УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ОТВЕРСТИЙ В ТЕЛАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Людский В.А.
Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 17.12.2007, после переработки 05.05.2008.

В статье представлены для случая тел конечных размеров математические методы и алгоритмы численно-аналитического моделирования образования отверстий и решения плоских задач о концентрации напряжений около отверстий, образованных в нелинейно-упругих и вязкоупругих телах.

Mathematical methods and algorithms of numerically-analytical simulations of holes formation and decisions of plane problems of stress concentration around holes, which formed in nonlinear-elastic and viscoelastic bodies are presented for bodies of a finite size.

Ключевые слова: метод Шварца, метод последовательных приближений, метод Колосова–Мусхелишвили, тела конечных размеров, теория наложения больших деформаций.
Keywords: Schwarz's method, method of successive approximations, Kolosov–Mushelishvili's method, bodies of a finite size, theory or superimposed large deformations.

Введение

При рассмотрении многих практически важных задач о концентрации напряжений около отверстий исследователи сталкиваются с проблемой, когда тело имеет начальные деформации и напряжения. Если начальные деформации большие, то в качестве естественного упрощения часто считали, что вновь приобретенные деформации малые. Но ко многим задачам такой подход неприменим, например, когда отверстия образуются в теле не одновременно, а последовательно. Для случая наложения больших деформаций Тарасьевым Г.С. была предложена нелинейная модель образования отверстий в теле [7], сущность которой заключается в следующем.

Пусть в теле, находящемся в начальном (ненапряженном) состоянии, под воздействием внешних нагрузок возникли большие плоские деформации. Тело переходит в первое (промежуточное) состояние. Далее в теле намечается замкнутый круговой контур (будущая граница полости). Затем область, ограниченная данным контуром, удаляется. Действие удаленной части тела на оставшуюся заменяется по принципу освобождаемости от связей силами, распределенными по данному контуру. Далее предполагается, что эти силы, перешедшие в разряд внешних, квазистатически значительно изменяются, что вызывает появление в оставшейся части тела дополнительных больших деформаций, которые накладываются на уже имеющиеся [7].

Для математического описания этой физической модели Тарасьевым Г.С. и Левиным В.А была разработана, развита и использована теория многократного наложения больших деформаций [2, 3, 7].

Известным подходом к задачам об образовании отверстий являются методы, позволяющие найти приближенное аналитическое решение. Это, в частности, метод последовательных приближений (метод малого параметра или метод возмущений). Методы малого параметра позволяют получать приближенные аналитические представления весьма сложных нелинейных краевых задач. При этом решение исходной нелинейной задачи сводится к решению бесконечной последовательности линеаризованных задач. Преимущество этого подхода применительно к плоским задачам об образовании отверстий состоит в том, что плоская линеаризованная задача для области, ограниченной простым замкнутым контуром, может быть решена аналитически методом Колосова–Мусхелишвили.

В ряде работ Тарасьева Г.С., Левина В.А., Зингермана К.М и др. рассмотрено применение метода последовательных приближений для моделирования образования отверстий в бесконечно протяженных телах [2, 3].

1. Метод последовательных приближений

Методика решения задач об образовании отверстий в телах конечных размеров также основывается на применении метода последовательных приближений в сочетании с итерационным методом Шварца [1, 5].

Сущность метода описывается следующим образом. В качестве начального приближения выбирается решение линейной задачи, соответствующей исходной нелинейной задаче. $u_n^{(0)}$– вектор перемещений, соответствующий этому решению, он будет линейно зависеть от давления на внешнем контуре P_{BH} и давления на контурах отверстий P. Поэтому запишем: $u_n^{(0)} \sim q$ ($\sim$– знак пропорциональности), где q – безразмерный параметр, который определяется следующим образом: $q = \max\left(\frac{|P_{BH}|}{G}; \frac{|P|}{G}\right)$.

Нулевое значение параметра q соответствует ненагруженному телу. Решение исходной нелинейной задачи отыскивается в перемещениях в виде ряда

$$u_n = u_n^{(0)} + u_n^{(2)} + ...; \; u_n^{(i)} \sim q^{i+1}_{,} \tag{1}$$

где вектор $u_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, ...)$ - поправка от учета эффектов $(i{+}1)$-го порядка для перемещений при переходе из $(n{-}1)$-го в n-е состояние.

После подстановки разложений в уравнения, описывающие постановку задачи, и группировки членов по степеням малого параметра, постановка задачи сводится к бесконечной последовательности линеаризованных краевых задач для расчета напряжений и деформаций в теле в n-ом состоянии, при последовательном решении которых нужно найти сначала $u_n^{(0)}$ и $\sigma_{0,n}^{(0)}$ (нулевое приближение), затем $u_n^{(2)}$ и $\sigma_{0,n}^{(2)}$ (первое приближение) и т.д [5].

Краевые задачи для всех приближений представляют собой линеаризованные задачи теории упругости [1, 4], что позволяет сформулировать линеаризованную постановку этой задачи в комплексной форме. Линеаризованные задачи решаются методом Колосова–Мусхелишвили [6]. Решение линеаризованной краевой задачи для однородной системы уравнений ищется с помощью комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили $\Phi(z), \Psi(z)$ [6].

2. Метод Шварца

Для многосвязных ограниченных областей (тел с отверстиями) используется итерационный метод Шварца [5] (итерационный процесс, на каждом шаге которого решается граничная задача для односвязной области, ограниченной одним из контуров, составляющих границу Γ данной многосвязной области, причем от шага к шагу номер контура меняется).

Подход для ограниченных областей имеет следующий вид. На разных итерациях решается два типа задач, сначала рассматривается краевая задача для ограниченной односвязной области (области, занимаемой телом). Так как граница этой области представляет собой простой замкнутый контур, можно воспользоваться конформным отображением этой области на бесконечную область, ограниченную единичной окружностью.

Функция $\omega(\xi)$, осуществляющая конформное отображение внешности единичной окружности на конечную область S, занимаемую телом, задается в виде [1, 5]

$$\omega(\xi) = c_1\xi^{-1} + c_2\xi^{-2} + ... + c_n\xi^{-n}. \tag{2}$$

Решение краевой задачи для тела конечного размера без отверстий (односвязной области) находятся из граничных условий на внешнем контуре тела.

Второй тип задач – линеаризованная краевая задача для бесконечной области с отверстием, при этом нагрузки на бесконечности считаются равными нулю.

Функция $\omega_k(\xi_k)$, осуществляющая конформное отображение внешности единичной окружности на контур k-го отверстия, задается в виде [2, 3]

$$\omega_k(\xi_k) = c_{-1}\xi_k + c_0 + c_1\xi_k^{-1} + c_2\xi_k^{-2} + ... + c_n\xi_k^{-n}. \tag{3}$$

Решение однородной задачи методом Шварца находится по следующей схеме:

1. сначала решается краевая задача для внешнего контура;

2. далее начальное приближение берется в виде этого решения и определяется функция в правой части граничных условий для этого шага;

3. на i-м шаге итерационного процесса (i=1,2,..) определяется номер k очередного контура и находятся аналитические функции $\Phi_i(z_k), \Psi_i(z_k)$ из граничного условия на этом контуре и находится функция в правой части граничных условий для следующей итерации.

Заключение

В статье представлены развитые на случай тел конечных размеров математические методы (метод последовательных приближений в сочетании с методом Шварца, метод Колосова-Мусхелшвили) и алгоритмы численно-аналитического моделирования образования отверстий и решения плоских задач о концентрации напряжений около отверстий, образованных в нелинейно-упругих и вязкоупругих телах, ранее разработанные для бесконечно протяженных областей.

Список литературы

[1] Зингерман К.М., Людский В.А. Алгоритм решения линеаризованной задачи теории наложения больших деформаций // Международный журнал «Проблемы теории и практики управления». Международное научно-практическое приложение «Программные продукты и системы».– 2007.– №2. Тверь. – С.41–42.

[2] Левин В.А. Зингерман К.М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[3] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[4] Людский В.А. Программная реализация алгоритма решения задач теории наложения больших деформаций для тел конечных размеров. // Сборник статей V Международной научно-технической конференции «Информационно-вычислительные технологии и их приложения». – 2007. – Пенза. – С.122–123.

[5] Людский В.А. Об одном подходе к решению плоской задачи об образовании концентратора напряжений в предварительно нагруженном вязкоупругом теле конечных размеров при больших деформациях. // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика» – № 11 (39). – 2007. – Вып.5. – Тверь: ТГУ. – С.61–67.

[6] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1953.

[7] Тарасьев Г.С. К теории наложения конечных упругих деформаций // Технология машиностроения. – Тула, 1970. С. 142–149.