

НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА НЬЮТОНА

Жанлав Т.¹, Мижиддорж Р.², Чулуунбаатар О.³

¹ Монгольский госуниверситет, Улан-батор, Монголия

² Монгольский госуниверситет образования, Улан-батор, Монголия

³ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

Поступила в редакцию 20.05.2008, после переработки 29.05.2008.

Обоснован непрерывный аналог метода Ньютона решения задачи на собственные значения матриц. Доказана сходимость итерационного процесса с оптимальным выбором итерационного параметра. Предлагаемый алгоритм применен также к нелинейной задаче на собственные значения.

The continuous analog of Newton's method for solving eigenvalues of the matrices is realized. Convergence of the iteration processes with an optimal iteration parameter is proved. The algorithm considered is applied also to a nonlinear eigenvalue problem.

Ключевые слова: метод Ньютона, алгебраические задачи на собственные значения, численные алгоритмы.

Keywords: Newton's method, algebraic eigenvalue problems, numerical algorithms.

Введение

Нахождение собственных значений и собственных векторов заданной матрицы является одной из сложных задач линейной алгебры. В настоящее время существует множество прямых и итерационных методов решения этой проблемы [1, 2, 5, 7, 4]. Среди них существенную роль играют методы обратной итерации со сдвигом, и комбинированные методы (использующие обратные итерации и соотношение Рэлея) имеющие высокую скорость сходимости. Однако, они требуют достаточно хороших начальных приближений для вычисления искомого собственного значения и собственного вектора. Поэтому, обычно они применяются в тех случаях, что когда необходимо уточнить полученное каким-то другим методом собственное значение и соответствующий ему собственный вектор.

В настоящей работе рассматриваем возможность использования непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) [6, 3] для нахождения изолированного и простого собственного значения и соответствующего ему собственного вектора вещественной квадратной матрицы. В §1 дана постановка задачи и описывается НАМН. В §2 предлагаются два варианта выбора итерационного параметра, обеспечивающего сходимость метода. В §3 показано, что предлагаемый метод применим также

для нелинейных задач на собственные значения. В §4 приведены численные эксперименты и дано сравнение различных итерационных методов.

1. Постановка задачи и НАМН

Пусть \mathbf{R}^m – пространство m -мерных вещественных векторов. Введем в нем скалярное произведение векторов и норму вектора по формулам

$$(u, v) = \sum_{i=1}^m u_i v_i, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Рассмотрим в \mathbf{R}^m задачу на собственные значения

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad (1.1)$$

где A – вещественная матрица размерности $m \times m$ и E – единичная матрица. Поскольку собственный вектор, отвечающий собственному значению λ , находится с точностью до постоянного множителя, введем условие нормировки

$$(x, x) = 1. \quad (1.2)$$

Наша цель состоит в нахождении изолированного и простого собственного значения и соответствующего ему собственного вектора (λ, x) вещественной матрицы A . Как известно [6], задачу (1.1), (1.2) можно рассматривать как нелинейную задачу относительно неизвестных (λ, x) и для ней применим НАМН:

$$(A - \lambda E) \frac{dx}{dt} - x \frac{d\lambda}{dt} = -(A - \lambda E)x, \quad (1.3)$$

$$2 \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = 1 - (x, x). \quad (1.4)$$

Дискретизация уравнений (1.3) и (1.4) осуществляется методом Эйлера:

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{t_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_n} = v_n, \quad \frac{d\lambda}{dt} \Big|_{t_n} \approx \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\tau_n} = \mu_n. \quad (1.5)$$

В результате имеем уравнения с неизвестными v_n и μ_n :

$$(A - \lambda_n E)v_n - \mu_n x_n = -r_n, \quad (1.6)$$

$$2(v_n, x_n) = 1 - (x_n, x_n), \quad (1.7)$$

где r_n – невязка уравнения (1.1), т.е.

$$r_n = (A - \lambda_n E)x_n. \quad (1.8)$$

Если ищем v_n в виде

$$v_n = -x_n + \mu_n \theta_n, \quad (1.9)$$

то подстановка (1.9) в (1.6) и (1.7) дает

$$(A - \lambda_n E)\theta_n = x_n, \quad (1.10)$$

$$2\mu_n(\theta_n, x_n) = 1 + (x_n, x_n). \quad (1.11)$$

Поскольку правая часть уравнения (1.11) больше единицы, то $(\theta_n, x_n) \neq 0$ и тем самым из (1.11) имеем

$$\mu_n = \frac{1 + (x_n, x_n)}{2(\theta_n, x_n)}. \quad (1.12)$$

Система линейных алгебраических уравнений (1.10) решается относительно θ_n одним из стандартных методов. После вычисления θ_n , величина μ_n определяется по формуле (1.12). Согласно (1.5) следующие приближения x_{n+1} , λ_{n+1} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \tau_n v_n = (1 - \tau_n)x_n + \tau_n \mu_n \theta_n, \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n + \tau_n \mu_n, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где n – номер итерации, $\tau_n > 0$ итерационный параметр и (λ_0, x_0) – начальное приближение из окрестности искомого решения. Как видно из формул (1.13) при $\tau_n = 1$ предлагаемый алгоритм совпадает с обычным методом Ньютона для задачи (1.1), (1.2). Причем он требует, как и метод обратной итерации с соотношением Рэлея, достаточно хорошего начального приближения. Вообще, как сходимость итерационного процесса (1.13), так и скорость сходимости зависят от выбора итерационного параметра $\tau_n > 0$.

2. Сходимость метода и выбор итерационного параметра

Исследуем сходимость предлагаемого итерационного процесса (1.13). Из формулы невязки (1.8) уравнения (1.1) на n -том шаге с учетом (1.6), (1.7) следует выражение для невязки на $n + 1$ -ом шаге

$$r_{n+1} = (1 - \tau_n)r_n - \tau_n^2 \mu_n v_n. \quad (2.1)$$

Следовательно, имеем

$$\|r_{n+1}\|^2 = (1 - \tau_n)^2 \|r_n\|^2 - 2(1 - \tau_n)\tau_n^2 \mu_n (r_n, v_n) + \tau_n^4 \mu_n^2 \|v_n\|^2. \quad (2.2)$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Необходимым и достаточным условием убывания нормы невязки от итерации к итерации является выполнение неравенства

$$\varphi(\tau_n) = (\tau_n - 2)\|r_n\|^2 - 2(1 - \tau_n)\tau_n \mu_n (r_n, v_n) + \tau_n^3 \mu_n^2 \|v_n\|^2 < 0. \quad (2.3a)$$

Доказательство теоремы следует из соотношения

$$\|r_{n+1}\|^2 = \|r_n\|^2 + \tau_n \varphi(\tau_n), \quad (2.3b)$$

которое следует из (2.2).

Отсюда ясно, что нужно итерационный параметр τ_n выбрать так, чтобы выполнялось условие (2.3a). Однако, найти такие значения итерационного параметра τ_n , для которых выполняется неравенство (2.3a) в общем случае затруднительно.

С другой стороны, правая часть соотношения (2.2) есть положительная квадратичная функция от $\alpha_n = \mu_n \tau_n^2$ и она достигает минимального значения

$$\min_{\alpha_n} \|r_{n+1}\|^2 = \|r_{n+1}(\alpha_n^*)\|^2 = (1 - \tau_n)^2 \left(1 - \frac{(r_n, v_n)^2}{\|r_n\|^2 \|v_n\|^2} \right) \|r_n\|^2 \quad (2.4)$$

при значении $\alpha_n = \alpha_n^*$

$$\alpha_n^* = \frac{(1 - \tau_n)(r_n, v_n)}{\|v_n\|^2}. \quad (2.5)$$

Легко видеть, что (2.5) эквивалентно уравнению

$$D(\tau_n) \equiv \mu_n \tau_n^2 \|v_n\|^2 - (1 - \tau_n)(r_n, v_n) = 0, \quad (2.6)$$

корни которого вычисляются по формуле

$$\tilde{\tau}_n = \frac{-(r_n, v_n) \pm \sqrt{\Delta_n}}{2\mu_n \|v_n\|^2}, \quad (2.7)$$

где

$$\Delta_n = (r_n, v_n)^2 + 4\mu_n (r_n, v_n) \|v_n\|^2. \quad (2.8)$$

Мы сформулируем основной результат работы в виде следующей теоремы.

Теорема 2.2. Пусть итерационный параметр τ_n выбран по формуле:

$$\tau_n = \begin{cases} \max\{0.1; \tilde{\tau}_n\} \text{ или } \min\{\tilde{\tau}_n; 1.9\}, & \text{если } \Delta_n \geq 0, \\ 1, & \text{если } \mu_n^2 \|v_n\|^2 < \|r_n\|^2 \text{ и } \Delta_n < 0, \\ \bar{\tau}_n, & \text{если } \mu_n^2 \|v_n\|^2 \geq \|r_n\|^2 \text{ и } \Delta_n < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.9a) \\ (2.9b) \\ (2.9c) \end{matrix}$$

где $\tilde{\tau}_n$ – корень уравнения (2.6) на интервале $(0, 2)$, а $\bar{\tau}_n$ – корень уравнения $g(\tau_n) = 0$ на интервале $(0, 1)$, где

$$g(\tau_n) = (\tau_n - 2)\|r_n\|^2 - 2(1 - \tau_n)\tau_n\mu_n(r_n, v_n) + \tau_n^2\mu_n^2\|v_n\|^2. \quad (2.10)$$

Тогда справедливо равенство

$$\|r_{n+1}\| = q_n \|r_n\|, \quad q_n < 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.11)$$

причем при $\Delta_n > 0$

$$q_n = |1 - \tau_n| \sqrt{1 - \frac{(r_n, v_n)^2}{\|r_n\|^2 \|v_n\|^2}}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Пусть $\Delta_n > 0$. Тогда один корень уравнения (2.6) лежит в интервале $(0, 2)$, поскольку $D(0)D(2) = -\Delta_n < 0$. Более точно, этот корень принадлежит интервалу $(0, 1)$ при $\mu_n(r_n, v_n) > 0$ и принадлежит интервалу $(1, 2)$ при $\mu_n(r_n, v_n) < 0$. Случай $\mu_n(r_n, v_n) = 0$ исключается, ибо $\tau_n^* = 0$. Тогда из (2.4) следует (2.11).

Пусть $\Delta_n < 0$. В этом случае действительных корней уравнения (2.6) не существует и не можем найти минимальное значение $\|r_{n+1}\|$ по вспомогательному параметру α_n . Однако, мы можем найти τ_n , для которых удовлетворяется неравенство (2.3a). В самом деле, используем, тот факт что

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= -2\|r_n\|^2 < 0, \\ \varphi(1) &= -\|r_n\|^2 + \mu_n^2 \|v_n\|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если $\mu_n^2 \|v_n\|^2 < \|r_n\|^2$, то $\varphi(1) < 0$ и, следовательно, можем выбрать $\tau_n = 1$. Тогда из (2.3b) следует неравенство $\|r_{n+1}\| < \|r_n\|$. Это означает, что выполняется

условию (2.11). Если $\mu_n^2 \|v_n\|^2 \geq \|r_n\|^2$, то $\varphi(1) \geq 0$ и $g(1) \geq 0$. Тогда из (2.13) и (2.10) имеют место соотношения $\varphi(0)\varphi(1) < 0$ и $g(0)g(1) < 0$, и выполняется неравенство на интервале $(0, 1)$

$$\varphi(\tau_n) < g(\tau_n).$$

Это означает, что если мы выбираем $g(\bar{\tau}_n) = 0$, то $\varphi(\bar{\tau}_n) < 0$. В этом случае, из равенства (2.3с) вытекает равенство (2.11) с константой $q_n < 1$. Таким образом, выбор по формуле (2.9) обеспечивает монотонно убывание нормы невязки.

Пусть $\Delta_n = 0$, что эквивалентно $\tau_n = 0$ или $\tau_n = 2$. В этом случае, скорость сходимости итерации может замедляться. Выход из этой ситуации состоит в ограничении снизу и сверху в выборе значения τ_n , например, $0.1 \leq \tau_n \leq 1.9$. Теорема доказана полностью. \square

Замечание 2.3. В случае сходимости итерационного процесса (1.13) существует число N такое, что при всех $n \geq N$ величина $\varepsilon_n = \mu_n \|v_n\|^2$ становится сколь угодно малой и тем самым имеем

$$\sqrt{\Delta_n} = |(r_n, v_n)| \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon_n}{(r_n, v_n)}} \approx |(r_n, v_n)| \left(1 + \frac{2\varepsilon_n}{(r_n, v_n)}\right).$$

Тогда, в силу формулы (2.7), справедлива асимптотика

$$\tilde{\tau}_n = \frac{-(r_n, v_n) \pm \sqrt{\Delta_n}}{2\mu_n \|v_n\|^2} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

С другой стороны, как было отмечено выше, итерационный процесс (1.13) превращается при $\tau_n \rightarrow 1$ в метод Ньютона, имеющий квадратичную скорость сходимости. Поэтому можно ожидать, что итерационный процесс (1.13) сходится квадратично, в достаточно малой окрестности искомого решения (λ, x) .

Замечание 2.4. Оценка (2.11) является почти апостериорной, при $\Delta_n > 0$, поскольку мы можем точно вычислять величину q_n по формуле (2.12).

Замечание 2.5. Обозначаем $f(\tau_n) = \|r_{n+1}\|^2$, и рассмотрим ее производную

$$f'(\tau_n) = 2(\tau_n - 1)\|r_n\|^2 - 2(2\tau_n - 3\tau_n^2)\mu_n(r_n, v_n) + 4\tau_n^3\mu_n^2\|v_n\|^2. \quad (2.15)$$

Видно, что $f'(0) = -2\|r_n\|^2 < 0$ и $f'(2) = 2f(2) > 0$. Отсюда следует, что функция $f(\tau_n)$ имеет хотя бы один минимум на интервале $(0, 2)$. Таким образом можно найти оптимальное значение итерационного параметра $\tau_n = \tau_n^*$, вычисляя корни кубического уравнения $f'(\tau_n^*) = 0$.

Мы рассмотрим еще один вариант выбора параметра τ_n , для чего перепишем соотношение (2.2) в виде

$$\|r_{n+1}\|^2 = (1 - \tau_n)^2 \|r_n\|^2 + \tau_n^2 \psi(\tau_n), \quad (2.16)$$

где

$$\psi(\tau_n) = \mu_n^2 \|v_n\|^2 \tau_n^2 - 2\mu_n(1 - \tau_n)(r_n, v_n). \quad (2.17)$$

Пусть

$$\tilde{\Delta}_n = (r_n, v_n)^2 + 2\mu_n \|v_n\|^2 (r_n, v_n) > 0. \quad (2.18)$$

Тогда квадратическая относительно τ_n функция $\psi(\tau_n)$ имеет два вещественных корня τ_n^- , τ_n^+ ($\tau_n^- < \tau_n^+$). Очевидно, что

$$\psi(\tau_n) < 0, \text{ если } \tau_n^- < \tau_n < \tau_n^+. \quad (2.19)$$

Выбор итерационного параметра τ_n зависит от выражения $\mu_n(r_n, v_n)$:

(i) Пусть $\mu_n(r_n, v_n) > 0$. Тогда $\tau_n^- < 0$, $0 < \tau_n^+ < 1$ и поэтому

$$\psi(\tau_n) < 0, \text{ если } \tau_n \in (0, \tau_n^+). \quad (2.20)$$

(ii) Пусть $\mu_n(r_n, v_n) < 0$. Тогда $1 < \tau_n^- < 2 < \tau_n^+$ и поэтому

$$\psi(\tau_n) < 0, \text{ если } \tau_n \in (\tau_n^-, 2). \quad (2.21)$$

Случай $\mu_n(r_n, v_n) = 0$ исключается, ибо $\tau_n^- = \tau_n^+ = 0$ и $\psi(\tau_n^\pm) = 0$. Из (2.16), (2.20) и (2.21) следует

$$\|r_{n+1}\| < q_n \|r_n\|, \quad q_n = |1 - \tau_n| < 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.22)$$

при условии $\tau_n \in (0, 2) \cap (\tau_n^-, \tau_n^+)$. Итерационный параметр τ_n будем выбирать из условия

$$q_n < q_{n-1}. \quad (2.23)$$

Лемма 2.6. Достаточным условием выполнения неравенства (2.23) является выбирать итерационный параметр τ_n по формуле

$$\tau_n = \begin{cases} \min \left[\frac{\|r_{n-1}\|}{\|r_n\|} \tau_{n-1}; 1 \right] & \text{в случае (i), } (\tau_0 \approx 0.1), \\ \max \left[\frac{\|r_n\|}{\|r_{n-1}\|} \tau_{n-1}; 1 \right] & \text{в случае (ii), } (\tau_0 \approx 1.9). \end{cases} \quad (2.24)$$

Доказательство. Рассмотрим случай (i). Тогда $\tau_{n-1} \in (0, \tau_{n-1}^+) \subset (0, 1)$ и, следовательно $\|r_n\| < \|r_{n-1}\|$. Пусть $\tau_n = \frac{\|r_{n-1}\|}{\|r_n\|} \tau_{n-1}$. Тогда имеем $1 > \tau_n > \tau_{n-1}$, следовательно будет выполнено условие (2.23). Пусть $\tau_n \equiv 1$. Тогда $q_n = |1 - \tau_n| = 0$, в то же время $q_{n-1} = |1 - \tau_{n-1}| > 0$, и также выполняется (2.23). Аналогичным образом доказывается (2.23) в случае (ii). \square

Пусть $\tilde{\Delta}_n < 0$. В этом случае функция $\psi(\tau_n)$ не имеет действительных корней и поэтому как и раньше, нам нужно использовать неравенство (2.3a) для того, чтобы выбирать итерационный параметр, обеспечивающий уменьшение нормы $\|r_n\|$ от итерации к итерации. Так как из неравенства $\tilde{\Delta}_n < 0$ вытекает, что $\mu_n(r_n, v_n) < 0$ и $\Delta_n < 0$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2.7. Пусть итерационный параметр τ_n выбран в виде

$$\tau_n = \begin{cases} \min \left(1; \frac{\|r_{n-1}\|}{\|r_n\|} \tau_{n-1} \right), & \text{если } \tilde{\Delta}_n > 0 \text{ и } \mu_n(r_n, v_n) > 0, \quad \tau_0 \approx 0.1, \\ \max \left(1; \frac{\|r_n\|}{\|r_{n-1}\|} \tau_{n-1} \right), & \text{если } \tilde{\Delta}_n > 0 \text{ и } \mu_n(r_n, v_n) < 0, \quad \tau_0 \approx 1.9, \\ 1, & \text{если } \mu_n^2 \|v_n\|^2 < \|r_n\|^2 \text{ и } \tilde{\Delta}_n < 0, \\ \bar{\tau}_n, & \text{если } \mu_n^2 \|v_n\|^2 \geq \|r_n\|^2 \text{ и } \tilde{\Delta}_n < 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

где $\bar{\tau}_n$ – корень уравнения $g(\tau_n) = 0$, принадлежащий в интервалу $(0, 1)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|r_{n+1}\| \leq q_n \|r_n\|, \quad q < 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.26)$$

причем при $\tilde{\Delta}_n > 0$

$$q_n = |1 - \tau_n|. \quad (2.27)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2.

3. Нелинейная задача на собственные значения

Рассмотрим нелинейную задачу на собственные значения

$$A(\lambda)x = 0, \quad (3.1)$$

$$(x, x) - 1 = 0, \quad (3.2)$$

где A – матрица нелинейно зависящая от спектрального параметра λ . НАМН применяется также для задачи (3.1), (3.2), которая сводится к уравнению

$$A(\lambda_n)\theta_n = -A'(\lambda_n)x_n. \quad (3.3)$$

Здесь $A'(\lambda_n)$ производная матрицы $A(\lambda)$ по спектральному параметру λ . Пусть поправка μ_n вычисляется по формуле (1.12) и следующие приближения для x_{n+1} , λ_{n+1} находятся по формуле (1.13), а невязка определяется выражением $\bar{r}_n = A(\lambda_n)x_n$. Тогда легко показать, что

$$\bar{r}_{n+1} = (1 - \tau_n)\bar{r}_n + \tau_n^2 \mu_n A'(\lambda_n)v_n + O(\tau_n^2 \mu_n^2). \quad (3.4)$$

Сравнение (3.4) с (2.1) показывает, что невязки r_{n+1} , \bar{r}_{n+1} имеют одинаковую главную часть. Поэтому справедливы теоремы 2.2 и 2.7, если заменить v_n через $-A'(\lambda_n)v_n$.

4. Численный эксперимент

Качество предлагаемого алгоритма проверено на различных тестовых задачах. Здесь приведем результаты численного эксперимента. Отметим, что во всех расчетах итерационный процесс прекращается, когда $\|r_n\| \leq \varepsilon$, где ε – заданное положительное малое число.

Пример 1. Как известно, масштабирующая функция с компактным носителем в вейвлет-анализе удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k \in Z} c_k \varphi(2x - k), \quad (4.1)$$

где c_k – называются фильтр-коэффициентами, которые обычно затабулированы. Для определенности считаем, что $\varphi(x)$ – масштабирующая функция Добыши с носителем $[0, 2N - 1]$. Из уравнения масштабирования (4.1) следует, что значения производных масштабирующей функции удовлетворяют уравнению

$$\varphi^{(m)}(i) = 2^m \sum_{k=0}^{2N-1} c_k \varphi^{(m)}(2i - k), \quad 1 \leq i \leq 2N - 2,$$

которое записывается в матричной форме:

$$H\Phi^{(m)} = 2^{-m}\Phi^{(m)}, \quad (4.2)$$

где $\Phi^{(m)} = (\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}, \dots, \varphi_{2N-2}^{(m)})^T$ и

$$H = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{2N-1} & c_{2N-2} & c_{2N-3} & c_{2N-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{2N-1} & c_{2N-2} & \dots & c_1 & c_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2N-1} & c_{2N-2} \end{pmatrix}_{(2N-2) \times (2N-2)}$$

Таким образом, вычисление значений производных $\varphi^{(m)}$ в точках i сводится к нахождению собственного вектора $\Phi^{(m)}$ матрицы H , соответствующему известному собственному значению $\lambda = 2^{-m}$. Для решения задачи (4.2) применили НАМН, описанный в параграфах 2 и 3. При различных N от 3 до 10 были вычислены векторы $\Phi^{(m)} = (\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}, \dots, \varphi_{2N-2}^{(m)})$, $m = 0, 1, 2$, и все результаты с точностью до 10^{-13} совпадают с результатами работы [9]. Для краткости в таблице 1 приведем численные результаты для случая $m = 1$ и $N = 3$. Здесь значения итерационного параметра τ_n определяются с помощью формулы (2.9).

Таблица 1

Начальные приближения: $\lambda_0 = 17$, $(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)}, \varphi_4^{(1)}) = (4; -7; 0; 0)$, $\varepsilon = 10^{-12}$			
n	τ_n	$\ r_n\ $	λ_n
1	1.899999999	32.97480575414	8.693003630775
3	0.98407827	0.032910488850	0.504528138910
6	1.000003806	0.000000005951	0.500000008922
7	1.	0.000000000000	0.500000000000
$\varphi_1^{(1)} = 1.63845234088564$		$\varphi_2^{(1)} = -2.23275819046264$	
$\varphi_3^{(1)} = 0.5501593582749$		$\varphi_4^{(1)} = 0.0441464913050$	

Пример 2. Рассмотрим задачу на собственные значения для трехдиагональной матрицы,

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

Как известно, собственные значения матрицы A определяются по формуле

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad h = \frac{1}{N}.$$

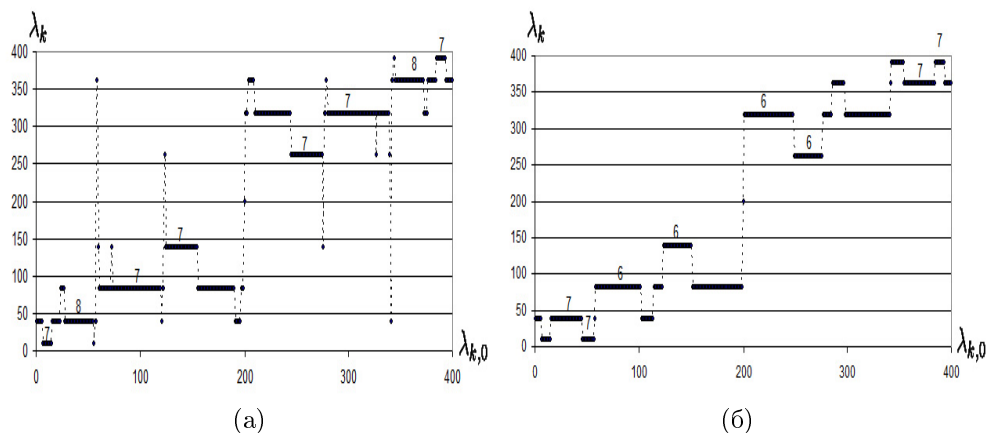


Рис. 1: Численные результаты с выбором итерационных параметров τ_n из (2.9) (а) и τ_n^* (б).

Все собственные значения матрицы A размерностью 9×9 вычислены с выбором итерационных параметров τ_n из (2.9) и τ_n^* . На Рис. 1 указано число итераций при начальном приближении $\lambda_{k,0} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, \dots, 9$ для итерационных параметров τ_n (а) и τ_n^* (б), соответственно.

Пример 3. Рассмотрим матрицу с полиномиальной зависимостью от спектрального параметра λ ,

$$A(\lambda) = E_4 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_2, \quad \beta \equiv 1 + \alpha,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3\alpha & -(1 + \alpha^2 + 2\beta^2) & \alpha(1 + 2\beta^2) & -\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 + 2\alpha^2 & \alpha(1 - \alpha^2 - 2\beta^2) & 2\alpha^2\beta^2 & -\alpha\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \\ 2\alpha & -(\alpha^2 + 2\beta^2) & 2\alpha\beta^2 & -\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как известно [8], она при $\alpha \neq 0$ имеет восемь изолированных простых собственных значений $-\alpha$, $-\alpha \pm (1 + \alpha)i$, $\pm(1 + \alpha)i$, $\pm i, 0$. Когда $\alpha = 0$, собственное значение $\lambda = 0$ имеет кратность 2 а $\lambda = \pm i$ имеет кратность 3.

Таблица 2, ($\varepsilon = 10^{-8}$)

n	(2.9)			(2.25)		
	τ_n	$\ r_n\ $	$\lambda_n + \alpha$	τ_n	$\ r_n\ $	$\lambda_n + \alpha$
0	1.0000000	1.88(-00)	-5.00(-01)	1.8131649	1.88(-00)	-5.00(-01)
1	1.0164918	8.50(-01)	-8.10(-03)	1.3611315	1.41(-00)	3.92(-01)
2	0.9772184	1.16(-02)	2.44(-03)	1.0000000	2.05(-00)	-4.89(-01)
3	1.0082243	2.51(-04)	1.29(-04)	1.0000000	4.82(-01)	-2.05(-01)
4	1.0004115	2.05(-06)	-8.76(-07)	1.0000000	1.18(-01)	-1.27(-02)
5	1.0000020	8.46(-10)	3.70(-10)	1.0000000	1.60(-03)	5.87(-04)
6				1.0000000	1.72(-06)	-3.03(-07)
7				1.0000000	8.85(-13)	2.94(-14)

n	оптимальный выбор			[4]		
	τ_n^*	$\ r_n\ $	$\lambda_n + \alpha$	τ_n	$\ r_n\ $	$\lambda_n + \alpha$
0	1.0451513	1.88(-00)	-5.00(-01)	0.8312412	1.88(-00)	-5.00(-01)
1	0.9926652	8.48(-01)	1.41(-02)	0.9887447	0.89(-00)	-9.11(-02)
2	0.9997205	1.11(-02)	-4.06(-03)	0.9994771	0.10(-00)	1.89(-02)
3	1.0006307	1.56(-04)	-1.65(-04)	0.9999988	2.30(-03)	-5.67(-04)
4	1.0000001	3.39(-08)	4.48(-08)	0.9999999	2.44(-06)	-2.40(-06)
5	1.0000000	1.18(-14)	-1.39(-14)	1.0000000	1.22(-11)	-1.56(-12)

Было вычислено вещественное простое собственное значение $\lambda = -\alpha$, ($\alpha = 1$), с шагом τ_n выбранным по формулам (2.9), (2.25) и τ_n^* . В таблице 2 приведены зависимости величин τ_n , τ_n^* и $\|r_n\|$ от номера итерации. Таблица 2 показывает преимущество предложенного в данной работе метода оптимального выбора итерационного параметра τ_n^* НАМН. Также из таблицы 2 видно, что оптимальный выбор τ^* дает лучшую скорость сходимости чем выбор предложенный в работе [4].

Список литературы

- [1] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
- [2] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
- [3] Жанлав Т., Пузынин И.В. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона. Журнал вычисл. матем. и матем. физ., т. 32, 1992, сс. 846–856.
- [4] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
- [5] Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Наука, 1983.
- [6] Пузынин И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона для численного решения задачи квантовой механики. Дисс. на соиск. уч. ст. д.ф.м.н., Дубна, 1978.
- [7] Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

-
- [8] Andrew A.L., Chu K.E., Lancaster P. On the numerical solution of nonlinear eigenvalue problems. *Computing*, v. 55, 1995, pp. 91–111.
- [9] Zhanlav T. Some choices of moments of refinable function and applications. Preprint SFB393/03-11, Technische Universität Chemnitz, 2003.