УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ЛИНЕЙНОГО ТИПА

И.А. Шаповалова
Кафедра компьютерной безопасности
и математических методов управления

Поступила в редакцию 21.02.2008, после переработки 20.03.2008.

Рассматривается численное решение задачи оптимального управления с переменным запаздыванием линейного вида. Предложен способ аппроксимации задачи и получены расчетные формулы для вычисления сопряженных функций.

A numerical solution of the optimal control problem with delay depending on time is considered. The method of approximation is analyzed.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, оптимальное управление, переменное запаздывание, принцип максимума, дискретная аппроксимация, численное решение.
Keywords: Differential equations, optimal control, delay depending on time, principle of maximum, discreet approximation, numerical solution.

Введение

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом впервые появились в литературе во второй половине XVIII столетия, но систематическое изучение этого типа уравнений началось лишь в XX веке в связи с потребностями ряда прикладных задач. Значительный вклад в развитие теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом внесли Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин, А.Д. Мышкис, Е.М. Райт, Р. Беллман. В работах [1], [2] предложен метод шагов для решения дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием, доказаны теоремы о существовании и единственности решения. Параллельно развивалась и теория оптимального управления для задач с переменным запаздыванием (Л.С. Понтрягин, Ф.М. Кириллова, Р. Габасов, Е.А. Андреева). Для широкого класса таких задач исследованы вопросы существования и единственности оптимального управления, получены необходимые и достаточные условия оптимальности [3], [4]. Численному решению дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием посвящен ряд статей. Однако вопрос численного решения задач оптимального управления с постоянным запаздыванием освещен в литературе недостаточно полно. В данной работе предлагается метод численного решения нелинейной задачи оптимального управления с переменным запаздыванием линейного вида.

1. Постановка задачи и теорема о необходимых условиях оптимальности

В общем виде задача ставится следующим образом.

Рассмотрим управляемую систему запаздывающего типа вида

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x(t-h(t)), u(t)\right), \quad t \in [t_1, t_2], \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in E_0. \tag{2}$$

Измеримое управление $u(t) = (u_1(t),\ u_2(t), ...,\ u_r(t))$ принимает значения из заданного множества

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_1, t_2]. \tag{3}$$

На множестве всех допустимых процессов требуется определить минимум функционала

$$J(u) = \Phi_0(x(t_2)). \tag{4}$$

В предположении, что вектор-функция состояния $x(t) = (x_1(t),\ x_2(t), ..., x_n(t))$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[t_1, t_2]$, функция $h(t)$ – положительная, непрерывно дифференцируемая, причем $\dot{h}(t) < 1$, функция $f(t, x, y, u) : [t_1, t_2] \times R^n \times R^n \times R^r \to \times R^n$ измерима по t, непрерывна по u и непрерывно-дифференцируема по x, функция $\Phi_0(x) : R^n \to R$ непрерывно дифференцируема, к задаче (1)-(4) применима теорема о необходимых условиях оптимальности, сформулированная в работе [2]:

Теорема. Пусть $\bar{w}(t) = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ оптимальный процесс в задаче (1)-(4), тогда оптимальное управление $\bar{u}(t)$ в точках непрерывности удовлетворяет условию

$$H\left(t, \bar{x}(t), \bar{y}\left(t\right), \bar{u}(t), p(t)\right) = \max_{u \in U} H\left(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), u, p(t)\right), \tag{5}$$

где $H\left(t, x, y, u, p(t)\right) = \left(p(t),\ f\left(t, x, y, u\right)\right)$ и $y(t) = x\left(t - h(t)\right)$.

Сопряженная вектор-функция $p(t)$ является абсолютно непрерывной и удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) = -H_x\left(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-h(t)), \bar{u}(t), p(t)\right) - \\ -H_y\left(r(t), \bar{x}(r(t)), \bar{x}(t), \bar{u}(r(t)), p(r(t))\right) \cdot \dot{r}(t) \end{aligned} \tag{6}$$

$$p(t_2) = -\Phi_{0x}(\bar{x}(t_2)), \quad p(t) \equiv 0, \ \ t > t_2. \tag{7}$$

Здесь $r(t)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению $\tau = t - h(t)$.

2. Дискретная аппроксимация задачи оптимального управления с переменным запаздыванием линейного типа

Для решения большого класса нелинейных задач оптимального управления с переменным запаздыванием приходится применять вычислительные методы, использующие интерполяцию значений решения в точках, где не были вычислены значения решения при той или иной вычислительной схемы интегрирования. Рассмотрим метод ломаных Эйлера для аппроксимации задачи (1)-(4).

Пусть переменное запаздывание задается в виде линейной функции $h(t) = \frac{t}{k}$, $k \in N$.

Разобьем отрезок $[t_1, t_2]$ на Nточек так, чтобы Nбыло кратно k: $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_N = t_2$ и обозначим через $\Delta t = \tau_{i+1} - \tau_i$, $x^i = x(\tau_i)$, $u^i = u(\tau_i)$, $x^{i-v_i} = x(\tau_i - h(\tau_i))$, причем $v_i = \frac{h(\tau_i)}{\Delta t} = \frac{\tau_i}{k\Delta t} = \frac{t_1 + i\Delta t}{k\Delta t} = \frac{t_1}{k\Delta t} + \frac{i}{k} = m + \frac{i}{k}$. Применяя при дискретной аппроксимации производной схему Эйлера, получаем задачу:

$$
\begin{aligned}
& I[u] = \Phi(x^N), \\
& x^{i+1} = x^i + \Delta t \cdot f\left(t_i, x^i, x^{i-v_i}, u^i\right), \quad i = \overline{0, N-1}, \\
& x^i = \varphi(t_i), \quad i = \overline{-m, 0}, \\
& u^i \in U, \quad i = \overline{0, N-1}.
\end{aligned}
$$

Поскольку v_i может принимать дробные значения, не обязательно кратные шагу Δt, в дискретной аппроксимации появляются значения фазовой переменной вне точек схемы интегрирования: $x^{i-m-\frac{1}{k}}$, $x^{i-m-\frac{2}{k}}$ и т.д. Для вычисления этих значений проведем линейную интерполяцию фазовой переменной через значения в точках, кратных шагу Δt: при $j \neq k \quad x^{i-m-\frac{j}{k}} = \frac{(k-j)x^{i-m-1} + jx^{i-m}}{k}$.

Применим к дискретной задаче оптимального управления теорему о необходимых условиях оптимальности конечномерных задач. Запишем функцию Лагранжа:

$$
\begin{aligned}
L[x, u, p, \lambda_0] = \lambda_0 \Phi(x^N) + \sum_{i=0}^{\frac{N}{k}-1} \sum_{j=0}^{k-1} (p^{ki+j+1}, x^{ki+j+1} - x^{ki+j} - \\
-\Delta t f(t_{ki+j}, x^{ki+j}, x^{(k-1)i-m+j(1-\frac{1}{k})}, u^{ki+j})) = \\
= \lambda_, 0 \Phi(x^N) + \sum_{i=0}^{\frac{N}{k}-1} \sum_{j=0}^{k-1} (p^{ki+j+1}, x^{ki+j+1} - x^{ki+j} - \\
-\Delta t f(t_{ki+j}, x^{ki+j}, \frac{jx^{(k-1)-m+j-1} + (k-j)x^{(k-1)-m+j}}{k}, u^{ki+j}))
\end{aligned}
$$

Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что m кратно k. В этом случае получаем следующие формулы для вычисления импульсов:

$$
\begin{aligned}
& p^{i+j} = p^{i+j+1} + \Delta t \left(p^{i+j+1}, \frac{\partial f\left(t_{i+j}, x^{i+j}, x^{\frac{k-1}{k}(i+j)-m}, u^{i+j}\right)}{\partial x^i} \right) + \\
& + \frac{k-j}{k} \Delta t \left(p^{\frac{k}{k-1}(i+j+m) - \frac{j}{k-1} + 1}, \frac{\partial f\left(t_{\frac{k}{k-1}(i+j+m)}, x^{\frac{k}{k-1}(i+j+m)}, x^{i+j-\frac{j}{k}}, u^{\frac{k}{k-1}(i+j+m)}\right)}{\partial x^{i+j-\frac{j}{k}}} \right) + \\
& + \frac{j+1}{k} \Delta t \left(p^{\frac{k}{k-1}(i+j+m) - \frac{j}{k-1} + 2}, \frac{\partial f\left(t_{\frac{k}{k-1}(i+j+m)+1}, x^{\frac{k}{k-1}(i+j+m)+1}, x^{i+j+\frac{j}{k}}, u^{\frac{k}{k-1}(i+j+m)}\right)}{\partial x^{i+j+\frac{j}{k}}} \right) \\
& i = 1, 2, ..., k-2,
\end{aligned}
$$

$$p^{i+k-1}=p^{i+k}+\Delta t\left(p^{i+k},\frac{\partial f\left(t_{i+k-1},x^{i+k-1},x^{\frac{k(i+k-1)}{k-1}-m},u^{i+k-1}\right)}{\partial x^{i+k-1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{k}\Delta t\left(p^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)},\right.$$

$$\left.\frac{\partial f\left(t_{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)-1},x^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)-1},x^{i+k-1+\frac{k-1}{k}},u^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)-1}\right)}{\partial x^{i+k-1+\frac{k-1}{k}}}\right)+$$

$$+\Delta t\left(p^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)+1},\frac{\partial f\left(t_{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)},x^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)},x^{i+k-1},u^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)}\right)}{\partial x^{i+k-1}}\right)+$$
$$+\tfrac{1}{k}\Delta t\left(p^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)+2},\right.$$
$$\left.\frac{\partial f\left(t_{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)+1},x^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)+1},x^{i+k-1+\frac{k-1}{k}},u^{\frac{k}{k-1}(i+k-1+m)+1}\right)}{\partial x^{i+k-1+\frac{k-1}{k}}}\right).$$

Заметим, что i изменяется после того, как вычислены значения в точках $j=\overline{1,k-1}$, причем iпринимает значения $0,\ k-1,\ 2\left(k-1\right),...,\left(\frac{N}{k}-1\right)\left(k-1\right).$

Далее импульсы вычисляются по формулам

$$p^{(k-1)\frac{N}{k}-m}=p^{(k-1)\frac{N}{k}-m+1}+$$
$$+\Delta t\left(p^{(k-1)\frac{N}{k}-m+1},\right.$$
$$\left.\frac{\partial f\left(t_{(k-1)\frac{N}{k}-m},x^{(k-1)\frac{N}{k}-m},x^{\frac{k}{k-1}\left((k-1)\frac{N}{k}-m\right)-m},u^{(k-1)\frac{N}{k}-m}\right)}{\partial x^{(k-1)\frac{N}{k}-m}}\right)+$$
$$+\frac{1}{k}\Delta t\left(p^{N},\frac{\partial f\left(t_{N-1},x^{N-1},x^{\frac{k}{k-1}(N-1)-m},u^{N-1}\right)}{\partial x^{\frac{k}{k-1}(N-1)-m}}\right),$$

$$p^{i}=p^{i+1}+\Delta t\left(p^{i+1},\frac{\partial f\left(t_i,x^i,x^{\frac{k-1}{k}i-m},u^i\right)}{\partial x^i}\right),$$

$$i=\overline{(k-1)\frac{N}{k}-m+1,\ N-1}.$$

$$p^N=-\lambda_0\frac{\partial\Phi(x^N)}{\partial x^N}.$$

Рассмотрим частный случай $h(t)=\frac{t}{3}$. Тогда формулы для вычисления импульсов имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&p^i = p^{i+1} + \Delta t \left(p^{i+1}, \frac{\partial f\left(t_i, x^i, x^{\frac{2}{3}i-m}, u^i\right)}{\partial x^i} \right) + \\
&+\tfrac{2}{3}\Delta t \left(p^{\frac{3m+3i+1}{2}}, \frac{\partial f\left(t_{\frac{3m+3i-1}{2}}, x^{\frac{3m+3i-1}{2}}, x^{i-\frac{1}{3}}, u^{\frac{3m+3i-1}{2}}\right)}{\partial x^{i-\frac{1}{3}}} \right) + \\
&+\tfrac{2}{3}\Delta t \left(p^{\frac{3m+3i+3}{2}}, \frac{\partial f\left(t_{\frac{3m+3i+1}{2}}, x^{\frac{3m+3i+1}{2}}, x^{i+\frac{1}{3}}, u^{\frac{3m+3i+1}{2}}\right)}{\partial x^{i+\frac{1}{3}}} \right), \\
&i = 1, 3, 5, ..., \tfrac{2N}{3} - m - 1,
\end{aligned}
$$

$$
p^i = p^{i+1} + \Delta t \left(p^{i+1}, \frac{\partial f\left(t_i, x^i, x^{\frac{2i}{3}-m}, u^i\right)}{\partial x^i} \right) +
$$

$$
+\frac{1}{3}\Delta t \left(p^{\frac{3i+3m}{2}}, \frac{\partial f\left(t_{\frac{3i+3m}{2}-1}, x^{\frac{3i+3m}{2}-1} x^{i-\frac{2}{3}}, u^{\frac{3i+3m}{2}-1}\right)}{\partial x^{i-\frac{2}{3}}} \right) +
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Delta t \left(p^{\frac{3i+3m}{2}+1}, \frac{\partial f\left(t_{\frac{3i+3m}{2}}, x^{\frac{3i+3m}{2}} x^i, u^{\frac{3i+3m}{2}}\right)}{\partial x^i} \right) + \\
&\tfrac{1}{3}\Delta t \left(p^{\frac{3i+3m}{2}+2}, \frac{\partial f\left(t_{\frac{3i+3m}{2}+1}, x^{\frac{3i+3m}{2}+1} x^{i+\frac{2}{3}}, u^{\frac{3i+3m}{2}+1}\right)}{\partial x^{i+\frac{2}{3}}} \right), \\
&i = 2, 4, 6, ..., \tfrac{2N}{3} - m - 2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p^{\frac{2N}{3}-m} = p^{\frac{2N}{3}-m+1} + \\
&+\Delta t \left(p^{\frac{2N}{3}-m}, \frac{\partial f\left(t_{\frac{2N}{3}-m}, x^{\frac{2N}{3}-m}, x^{\frac{2}{3}\left(\frac{2N}{3}-m\right)-m}, u^{\frac{2N}{3}-m}\right)}{\partial x^i} \right) + \\
&+\tfrac{1}{3}\Delta t \left(p^N, \frac{\partial f\left(t_{N-1}, x^{N-1} x^{\frac{2N}{3}-m-\frac{2}{3}}, u^{N-1}\right)}{\partial x^{\frac{2N}{3}-m-\frac{2}{3}}} \right),
\end{aligned}
$$

$$
p^i = p^{i+1} + \Delta t \left(p^{i+1}, \frac{\partial f\left(t_i, x^i, x^{\frac{2}{3}i-m}, u^i\right)}{\partial x^i} \right),
$$

$$
i = \frac{2N}{3} - m, ..., N - 1,
$$

$$
p^N = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^N)}{\partial x^N}.
$$

Выпишем уравнения для разделенной разности

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{p^{i+1}-p^{i}}{\Delta t} = -\left(p^{i+1}, \tfrac{\partial f\left(t_i, x^i, x^{\frac{2}{3}i-m}, u^i\right)}{\partial x^i}\right) - \\
&-\tfrac{2}{3}\left(p^{\frac{3m+3i+1}{2}}, \tfrac{\partial f\left(t_{\frac{3m+3i-1}{2}}, x^{\frac{3m+3i-1}{2}}, x^{i-\frac{1}{3}}, u^{\frac{3m+3i-1}{2}}\right)}{\partial x^{i-\frac{1}{3}}}\right) - \\
&-\tfrac{2}{3}\left(p^{\frac{3m+3i+3}{2}}, \tfrac{\partial f\left(t_{\frac{3m+3i+1}{2}}, x^{\frac{3m+3i+1}{2}}, x^{i+\frac{1}{3}}, u^{\frac{3m+3i+1}{2}}\right)}{\partial x^{i+\frac{1}{3}}}\right),\\
&\tfrac{p^{i+1}-p^{i}}{\Delta t} = -\left(p^{i+1}, \tfrac{\partial f\left(t_i, x^i, x^{\frac{2i}{3}-m}, u^i\right)}{\partial x^i}\right) - \\
&-\tfrac{1}{3}\left(p^{\frac{3i+3m}{2}}, \tfrac{\partial f\left(t_{\frac{3i+3m}{2}-1}, x^{\frac{3i+3m}{2}-1} x^{i-\frac{2}{3}}, u^{\frac{3i+3m}{2}-1}\right)}{\partial x^{i-\frac{2}{3}}}\right) + \\
&+\left(p^{\frac{3i+3m}{2}+1}, \tfrac{\partial f\left(t_{\frac{3i+3m}{2}}, x^{\frac{3i+3m}{2}} x^{i}, u^{\frac{3i+3m}{2}}\right)}{\partial x^{i}}\right) - \\
&-\tfrac{1}{3}\left(p^{\frac{3i+3m}{2}+2}, \tfrac{\partial f\left(t_{\frac{3i+3m}{2}+1}, x^{\frac{3i+3m}{2}+1} x^{i+\frac{2}{3}}, u^{\frac{3i+3m}{2}+1}\right)}{\partial x^{i+\frac{2}{3}}}\right).
\end{aligned}
$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и, учитывая, что $p^{\frac{3i+3m}{2}} = p\left(t_{\frac{3i+3m}{2}}\right) \to p\left(\frac{3t}{2}\right)$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\dot{p}(t) = -\left(p(t), \tfrac{\partial f\left(x(t), x\left(t-\frac{t}{3}\right), u(t)\right)}{\partial x}\right) - \\
&-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}+1+\tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(p\left(\tfrac{3}{2}t\right), \tfrac{\partial f\left(x\left(\frac{3}{2}t\right), x(t), u\left(\frac{3}{2}t\right)\right)}{\partial y}\right) = \\
&= -\left(p(t), \tfrac{\partial f\left(x(t), x\left(t-\frac{t}{3}\right), u(t)\right)}{\partial x}\right) - \tfrac{3}{2}\left(p\left(\tfrac{3}{2}t\right), \tfrac{\partial f\left(x\left(\frac{3}{2}t\right), x(t), u\left(\frac{3}{2}t\right)\right)}{\partial y}\right).
\end{aligned}
$$

Данное дифференциальное уравнение совпадает с дифференциальным уравнением для сопряженной вектор-функции из краевой задачи принципа максимума. Тестовые примеры также подтверждают совпадение результатов пи решении задачи численно и аналитически.

Список литературы

[1] Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М: «Наука», 1971.

[2] А.В. Солодов, Е.А. Солодова. Системы с переменным запаздыванием. М.: Наука, 1980.

[3] Е.А. Андреева.

[4] Г. Л. Харатишвили, Т. А. Тадумадзе. Нелинейные оптимальные системы управления с переменными запаздываниями, Матем. сб., 1978, 107(149):4(12), 613–633

[5] В.В. Поддубный, О.В. Романович. Модификация метода Эйлера с уравнением для решения дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием. Вестник Томского гос. ун-та. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика», 2007, №1 –С. 44-50.