

МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 539.3

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕЛЕ С УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ¹

Зингерман К.М.

Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 14.04.2008, после переработки 26.04.2008.

Рассматривается приближенное аналитическое решение плоской задачи теории упругости об образовании кругового включения (области с другими свойствами) в предварительно нагруженном изотропном бесконечно протяженном теле. Постановка задачи осуществляется на основе теории наложения больших деформаций. Решение находится методом Ньютона–Канторовича. Линеаризованные задачи решаются с использованием функций комплексных переменных.

The plane problem of origination of a circular elastic inclusion (region with other properties) in a pre-loaded infinite isotropic elastic body is solved using an approximate analytical technique. The problem is formulated on the foundation of the theory of repeated superposition of large deformations. The Newton–Kantorovich method is used for solution. The solution of linearized problems is found using the complex variable theory.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, конечные деформации, плоская задача, упругие включения, метод Ньютона–Канторовича.

Keywords: nonlinear elasticity, finite strains, plane problem, elastic inclusions, the Newton–Kantorovich method.

Введение

Исследуется напряженно-деформированное состояние бесконечно протяженного упругого тела, в котором после предварительного нагружения одновременно образуются упругое включение, при конечных деформациях. Задача рассматривается в двумерной постановке (плоская деформация). Считается, что включение принимает круговую форму в конечном состоянии. Исходный материал и материал включений считаются несжимаемыми, их механические свойства описываются потенциалом Муни.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №06-01-00682-а.

1. Постановка задачи

Механическая постановка задачи следующая. В начальном (ненапряженном) состоянии в теле отсутствуют напряжения и деформации. Затем под воздействием внешней начальной нагрузки, приложенной к телу, в нем накапливаются начальные большие плоские деформации и соответствующие им напряжения. Тело переходит в промежуточное состояние. В области, занимаемой телом, мысленно намечается замкнутая цилиндрическая поверхность — граница включения в момент его образования. Образующая этой поверхности перпендикулярна плоскости деформации. Далее скачкообразно меняются механические свойства материала в той части тела, которая ограничена намеченной поверхностью (эту часть тела будем называть включением). Это вызывает возникновение в теле дополнительных больших (по крайней мере, во включении и в его окрестности) деформаций и напряжений, которые накладываются на начальные. Изменяется граница включения, и оно переходит в конечное (текущее) состояние. Форма включения считается заданной в конечном состоянии, а его форма в момент образования определяется из решения задачи.

Математическая постановка задачи формулируется на основе теории многократного наложения больших деформаций в координатах конечного состояния. Считается, что образование включения не меняет напряжений и деформаций на бесконечности. Массовые силы считаются равными нулю, начальные напряжения и деформации считаются однородными.

Пусть индекс 0 соответствует начальному состоянию, 1 — промежуточному, 2 — конечному. Используются следующие обозначения [5, 6]:

- \mathbf{u}_n — вектор перемещений, характеризующий переход из предыдущего $(n-1)$ -го состояния в последующее n -е состояние (\mathbf{u}_1 — вектор начальных перемещений, \mathbf{u}_2 — вектор дополнительных перемещений);
- $\overset{p}{\nabla}$ — градиент;
- $\Psi_{q,p}$ — аффинор деформаций при переходе тела из состояния q в состояние p ($\Psi_{0,1}$ — аффинор начальных деформаций, $\Psi_{1,2}$ — аффинор дополнительных деформаций);
- $\Delta_{m,n}$ — относительное изменение объема при переходе из m -го в n -е состояние;
- $\sigma_{0,n}$ — тензор истинных напряжений, описывающий накопленные в теле напряжения при переходе из начального в n -е состояние;
- $p_{0,n}$ — множитель Лагранжа для n -го состояния;
- $\mathbf{F}_{m,n}$ — тензорная мера деформаций при переходе из m -го в n -е состояние, соответствующая мере Фингера;
- Γ — граница включения в координатах конечного состояния;
- \mathbf{N} — нормаль к Γ ;
- S^1 — область, внешней границей которой является контур Γ ;

- $S^{(0)}$ — бесконечная область, ограниченная контуром Γ .

Как известно [5, 6], прежде чем решать задачу для конечного состояния в координатах промежуточного состояния, необходимо найти вектор начальных перемещений \mathbf{u}_1 или аффинор начальных деформаций $\Psi_{0,1}$, т.е. решить задачу для промежуточного состояния в координатах этого состояния. Отметим, что вследствие однородности материала тела в начальном состоянии начальные деформации будут однородны. Задача нахождения начальных деформаций проста и в данной статье не рассматривается.

Постановка задачи в координатах конечного состояния включает уравнение равновесия

$$\frac{2}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2} = 0, \quad (1)$$

условие несжимаемости

$$\Delta_{0,2} = 0, \quad (2)$$

определяющие соотношения, соответствующие потенциалу Муни

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,2} = \frac{\mu}{2} \left\{ (1 + \beta) \mathbf{F}_{0,2} + (1 - \beta) \left[\left(\mathbf{F}_{0,2} : \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_{0,2} - \mathbf{F}_{0,2}^2 \right] \right\} - p_{0,2} \mathbf{I}, \quad (3)$$

а также кинематические соотношения

$$\mathbf{F}_{0,2} = \Psi_{0,2}^* \cdot \Psi_{0,2}, \quad (4)$$

$$(1 + \Delta_{0,n}) = \det \Psi_{0,n}, \quad n = 1, 2, \quad (5)$$

$$\Psi_{0,2} = \Psi_{0,1} \cdot \Psi_{1,2}, \quad (6)$$

$$\Psi_{1,2} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{\nabla} \mathbf{u}_2 \right)^{-1}. \quad (7)$$

В соотношении (3)

$$\mu = \begin{cases} \mu_M & \text{в } S^{(0)} \\ \mu_B & \text{в } S^{(1)} \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} \beta_M & \text{в } S^{(0)} \\ \beta_B & \text{в } S^{(1)} \end{cases}.$$

Здесь μ_M, β_M — упругие постоянные материала матрицы, а μ_B, β_B — упругие постоянные материала включения.

Граничные условия включают условие на бесконечности

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,2}|_{\infty} = \boldsymbol{\sigma}^{\infty}, \quad (8)$$

а также условия непрерывности вектора перемещений \mathbf{u}_2 и вектора нормальных напряжений $\mathbf{N}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}$ на границе Γ включения. Эти условия можно записать в виде

$$[[\mathbf{u}_2]]_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}_{0,2}]]_{\Gamma} = 0. \quad (9)$$

Здесь и далее скобки $[[\cdot]]_{\Gamma}$ обозначают приращение величины при переходе из области S^1 в область S^0 (т.е. из включения в матрицу) через контур Γ в направлении нормали к этому контуру.

2. Решение задачи методом Ньютона–Канторовича

Рассмотрим применение метода Ньютона–Канторовича [2] к решению рассматриваемой задачи. Сначала преобразуем соотношения, входящие в постановку задачи, таким образом, чтобы избежать необходимости обращения тензоров и деления на скалярные функции, входящие в решение задачи, при применении метода Ньютона–Канторовича. Это нужно сделать потому, что в результате выполнения указанных операций в правой части линейризованных уравнений, решаемых на каждом шаге метода, появятся функции сложной структуры, которые практически невозможно будет проинтегрировать аналитически. Для выполнения таких преобразований используем теорему Гамильтона–Кэли [7]. В силу этой теоремы для произвольного неособенного тензора второго ранга \mathbf{T} справедливо тождество

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{T}} \left[\mathbf{T}^2 - (\mathbf{T} : \mathbf{I}) \mathbf{T} + \frac{1}{2} (\mathbf{T} : \mathbf{I})^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathbf{T}^2 : \mathbf{I}) \mathbf{I} \right]. \quad (10)$$

Обозначим

$$\Psi_{2,1} = \mathbf{I} - \frac{2}{\nabla} \mathbf{u}_2, \quad (11)$$

тогда соотношение (7) может быть записано в виде

$$\Psi_{1,2} = \Psi_{2,1}^{-1}.$$

С учетом теоремы Гамильтона–Кэли и уравнения несжимаемости последнее соотношение можно записать в виде

$$\Psi_{1,2} = \left[\Psi_{2,1}^2 - (\Psi_{2,1} : \mathbf{I}) \Psi_{2,1} + \frac{1}{2} (\Psi_{2,1} : \mathbf{I})^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\Psi_{2,1}^2 : \mathbf{I}) \mathbf{I} \right]. \quad (12)$$

Использование соотношений (11), (12) вместо (7) позволяет записать постановку задачи в виде, не содержащем отрицательных степеней тензоров и функций, входящих в решение.

При решении используется модифицированный метод Ньютона–Канторовича [2]. Связано это с тем, что при применении немодифицированного метода Ньютона–Канторовича на каждом шаге метода, кроме первого, возникает необходимость решения линейризованной задачи с модулями упругости, зависящими от координат, а решение такой задачи аналитическими методами затруднительно. В качестве начального приближения выбирается

$$\mathbf{u}_2^{(0)} = 0, \quad p_2^{(0)} = 0.$$

При выборе начального приближения в таком виде линейризованная задача для $(i+1)$ -го приближения при применении модифицированного метода Ньютона–Канторовича может быть записана следующим образом:

$$\frac{2}{\nabla} \cdot L \left\{ \widehat{\mathbf{u}}_2^{(i)}, \widehat{p}_2^{(i)} \right\} = \mathbf{f}^{(i)}, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}}_2^{(i)} = h^{(i)}, \quad (14)$$

$$[[\widehat{\mathbf{u}}_2^{(i)}]]_{\Gamma} = 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{N} \cdot \left[\left[L \left\{ \widehat{\mathbf{u}}_2^{(i)}, \widehat{p}_2^{(i)} \right\} \right] \right]_{\Gamma} = \mathbf{Q}^{(i)}, \quad (16)$$

$$L \left\{ \widehat{\mathbf{u}}_2^{(i)}, \widehat{p}_2^{(i)} \right\} \Big|_{\infty} = \boldsymbol{\sigma}^{\infty} - \boldsymbol{\sigma}_{0,2}^{(i)} \Big|_{\infty}. \quad (17)$$

В соотношениях (13)–(17) $L\{\mathbf{u}, p\}$ — линейный оператор следующего вида:

$$L\{\mathbf{u}, p\} = \mu(1 - \beta)(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) - p\mathbf{I};$$

$\widehat{\mathbf{u}}_2^{(i)}, \widehat{p}_2^{(i)}$ — поправки к решению на $(i + 1)$ -м приближении, после нахождения которых это приближение определяется по формулам

$$\mathbf{u}_2^{(i+1)} = \mathbf{u}_2^{(i)} + \widehat{\mathbf{u}}_2^{(i)}, \quad p_2^{(i+1)} = p_2^{(i)} + \widehat{p}_2^{(i)}. \quad (18)$$

Отметим, что общий вид линейризованной краевой задачи, решаемой для каждого приближения, один и тот же. Различны лишь функции в правых частях уравнений и граничных условий. Приведем формулы для нахождения этих функций:

$$\mathbf{f}^{(i)} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}^{(i)},$$

$$h^{(i)} = \det \boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} - 1,$$

$$\mathbf{Q}^{(i)} = -\mathbf{N} \cdot \left[\left[\boldsymbol{\sigma}_{0,2}^{(i)} \right] \right]_{\Gamma},$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,2}^{(i)} = \frac{\mu}{2} \left\{ (1 + \beta)\mathbf{F}_{0,2}^{(i)} + (1 - \beta) \left[\left(\mathbf{F}_{0,2}^{(i)} : \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_{0,2}^{(i)} - \mathbf{F}_{0,2}^{(i)2} \right] \right\} - p_{0,2}^{(i)}\mathbf{I},$$

$$\mathbf{F}_{0,2}^{(i)} = \boldsymbol{\Psi}_{0,2}^{(i)*} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{0,2}^{(i)}, \quad \boldsymbol{\Psi}_{0,2}^{(i)} = \boldsymbol{\Psi}_{0,1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{1,2}^{(i)},$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{1,2}^{(i)} = \left[\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)2} - \left(\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} : \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} : \mathbf{I} \right)^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)2} : \mathbf{I} \right) \mathbf{I} \right],$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{2,1}^{(i)} = \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}_2^{(i)}.$$

Для решения линейризованной задачи используются комплексные потенциалы Колосова–Мухелишвили [8]. Вывод расчетных формул, которые дают решение этой задачи для кругового включения, рассмотрен в [1, 6]. При расчетах используется специализированная система аналитических вычислений на ЭВМ [5].

Вопросы сходимости метода Ньютона–Канторовича при решении краевых задач для квазилинейных систем уравнений эллиптического типа, к которым относятся рассматриваемые задачи о концентрации напряжений, исследованы, в частности, в работе А.И. Кошелева [3]. В более поздней работе того же автора [4] отмечено, однако, что численная оценка сходимости метода затруднительна из-за сложности оценки нормы оператора, обратного оператору линейризованной задачи.

4. Результаты расчетов

На рисунках приведены результаты расчетов для случая $\mu_V/\mu_M = 2$, $\beta_V = \beta_M = 1$ при одноосном начальном нагружении в направлении оси y : $(\sigma_{0,1})_{11} = (\sigma_{0,1})_{12} = 0$, $(\sigma_{0,1})_{22} = p$, $p/\mu_M = 1.5$. Вычислено 5 приближений.

На рис. 1 приведено распределение напряжения $\sigma_{0,222}$ вдоль оси y . Предполагается, что центр включения совпадает с началом координат. Через R обозначен радиус включения в конечном состоянии. Цифры 1–5 указывают номера приближений. Отметим, что последние два приближения мало различаются, что, видимо, свидетельствует о сходимости метода.

Для сравнения на рис. 2 показана аналогичная зависимость для решения этой же задачи методом малого параметра [6, 1] (вычислены первые два приближения). Видно, что линейное приближение метода малого параметра совпадает с первым приближением метода Ньютона, а нелинейное решение, полученное методом малого параметра, достаточно мало отличается от второго приближения метода Ньютона.

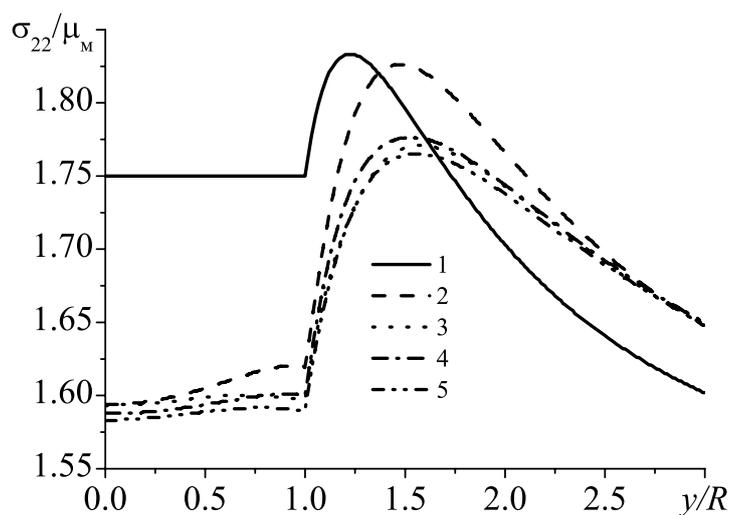


Рис. 1: Распределение напряжения σ_{22} вдоль оси y для различных приближений метода Ньютона (1–5).

На рис. 3, 4 показаны эпюры контурных напряжений в матрице на ее границе с включением (рис. 3 — расчет методом Ньютона, рис. 4 — расчет методом малого параметра). Жирная линия на этих рисунках соответствует контуру включения в конечном состоянии. Четвертое приближение на рис. 3 не показано, т.к. оно мало отличается от пятого. Отметим, что нелинейное решение, полученное методом малого параметра, близко к второму приближению метода Ньютона.

На рис. 5 показана форма контура включения в промежуточном и конечном состоянии. На рисунке изображена четверть контура. Жирная линия соответствует заданному контуру включения в конечном состоянии, а более тонкие линии (сплошная и пунктирные) соответствуют контуру включения в промежуточном состоянии (в момент его образования), определенному по результатам расчетов для различного числа приближений методом Ньютона. Четвертое приближение

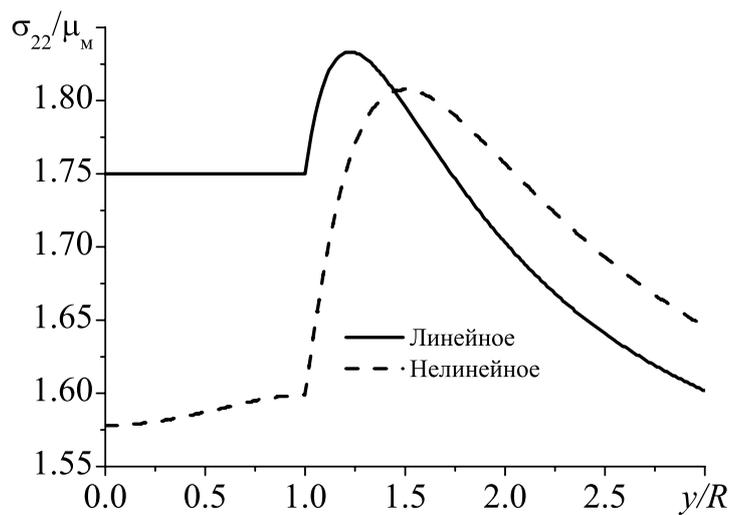


Рис. 2: Распределение напряжения σ_{22} вдоль оси y . Метод малого параметра.

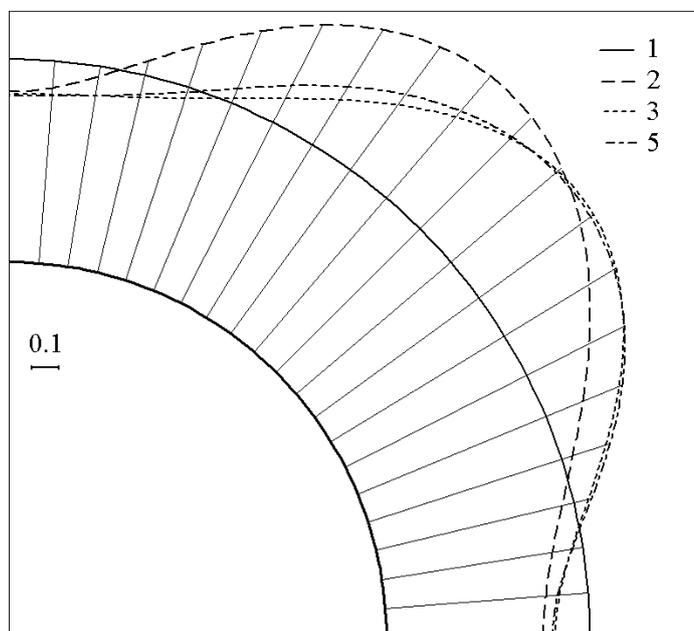


Рис. 3: Эпюры контурных напряжений в матрице на ее границе с включением для различных приближений метода Ньютона (1-5).

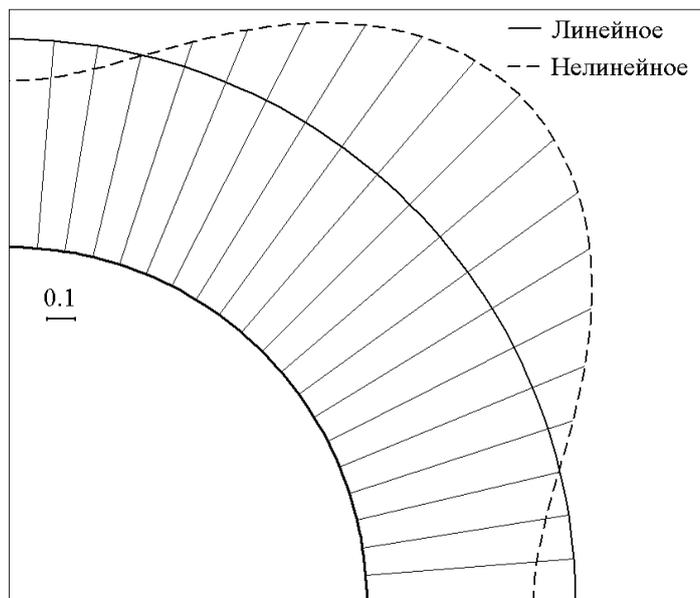


Рис. 4: Эпюры контурных напряжений в матрице на ее границе с включением. Метод малого параметра.

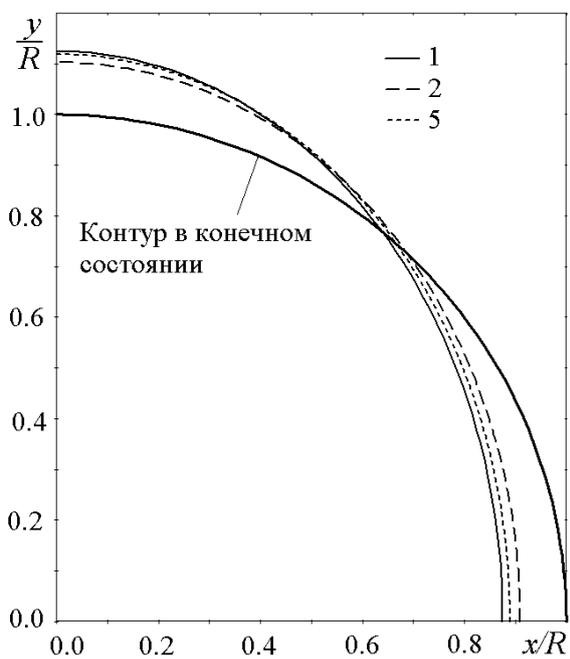


Рис. 5: Форма контура включения для различных приближений метода Ньютона (1-5).

на рисунке не показано, т.к. оно мало отличается от пятого.

Наконец, на рис. 6, 7 показано распределение главных напряжений σ_1 и σ_2 вблизи включения.

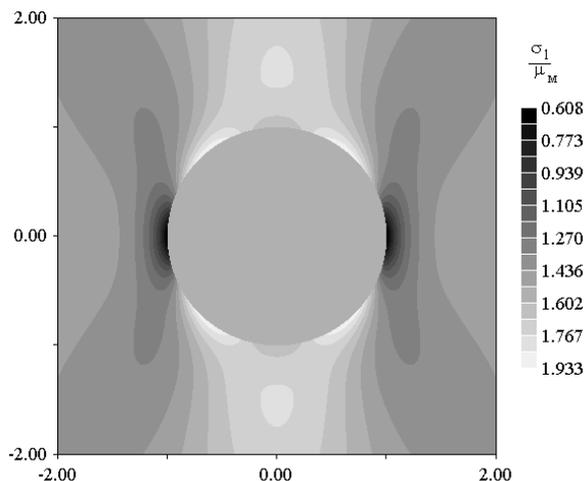


Рис. 6: Распределение главного напряжения σ_1 вблизи включения.

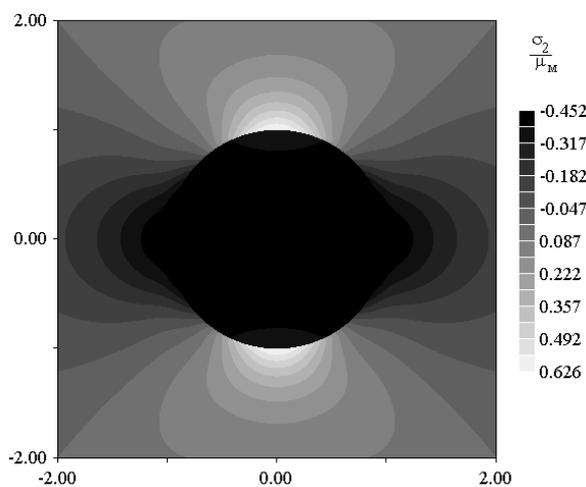


Рис. 7: Распределение главного напряжения σ_2 вблизи включения.

Представляет интерес вопрос о том, является ли поле напряжений во включении однородным. Для случая линейной упругости однородность напряжений в эллипсоидальном включении, находящемся в бесконечно протяженной матрице, является хорошо известным фактом [11]. Для некоторых задач нелинейной упругости этот вопрос рассмотрен в [9, 10]. Ясно, что применение приближенных методов не позволяет дать точный ответ на этот вопрос. Однако из рис. 1, 6, 7

можно видеть, что для четвертого и пятого приближений поле напряжений во включении близко к однородному.

В завершение данного параграфа отметим, что для материалов типа Муни решение задач о плоской деформации не зависит от константы β этих материалов [5] (за исключением напряжений, действующих в направлении, перпендикулярном к плоскости деформации). Поэтому результаты, приведенные здесь для случая $\beta_M = \beta_B = 1$ (т.е. для материала Трелоара), верны для материала Муни при произвольных значениях β_M и β_B .

Список литературы

- [1] Зингерман К.М. О взаимовлиянии упругих включений, возникающих в предварительно нагруженном теле при конечных деформациях // Вестник Тверского государственного университета. Серия Прикладная математика. 2006. № 4(21). Вып. 3. — С. 65–77.
- [2] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1984. - 752 с.
- [3] Кошелев А.И. Метод Ньютона и обобщенные решения нелинейных уравнений эллиптического типа // Доклады АН СССР. - 1953. - 91, № 6. - С. 1263-1266.
- [4] Кошелев А.И. Регулярность решения эллиптических уравнений и систем. — М.: Наука, 1986. — 240 с.
- [5] Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272с.
- [6] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. — М.: Физматлит, 2007. — 392 с.
- [7] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
- [8] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.
- [9] Цвелодуб И.Ю. Физически нелинейное включение в линейно-упругой среде (плоская задача). // Известия АН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 72.
- [10] Черных К.Ф. Несколько замечаний к задаче Эшелби. // Известия АН. Механика твердого тела. 1994. № 4. С. 47–50.
- [11] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. — М.: Издательство иностранной литературы, 1963. — 247 с.