

АСИМПТОТИКА ЗАВИСИМОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА ОТ ЭНЕРГИИ ДЛЯ СТРУНЫ С МАССИВНЫМИ КОНЦАМИ¹

Ханыгин М.А., Шаров Г.С.

Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 29.01.2008, после переработки 08.05.2008.

Для открытой релятивистской струны с массивными концами исследована зависимость углового момента системы от квадрата ее энергии (траектория Редже) в пределе больших энергий. Рассмотрен случай ненулевых спинов на концах струны (кварках) с учетом спин-орбитального взаимодействия.

For the open relativistic string with massive ends dependence of its angular momentum on square of its energy (Regge trajectory) is investigated in the limit of large energies. The case of non-zero spins at the endpoints (quarks) is considered with taking into account spin-orbit interaction.

Ключевые слова: струна с массивными концами, угловой момент, энергия, траектория Редже.

Keywords: open string with massive ends, angular momentum, energy, Regge trajectory.

Введение

Важнейшим преимуществом модели мезона или бариона в виде релятивистской струны с массивными концами является хорошее описание в рамках этой модели [1, 2] возбужденных состояний данных частиц на близких к линейным траекториях Редже

$$J \simeq \alpha_0 + \alpha' E^2. \quad (1)$$

Траекторией Редже называется экспериментально наблюдаемая зависимость полного углового момента частицы J от квадрата ее энергии E для набора состояний частиц с разными значениями J и E , но одинаковым кварковым составом и связанными с последним квантовыми числами, в частности, изоспином и странностью.

Для струны с массивными концами зависимость J от E^2 имеет вид, близкий к (1), если рассматривать однопараметрическое семейство ротационных состояний системы. Ротационным состоянием называется равномерное вращение струны с массами m_1, m_2 на концах в некоторой плоскости. Выбрав два базисных вектора

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта 05-02-16722.

e_1, e_2 в указанной плоскости, зададим мировую поверхность струны $X^\mu(\tau, \sigma)$ в пространстве Минковского $R^{1,3}$ для ротационного состояния в виде [2, 3]

$$X^\mu(\tau, \sigma) = a_0 \left[\tau e_0^\mu + \frac{v_1}{\omega} \left(\cos \omega \sigma - \frac{\omega}{Q_1} \sin \omega \sigma \right) (e_1^\mu \cos \omega \tau + e_2^\mu \sin \omega \tau) \right]. \quad (2)$$

Здесь константы Q_1 и Q_2 имеют смысл

$$Q_1 = \frac{\gamma}{m_1} \sqrt{\dot{X}^2(\tau, 0)}, \quad Q_2 = \frac{\gamma}{m_2} \sqrt{\dot{X}^2(\tau, \pi)}, \quad (3)$$

число ω является корнем трансцендентного уравнения

$$(Q_1 + Q_2) \omega \cos \pi \omega = (\omega^2 - Q_1 Q_2) \sin \pi \omega. \quad (4)$$

Для ротационного состояния (2) массы на концах движутся по окружностям с постоянными скоростями

$$v_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{\omega^2 + Q_1^2}}, \quad v_2 = \frac{Q_2}{\sqrt{\omega^2 + Q_2^2}}. \quad (5)$$

Здесь скорость света положена равной $c = 1$, следовательно, $v_i \in [0, 1]$.

Константа a_0 в выражении (2) имеет вид

$$a_0 = \frac{m_1 Q_1}{\gamma \sqrt{1 - v_1^2}} = \frac{m_2 Q_2}{\gamma \sqrt{1 - v_2^2}}. \quad (6)$$

Векторы e_0, e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный базис в $R^{1,3}$ с метрическим тензором $\eta_{\mu\nu} = (e_\mu, e_\nu) = \text{diag}(1; -1; -1; -1)$; параметры $\sigma \in [0, \pi]$ и $\tau \in R$ служат для параметризации мировой поверхности.

Корни уравнения (4) образуют счетный набор, занумеруем положительные корни в порядке возрастания

$$\omega = \omega_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

В случае $n = 1$ струна представляет собой вращающийся прямолинейный отрезок с массами на концах. При $n = 2$ струна сложена вдвое, точка сгиба движется со скоростью света, а массивные концы находятся на противоположной стороне и движутся со скоростями (5). В случае произвольного n струна состоит из n сложенных отрезков, $n - 1$ точка сгиба движется со скоростью света.

1. Энергия, угловой момент и траектории Редже

Возможные приложения решений (2) в адронной спектроскопии связаны с определением их физических характеристик. Вычислим важнейшие из них – энергию E и классический угловой момент L ротационных состояний (2).

Для произвольного состояния релятивистской струны массивными концами они определяются с помощью следующих интегралов (токов Нётер) [2]:

$$P^\mu = \int_{\mathcal{C}} p^\mu(\tau, \sigma) d\sigma + \sum_{i=1}^2 p_i^\mu(\tau), \quad p^\mu(\tau, \sigma) = \gamma \frac{(\dot{X}, X')X'^\mu - X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X}, X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \quad (7)$$

$$\mathcal{L}^{\mu\nu} = \int_{\mathcal{C}} [X^\mu(\tau, \sigma) p^\nu(\tau, \sigma) - X^\nu(\tau, \sigma) p^\mu(\tau, \sigma)] d\sigma + \sum_{i=1}^2 (x_i^\mu p_i^\nu - x_i^\nu p_i^\mu), \quad (8)$$

где $x_i^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, \sigma_i)$ и $p_i^\mu(\tau) = m_i \dot{x}_i^\mu(\tau) / \sqrt{\dot{x}_i^2(\tau)}$ координаты и импульс массивной точки, \mathcal{C} — любой контур, соединяющий края мировой поверхности струны. В качестве контура \mathcal{C} в интегралах (7), (8) проще всего взять линии $\tau = \text{const}$.

Если мы подставим выражения (2) в уравнения (7), то получим следующее выражение для импульса:

$$P^\mu = E e_0^\mu, \quad E = \pi \gamma a_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}. \quad (9)$$

В выражении для углового момента (8) после вычислений остается лишь ненулевая z -компонента:

$$\mathcal{L}^{\mu\nu} = L \ell_3^{\mu\nu}, \quad L = \frac{\gamma a_0^2}{2\omega} \left(\pi + \frac{v_1^2}{Q_1} + \frac{v_2^2}{Q_2} \right). \quad (10)$$

Здесь $\ell_3^{\mu\nu} = e_1^\mu e_2^\nu - e_1^\nu e_2^\mu = e^\mu e^\nu - e^\nu e^\mu$. Полный угловой момент \mathcal{J} для данной системы определяется выражением $\mathcal{J} = \mathcal{L} + \mathcal{S}$, где \mathcal{S} — суммарный спин, связанный с массивными точками, моделирующими кварки.

Соотношения (9), (10) задают неявную зависимость $L = L(E^2)$ классического углового момента (10) от квадрата энергии для ротационного состояния (2) определенного топологического типа, задаваемого числом n . Если фиксированы значения n , m_i и γ , то состояния (2) образуют однопараметрическое множество. В качестве параметра данного множества можно использовать любую из переменных: ω , a_0 , Q_i и др. Остальные параметры выражаются через заданный с помощью формул (3)–(6).

Графики получающейся при этом зависимости $J = J(E^2)$ (траектории Редже), примеры которых показаны на рис. 1, для всех значений n и m_i имеют квазилинейный вид и, в частности, прямолинейную асимптотику при $E \rightarrow \infty$.

В примерах на рис. 1 натяжение струны равно $\gamma = 0,175 \text{ ГэВ}^2$ [2]. Здесь и ниже постоянная Планка \hbar положена равной 1, в такой системе единиц момент L или J безразмерен (измеряется в единицах \hbar), а энергию и массу удобно измерять в ГэВ.

В пределе $L \rightarrow 0$ для всех траекторий на рис. 1 величины a_0 , v_i , Q_i стремятся к нулю, а энергия E стремится к своему минимальному значению $m_1 + m_2$.

Цель данной работы — исследование асимптотического поведения функции $L(E^2)$ в противоположном (ультрарелятивистском) пределе $E \rightarrow \infty$. Для этого введем следующие параметры:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - v_1^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{1 - v_2^2}, \quad \varepsilon = n - \omega. \quad (11)$$

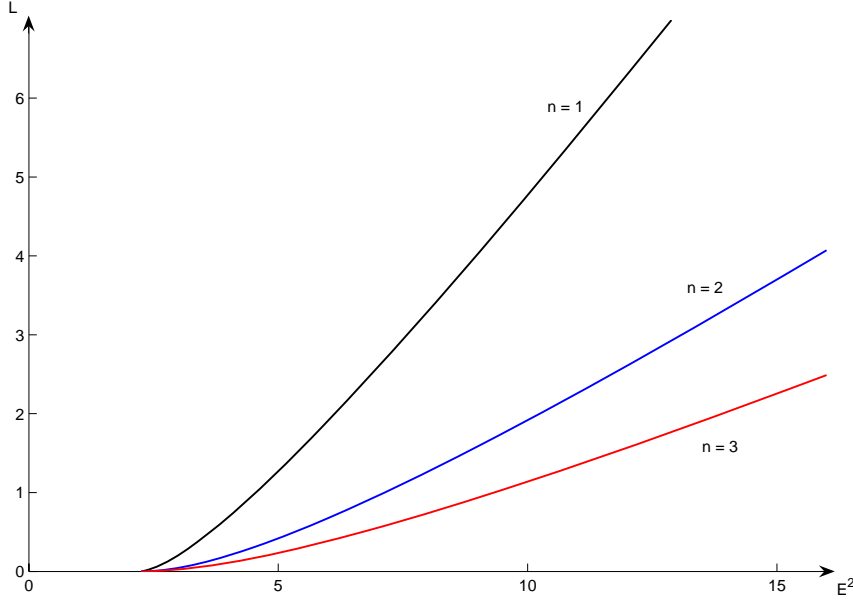


Рис. 1: Траектории Редже для струны с $m_1 = 1$, $m_2 = 1/2$ при различных n .

В пределе $E \rightarrow \infty$, скорости массивных концов стремятся к скорости света ($v_i \rightarrow 1$), частота $\omega \rightarrow n$, следовательно параметры, определяемые выражениями (11) стремятся к нулю. Выразим величины (7) и (8) через малые параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$.

После подстановки в формулы (9), (10) получаем следующие выражения для энергии и углового момента:

$$E = \frac{m_1 \pi (n - \varepsilon) \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^2} + \frac{m_1}{\varepsilon_1} + \frac{m_2}{\varepsilon_2}, \quad (12)$$

$$L = \frac{m_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{2\gamma \varepsilon_1^2} \left(\frac{m_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^2} (n - \varepsilon) \pi + \frac{m_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{\varepsilon_1} + \frac{m_2 (1 - \varepsilon_2^2)}{\varepsilon_2} \right). \quad (13)$$

Найдем соотношения между введенными малыми параметрами (11). Из выражения (5) находим:

$$\frac{Q_i}{\omega} = \frac{v_i}{\sqrt{1 - v_i^2}} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_i^2}}{\varepsilon_i}. \quad (14)$$

Используя выражения (4) и (14), находим связь между $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε .

$$\operatorname{tg} \pi \omega = \frac{(Q_1/\omega + Q_2/\omega)}{1 - Q_1 Q_2/\omega^2} = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_2^2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2}}.$$

Отсюда следует

$$\pi \omega = \pi n - \pi \varepsilon = \pi n - \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_2 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_2^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} - \varepsilon_1 \varepsilon_1}. \quad (15)$$

В выражении (15) произведем замену $\varepsilon_1 = \sin \theta_1$, $\varepsilon_2 = \sin \theta_2$, тогда оно примет вид:

$$\pi\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2} = \theta_1 + \theta_2.$$

После обратной замены получаем выражение, связывающее параметры $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\pi\varepsilon = \arcsin \varepsilon_1 + \arcsin \varepsilon_2. \quad (16)$$

Подставляя выражение (14) в (6), получаем соотношение

$$m_1 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^2} = m_2 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_2^2}}{\varepsilon_2^2},$$

позволяющее выразить ε_2 через ε_1 :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \sqrt{2 \left[\sqrt{4(m_1/m_2)^2(1 - \varepsilon_1^2) + \varepsilon_1^4 + \varepsilon_1^2} \right]^{-1/2}}. \quad (17)$$

Подстановка выражения (17) в (16) позволяет выразить через ε_1 параметр ε .

Используя полученные соотношения для параметров ε и ε_2 , находим в пределе $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ($E \rightarrow \infty$) асимптотические выражения для зависимости энергии (12) и углового момента (13) в виде рядов по малому параметру ε_1 для заданного n :

$$E = m_1 \left(\frac{\pi n}{\varepsilon_1^2} - \frac{\pi n}{2} + \frac{1 + \mu_2^3}{3} \varepsilon_1 - \frac{\pi n}{8} \varepsilon_1^2 + \frac{8 + 5\mu_2^3 + 3\mu_2^5}{60} \varepsilon_1^3 - \frac{\pi n}{16} \varepsilon_1^4 + \dots \right), \quad (18)$$

$$L = \frac{m_1^2}{\gamma} \left(\frac{\pi n}{2\varepsilon_1^4} - \frac{\pi n}{2\varepsilon_1^2} - \frac{1 + \mu_2^3}{3} + \frac{14 + 5\mu_2^3 + 9\mu_2^5}{60} \varepsilon_1 + \frac{52 + 35\mu_2^3 + 42\mu_2^5 - 25\mu_2^7}{1120} \varepsilon_1^3 + \dots \right), \quad (19)$$

здесь

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Исключив из ряда (19) с учетом (18) параметр

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pi n m_1}{E}} \left(1 - \frac{\pi n m_1}{4} \frac{1}{E} + \frac{1 + \mu_2^3}{6} \sqrt{\pi n m_1^3} \frac{1}{E^{3/2}} + \dots \right),$$

получаем асимптотическое разложение углового момента L (13) по степеням E :

$$L = \alpha' E^2 + \alpha_1 E^{1/2} + \frac{\alpha_2}{E^{1/2}} + \frac{\alpha_3}{E} + \frac{\alpha_4}{E^{3/2}} + \frac{\alpha_5}{E^2} + \dots, \quad E \rightarrow \infty, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{2\gamma\pi n}, & \alpha_1 &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{m_1^{3/2} + m_2^{3/2}}{\gamma\sqrt{\pi n}}, & \alpha_2 &= \sqrt{\pi n} \frac{m_1^{5/2} + m_2^{5/2}}{10\gamma}, \\ \alpha_3 &= \frac{(m_2^{3/2} + m_1^{3/2})^2}{18\gamma}, & \alpha_4 &= -(\pi n)^{3/2} \frac{m_1^{7/2} + m_2^{7/2}}{112\gamma}, \\ \alpha_5 &= \pi n \frac{m_1^4 + m_1^{5/2} m_2^{3/2} + m_1^{3/2} m_2^{5/2} + m_2^4}{60\gamma}. \end{aligned} \quad (21)$$

Найденное значение (21) для наклона α' траектории Редже в пределе $E \rightarrow \infty$ обобщает выражение Намбу $\alpha' = (2\pi\gamma)^{-1}$ [1, 2]. Зависимость данного наклона $\alpha' \sim 1/n$ от значения n иллюстрирует рис. 1. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ в разложении (20) зависят от масс m_1 и m_2 , что позволяет оценить модельные значения масс кварков на основании сравнения выражения (20) с экспериментальными данными. Для этой цели необходимо учесть спины кварков.

2. Учет спинов массивных точек

Для учета спинов массивных точек (кварков) применим подход, предложенный в работах [1, 2] для мезонов и барионов. Он включает учет спиновой составляющей в угловом моменте в виде добавки к классическому моменту (10)

$$J = L + S, \quad S = s_1 + s_2, \quad (22)$$

где s_1, s_2 — проекции спинов кварков на ось e_3 , а также поправку к энергии состояния (9), обусловленную спин-орбитальным взаимодействием и имеющей вид [2]

$$E = E_{cl} + \Delta E_{SL}, \quad \Delta E_{SL} = \frac{\omega}{a_0} \sum_{i=1}^2 \left(1 - \sqrt{1 - v_i^2}\right) s_i. \quad (23)$$

Здесь и ниже мы обозначаем символом E_{cl} классическую энергию струны с массами на концах (9), (12) или (18).

С помощью соотношений (14) и (17) находим разложение поправки (23) по степеням ε_1

$$\begin{aligned} \Delta E_{SL} &= \frac{\gamma \varepsilon_1^2 [s_1(1 - \varepsilon_1) + s_2(1 - \varepsilon_2)]}{m_1 v_1} = \\ &= \frac{\gamma \varepsilon_1^2}{m_1} \left[s_1 + s_2 - (s_1 + \mu_2 s_2) \varepsilon_1 + \frac{s_1 + s_2}{2} \varepsilon_1^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

подставляем его в ряд (18) и находим обобщение выражения (20) — разложение полного углового момента $J = L + s_1 + s_2$ по степеням энергии $E = E_{cl} + \Delta E_{SL}$:

$$J = \alpha' E^2 + \alpha_1 E^{1/2} + \frac{\tilde{\alpha}_2}{E^{1/2}} + \frac{\alpha_3}{E} + \frac{\tilde{\alpha}_4}{E^{3/2}} + \frac{\tilde{\alpha}_5}{E^2} + \dots, \quad E \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Здесь коэффициенты $\alpha', \alpha_1, \alpha_3$ совпадают со значениями (21), в частности, наклон траектории Редже $\alpha' = (2\pi n \gamma)^{-1}$ не зависит от спинов кварков. Другие коэффициенты в разложении (24) с учетом спиновых поправок отличаются от выражений (21) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_2 &= \alpha_2 + \sqrt{\pi n} (s_1 \sqrt{m_1} + s_2 \sqrt{m_2}), \quad \tilde{\alpha}_4 = \alpha_4 - \frac{1}{4} (\pi n)^{3/2} (s_1 m_1^{3/2} + s_2 m_2^{3/2}), \\ \tilde{\alpha}_5 &= \alpha_5 + \frac{1}{6} \pi n \left[(s_1 \sqrt{m_1} + s_2 \sqrt{m_2}) (m_1^{3/2} + m_2^{3/2}) - 3\gamma (s_1 + s_2)^2 \right]. \end{aligned}$$

Эти выражения позволяют оценить на основании сравнения с экспериментальными данными как значения масс кварков m_1, m_2 в данной модели, так и значения s_1, s_2 проекций спинов кварков.

Список литературы

- [1] Кобзарев И.Ю., Мартемьянов Б.В., Щепкин М.Г. Орбитальные возбуждения адронов // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. №4. С. 1.
- [2] Шаров Г.С. Струнные модели бариона и траектории Редже // Ядерная физика. 1999. Т. 62. №10. С. 1831.
- [3] Петров В.П., Шаров Г.С. Классификация движений релятивистской струны с массивными концами, допускающих линейризацию краевых условий // Теоретич. матем. физика. 1996. Т. 109. №2. С. 187.
- [4] Sharov G.S. Quasirotational motions and stability problem in dynamics of string hadron models // Physical Review D. 2000. V. 62. №9. P. 094015, hep-ph/0004003.