f^{k_{t_1}}(f^{-1}(8|r(\bar{\mathsf{y}})|) + \mathfrak{b}_{t_1} + 1),$$

$$\mathsf{x}_1 \leqslant f^{k_{t_1}}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{8}|r(\bar{\mathsf{y}})|\right) - \mathfrak{b}_{t_1} - 1\right)$$

или

$$f^{k_{t_1}}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{8}|r(\bar{\mathsf{y}})|\right) - \mathfrak{b}_{t_1} - 1\right) \leqslant \mathsf{x}_1 \leqslant f^{k_{t_1}}(f^{-1}(8|r(\bar{\mathsf{y}})|) + \mathfrak{b}_{t_1} + 1).$$

Рассмотрим по очереди все три случая.

1) Пользуясь леммой 2, получаем

$$|t_1(\mathsf{x}_1)| \geqslant f(f^{-1}(|t_1(\mathsf{x}_1)|)) \geqslant f(f^{-k_{t_1}}(\mathsf{x}_1) - \mathfrak{b}_{t_1}) \geqslant \\ \geqslant f(f^{-1}(8|r(\bar{\mathsf{y}})|) + 1) \geqslant 8|r(\bar{\mathsf{y}})|.$$

Если $|t_1(\mathsf{x}_1)| \geqslant 8|r(\bar{\mathsf{y}})|$, то, учитывая (8),

$$\frac{3}{4} t_1(\mathsf{x}_1) \leqslant \sum_i t_i(\mathsf{x}_i) + r(\bar{\mathsf{y}}) \leqslant \frac{5}{4} t_1(\mathsf{x}_1).$$

При

$$u_1 + \mathfrak{s}_S + \mathfrak{s}_2 < f^{-k_{t_1}}(\mathsf{x}_1) - \mathfrak{b}_{t_1} \leqslant f^{-1}(t_1(\mathsf{x}_1))$$

получаем, пользуясь (3) и (9):

$$S(u_1) + s(\bar{u}) \leqslant \frac{5}{4} S(u_1) \leqslant \frac{5}{4} f(u_1 + \mathfrak{s}_S) = \frac{5}{8} \times 2f(u_1 + \mathfrak{s}_S + \mathfrak{s}_2 - \mathfrak{s}_2) \leqslant \\ \leqslant \frac{5}{8} f(u_1 + \mathfrak{s}_S + \mathfrak{s}_2) < \frac{5}{8} f(f^{-1}(t_1(\mathsf{x}_1))) \leqslant \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} t_1(\mathsf{x}_1) \leqslant \\ \leqslant \frac{5}{6}\left(\sum_i t_i(\mathsf{x}_i) + r(\bar{\mathsf{y}})\right),$$

то есть неравенство (7) ложно.

Если же

$$u_1 - \mathfrak{s}_S - \mathfrak{s}_2 > f^{-k_{t_1}}(\mathsf{x}_1) + \mathfrak{b}_{t_1} + 1 \geqslant f^{-1}(t_1(\mathsf{x}_1)) + 1,$$

аналогично получаем:

$$S(u_1) + s(\bar{u}) \geqslant \frac{3}{4}S(u_1) \geqslant \frac{3}{4}f(u_1 - \mathfrak{s}_S) \geqslant \frac{3}{4} \times 2f(u_1 - \mathfrak{s}_S - \mathfrak{s}_2) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3}{2}f(f^{-1}(t_1(\mathsf{x}_1)) + 1) \geqslant \frac{6}{5} \times \frac{5}{4}t_1(\mathsf{x}_1) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{6}{5}\left(\sum_i t_i(\mathsf{x}_i) + r(\bar{\mathsf{y}})\right),$$

то есть (7) истинно.

При

$$f^{-k_{t_1}}(\mathsf{x}_1) - \mathfrak{b}_{t_1} - \mathfrak{s}_S - \mathfrak{s}_2 \leqslant u_1 \leqslant f^{-k_{t_1}}(\mathsf{x}_1) + \mathfrak{b}_{t_1} + \mathfrak{s}_S + \mathfrak{s}_2 + 1$$

переменную u_1 можно заменить термами вида $f^{-k_{t_1}}(\mathsf{x}_1)+\mathfrak{f}$ и взять дизъюнкцию получаемых формул. Заметим только, что вновь возникающие термы от x_1 будут иметь требуемый вид.

2) Пользуясь леммой 2, получаем

$$|t_1(\mathsf{x}_1)| \leqslant f(f^{-1}(|t_1(\mathsf{x}_1)|) + 1) \leqslant f(f^{-k_{t_1}}(\mathsf{x}_1) + \mathfrak{b}_{t_1} + 1) \leqslant$$
$$\leqslant f\left(f^{-1}\left(\frac{1}{8}|r(\bar{\mathsf{y}})|\right)\right) \leqslant \frac{1}{8}|r(\bar{\mathsf{y}})|.$$

Но если $8|t_1(\mathsf{x}_1)| \leqslant |r(\bar{\mathsf{y}})|$, то

$$\frac{7}{8}t_1(\mathsf{x}_1) + r(\bar{\mathsf{y}}) \leqslant \sum_i t_i(\mathsf{x}_i) + r(\bar{\mathsf{y}}) \leqslant \frac{9}{8}t_1(\mathsf{x}_1) + r(\bar{\mathsf{y}})$$

и

$$\frac{3}{4}r(\bar{\mathsf{y}}) \leqslant \sum_i t_i(\mathsf{x}_i) + r(\bar{\mathsf{y}}) \leqslant \frac{5}{4}r(\bar{\mathsf{y}}).$$

Рассматривается аналогично случаю 1, но вместо $f^{-1}(t_1(\mathsf{x}_1))$ берем $f^{-1}(r(\bar{\mathsf{y}}))$. Заботиться о нужном виде новых термов здесь нет необходимости.

3) Имеем

$$f^{k_{t_1}}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{8}|r(\bar{\mathsf{y}})|\right) - \mathfrak{b}_{t_1} - 1\right) \leqslant \mathsf{x}_1 \leqslant f^{k_{t_1}}(f^{-1}(8|r(\bar{\mathsf{y}})|) + \mathfrak{b}_{t_1} + 1).$$

Учитывая, что для достаточно больших значений $r(\bar{\mathsf{y}})$ может существовать не более одного элемента I, удовлетворяющего этому неравенству, получим, что либо x_1 равняется одному из конечного множества значений (при малых $r(\bar{\mathsf{y}})$), либо x_1 равен

$$[f^{k_{t_1}}(f^{-1}(8r(\bar{\mathsf{y}})) + \mathfrak{b}_{t_1} + 1)]_{I'}.$$

Заменяя x_1 на указанные значения мы избавимся от x_1 в формуле под кванторами.

Таким образом, можно удалить все кванторы из формулы (6). В результате останутся неравенства вида

$$\sum_i t_i(\mathsf{x}_i) + r(\bar{\mathsf{y}}) \geqslant 0$$

и предикаты делимости вида $Q_j(t_k(\mathsf{x}_k))$ и $Q_j(r(\bar{\mathsf{y}}))$.

Доказательство почти неразличимости и рекурсивности типа I' (это случай, когда $r(\bar{\mathsf{y}}) = \mathrm{const}$) легко получается из следствия 1 и леммы 1.

Для доказательства сводимости снова рассматриваем указанные три случая и выписываем явные неравенства для каждого x_i. □

Теорема 2. *Если гиперфункция F периодична по любому модулю для достаточно больших аргументов и эти периоды могут быть эффективно найдены, то существует алгоритм, который по любой $<$-инвариантной в системе $\mathfrak{L}_{SF}$ расширенной формуле строит эквивалентную ей активную $<$-ограниченную формулу.*

Доказательство. Следует из леммы и теоремы 1. В качестве I' в этом случае можно взять само I. □

Следствие 2. *Эффективная трансляция $<$-инвариантных расширенных формул в $<$-ограниченный возможна при обогащении арифметики Пресбургера экспонентой или факториалом.*

Доказательство. В случае факториала периодичность гиперфункции тривиальна, так ее значения будут равны нулю по всем модулям для достаточно больших аргументов.

Для экспоненты аналогичное утверждение доказано в [3]. □

Более сложное доказательство для арифметики Семенова (по сравнению с арифметикой Пресбургера и арифметикой действительных чисел, см.[2]) получается, в частности, из-за того, что арифметика Семенова не является квази-о-минимальной теорией.

Теорема 3. *Теория систем $\mathfrak{L}_{SF}$ не является квази-о-минимальной.*

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$x - f(f^{-1}(x)) = y.$$

Для каждого y выделяется множество

$$Y_y = \{f(z) + y : z \in \omega,\ f(z+1) - f(z) > y\}.$$

В общем случае оно не может быть представлено в виде булевой комбинации интервалов и фиксированных (не зависящих от y) подмножеств ω. □

Список литературы

[1] Дудаков С.М. Трансляционный результат для расширений арифметики Пресбургера одноместной функцией, согласованной со сложением // Матем. заметки, №76(3), 2004, С.362–371.

[2] Дудаков С.М. Достаточные условия эффективной трансляции локально генерических запросов // Фундаментальная и прикладная математика (принято к публикации в 2006 г.)

[3] Дудаков С.М. Трансляционная теорема и автоматные структуры // Вестник ТвГУ, серия «Прикладная математика», №4(21), 2006. С.5–35.

[4] Дудаков С.М., Тайцлин М.А. Трансляционные результаты для языков запросов в теории баз данных. // Успехи математических наук, №61:2(368), 2006. С.2–65.

[5] Семенов А.Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел. // Изв. АН СССР, 43(5), 1979. С.1175–1195.

[6] Семенов А.Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде. // Изв. АН СССР, 47(3), 1983. С.623–658.

[7] Baldwin J., Benedikt M. Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models. // AMS Trans., 352(11), 2000. C.4937–4969.

[8] Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Extended order-generic queries. // Annals of Pure and Applied Logic 97, 1999. P.85–125.

[9] Benedikt M., Dong G., Libkin L., Wong L. Relational expressive power of constraint query languages. // Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems, 1996. P.5–16.

[10] Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Linear vs. order constraint queries over relational databases. // Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems, 1996. P.17–27.

[11] Taitslin M.A. A general condition for collapse results. // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. 113. P.323–330.