УДК 510.665

РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИИ $T_f = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), F(x))$[1]

Снятков А.С.
Кафедра информатики

Поступила в редакцию 14.04.2008, после переработки 30.05.2008.

В статье рассматривается обобщение результата, полученного в нашей предыдущей работе. Мы показываем, что теория $T_f = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), F(x))$ является разрешимой, демонстрируя, что каждая формула эквивалентна экзистенциальной, если f — эффективно согласованная со сложением функция, а F — эффективно периодическая гиперфункция от f.

In the paper we generalize the result which was established in our previous article. We demonstrate the theory $T_f = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), F(x))$ is decidable and every formula is equivalent to an existential one, if f is an effectively addition-connected function, and F is the effectively periodic hyperfunction for f.

Ключевые слова: арифметика Семёнова, гиперфункция, эффективно периодическая гиперфункция, согласованная со сложением функция.
Keywords: Semenov's arithmetic, hyperfunction, effectively periodic hyperfunction, addition-connected function.

1. Введение

Арифметика натуральных чисел с одним сложением разрешима, как показал М.Пресбургер в 1929 году. Алгебраическая система $(\omega, 0, 1, <, +)$ и её теория — арифметика Пресбургера.

А.Л.Семёнов расширил арифметику Пресбургера функциями, согласованными со сложением, и доказал, что такая теория разрешима, если согласование эффективно. Примерами функций, эффективно согласованных со сложением, являются c^x, где c — константа, или $x!$

Наш результат является обобщением результатов А.Л.Семёнова и результатов работы [4] для некоторого класса функций. Мы добавляем к системе $(\omega, 0, 1, <, +, f)$ гиперфункцию F от f, где f — функция, согласованная со сложением, и показываем, что если F периодична по модулю p для любого натурального p, то теория новой системы является разрешимой.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 08-01-00241.

2. Определения

Далее всюду строчные готические буквы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, … (возможно, с индексами) будут обозначать целочисленные константы.

Определение 1 (А.Л.Семёнов). Функция f называется *согласованной со сложением*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. f периодична по модулю n для всех $n \in \omega$, $n \geqslant 2$;
2. для всякой неограниченной конечной суммы

$$S(x) = \sum_i (\alpha_i f(x + \beta_i))$$

   существует такое $\delta \in \omega$, что либо $S(x + \delta) > f(x)$ для всех $x \in \omega$, либо $S(x + \delta) < -f(x)$ для всех $x \in \omega$;
3. f строго возрастает.

Определение 2 (А.Л.Семёнов). Функция f называется *эффективно согласованной со сложением*, если константы в пунктах (1) и (2) находятся эффективно.

Примерами таких функций являются c^x, $x!$, где c – натуральное число (константа).

Пусть $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +)$ — арифметика Пресбургера. Добавим в эту теорию два новых одноместных функциональных символа f и F. Полученную теорию будем обозначать T_f.

Значением первого функционального символа будет функция, согласованная со сложением f, а второго — гиперфункция от f.

Определение 3. Определим функцию F через f следующим образом:

$$F(0) = F_0, \quad F(x + 1) = f(F(x)),$$

где F_0 — некоторая константа. Определённую таким образом функцию будем называть *гиперфункцией* от f.

Определение 4. Будем говорить, что гиперфункция F от f является *эффективно периодичной*, если для любого натурального p функция F периодична по модулю p, начиная с некоторого аргумента, с периодом, который определяется эффективно по p.

Заметим, что в теории T_f определимы (см. [2, 4]) следующие символы: все натуральные числа, предикаты делимости $Q_i(x)$, умножение на константу и целочисленное деление на константу. Мы будем использовать также вычитание, когда оно имеет смысл для натуральных чисел.

Также определимы обратные функции:

$$f^{-1}(x) = b \iff f(b) \leqslant x \wedge f(b + 1) > x,$$

$$F^{-1}(x) = b \iff F(b) \leqslant x \wedge F(b + 1) > x.$$

Если $f(0) = m > 0$, то будем считать $f^{-1}(n) = 0$, где $n < m$.

Добавление к теории определимых символов не увеличивает выразительных возможностей, поэтому в дальнейшем мы будем включать все эти символы в состав сигнатуры.

Мы продемонстрируем, что если теорию $T_f = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f, F)$, где F эффективно периодична, обогатить предикатами делимости и обратными функциями, то каждая формула будет эквивалента бескванторной. Эта бескванторная формула строится по исходной эффективно, если согласование эффективно.

Далее, по любому атомному предложению мы можем вычислить его истинностное значение, и, следовательно, мы можем тоже самое проделать для любого бескванторного предложения.

Данный результат является более общим, чем результат, полученный в работе [4], так как он относиться к более широкому классу функций, в который, например, входит факториал. Тривиально показать, что гиперфункция F от $x!$ будет эффективно периодичной.

3. Элиминация кванторов в теории T_f

Прежде всего докажем несколько лемм.

Лемма 1. Любая согласованная со сложением функция $f(x)$ растёт не медленнее, чем любая линейная функция, начиная с некоторого x.

Доказательство. В статье [3] было показано, что любая функция, согласованная со сложением, растёт не медленнее, чем функция экспоненты. Также мы знаем, что функция экспоненты, начиная с некоторого x, растёт быстрее чем любая линейная функция. □

Лемма 2. Если функция f согласована со сложением, а F — гиперфункция от f, то для любой константы $\mathfrak{h}$ верно неравенство $f(F(x+1)+\mathfrak{h}) \geqslant 3 \times f(F(x)+\mathfrak{h})$, начиная с некоторого x.

Доказательство. Если f — функция согласованная со сложением, то существует такое δ, что $f(x+\delta) \geqslant 3 \times f(x)$ (см. [3]).

Пользуясь леммой 1, получаем, что $f(F(x)) \geqslant F(x) + \delta$. То есть

$$f(F(x+1)+\mathfrak{h}) = f(f(F(x))+\mathfrak{h}) \geqslant f(F(x)+\mathfrak{h}+\delta) \geqslant 3 \times f(F(x)+\mathfrak{h}). \qquad \square$$

Лемма 3. Если f — функция, согласованная со сложением, то для любой константы $\mathfrak{a}$ существует константа $\mathfrak{d}_a$, такая что $f^{-1}(x \times \mathfrak{a}) \leqslant f^{-1}(x) + \mathfrak{d}_a$.

Доказательство. Итак, $f(u-1) \leqslant x \leqslant f(u)$ для некоторого u. Тогда

$$f^{-1}(f(u-1)) \leqslant f^{-1}(x),$$

т. е. $u \leqslant f^{-1}(x) + 1$. В статье [3] было показано, что для любой константы $\mathfrak{a}$ существует константа $\mathfrak{d}$, такая что $f(u+\mathfrak{d}) \geqslant \mathfrak{a} \times f(u)$. Тогда $f^{-1}(f(u+\mathfrak{d})) \geqslant f^{-1}(\mathfrak{a} \times f(u))$, т. е. $u + \mathfrak{d} \geqslant f^{-1}(\mathfrak{a} \times f(u))$. Но тогда, положив $\mathfrak{d}_a = \mathfrak{d} + 1$,

$$f^{-1}(x \times \mathfrak{a}) \leqslant f^{-1}(f(u) \times \mathfrak{a}) \leqslant u + \mathfrak{d} \leqslant f^{-1}(x) + 1 + \mathfrak{d} = f^{-1}(x) + \mathfrak{d}_a. \qquad \square$$

Лемма 4. Если функция f согласована со сложением, F — гиперфункция от f, $u_1 > u_2$ и $f(F(u_1)+\mathfrak{e}) < \mathfrak{c}f(F(u_2)+\mathfrak{k})$ для некоторых констант $\mathfrak{c}$,$\mathfrak{e}$,$\mathfrak{k}$, то u_2 не превосходит некоторой константы.

Доказательство. Так как $f(F(u_1)+\mathfrak{e}) < \mathfrak{c}f(F(u_2)+\mathfrak{k})$, то

$$f^{-1}(f(F(u_1)+\mathfrak{e})) \leqslant f^{-1}(\mathfrak{c}f(F(u_2)+\mathfrak{k})).$$

Пользуясь леммой 3, получаем

$$F(u_1)+\mathfrak{e} = f^{-1}(f(F(u_1)+\mathfrak{e})) \leqslant f^{-1}(\mathfrak{c}f(F(u_2)+\mathfrak{k})) \leqslant F(u_2)+\mathfrak{k}+\mathfrak{d}_{\mathfrak{c}},$$

где $\mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}$ — константа из леммы 3.

Итак, $F(u_1) > F(u_2)$, значит $F(u_1) \geqslant F(u_2+1) = f(F(u_2))$ и $F(u_1) < F(u_2)+\mathfrak{k}_1$, где $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}+\mathfrak{d}-\mathfrak{e}$. Получаем, что $F(u_2)+\mathfrak{k}_1 \geqslant f(F(u_2))$. Из леммы 1 следует, что $F(u_2)$ ограничено некоторой константой, следовательно, u_2 не превосходит некоторой константы. □

Лемма 5. Если f — функция, согласованная со сложением, и существует такое v, что

$$\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(v-1+\mathfrak{k}_1) < \mathfrak{k} \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(v+\mathfrak{k}_1),$$

где $\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1$ — константы, то это v единственно.

Лемма 6. Если f — функция, согласованная со сложением, а F — гиперфункция от f, и существует такое v, что

$$\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(v+\mathfrak{e}-1)+\mathfrak{h}) < \mathfrak{k} \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(v+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}),$$

где $\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{e}, \mathfrak{h}$ — константы, то это v единственно.

Теперь докажем одну из главных теорем о теории T_f.

Теорема 1. Если функция f согласована со сложением и гиперфункция F от f периодична по модулю p для любого натурального p, то в теории T_f любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле, матрица которой является булевой комбинацией предикатов делимости и сравнений сумм вида

$$\mathfrak{d} + \sum_v (\mathfrak{a}_v f(F(v+\mathfrak{f}_v)+\mathfrak{e}) + \mathfrak{b}_v f(v+\mathfrak{k}_v) + \mathfrak{c}_v v) \tag{1}$$

где $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}, \mathfrak{k}$ — константы, а v — переменные из формулы.

Доказательство. Наша задача — продемонстрировать, что формула

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_n)\phi \tag{2}$$

эквивалентна экзистенциальной, если ϕ — бескванторная формула, причем при этом преобразовании матрица формулы не теряет нужного нам вида. Будем делать это индукцией по количеству кванторов, стоящих после знака отрицания. Изначально будем считать, что ϕ является конъюнкцией предикатов делимости и сравнений сумм вида (1). Также считаем, что под предикатом делимости стоят только термы вида:

$$x + \mathfrak{b}, \quad f(x) + \mathfrak{c}, \quad f(F(x + \mathfrak{h}) + \mathfrak{e}) + \mathfrak{d}$$

Этого легко добиться (см. [2]).

Прежде всего (см. [3]), отметим, что делимость числа $f(u)$ зависит от делимости u, то есть $Q_i(f(u)+\mathfrak{a})$ эквивалентна булевой комбинации формул вида $Q_j(u+\mathfrak{b})$ для некоторых j и $\mathfrak{b}$ и некоторых линейных неравенств для u. Также $Q_i(F(u)+\mathfrak{e})$, в силу того, что $F(u)$ периодична по модулю p для любого натурального p, эквивалентна булевой комбинации формул вида $Q_j(u + \mathfrak{b})$ для некоторых j и $\mathfrak{b}$ и некоторых линейных неравенств для u.

Далее, формула вида $Q_i(f(F(u)+\mathfrak{e}))$ эквивалентна булевой комбинации формул вида $Q_j(F(u) + \mathfrak{e})$ для некоторого j и некоторых линейных неравенств для $F(u)$.

Еще несколько тривиальных замечаний:

1. Если $x \leqslant y$ и $f(y) < \mathfrak{a}x$ для некоторой константы $\mathfrak{a}$, то x не превосходит некоторой константы $\mathfrak{b}$.

2. Если $x \leqslant y$ и $f(F(y + \mathfrak{e}) + \mathfrak{k}) \leqslant \mathfrak{a}x$, то x не может превосходить некоторой константы $\mathfrak{b}$.

3. Если $x \leqslant y$ и $f(F(y + \mathfrak{e}) + \mathfrak{k}) \leqslant \mathfrak{a}f(x)$, то x не может превосходить некоторой константы $\mathfrak{b}$.

Теперь у нас любая формула является булевой комбинацией предикатов делимости вида $Q_i(u + \mathfrak{a})$ и сравнений сумм вида (1).

Если для какого-то x_i из формулы (2) члены видов $f(x_i + \mathfrak{k})$ и $f(F(x_i + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$ не встречаются в неравенствах из ϕ, то квантор для этого x_i удаляется точно так же, как в арифметике Пресбургера, причем при этом преобразовании матрица формулы не теряет нужного нам вида (см., например, [2]).

Теперь мы можем считать, что для всех x_i имеется член $f(x_i + \mathfrak{k})$ или член $f(F(x_i + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$. Без ограничения общности можно считать, что переменные из (2) упорядочены следующим образом:

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n.$$

Считаем также, что среди этих переменных нет равных. Всего этого можно добиться с помощью рассмотрения различных случаев и объединения их с помощью дизъюнкции. Такая операция не увеличит количества кванторов перед каждой из вновь полученных формул.

Приведем каждое неравенство из ϕ к виду

$$r_k \leqslant s_k \leqslant t_k, \tag{3}$$

где суммы s_k содержат только слагаемые с переменными x_i, а суммы r_k и t_k таких слагаемых не содержат. Ограничивающий член r_k, можно считать, есть всегда, в качестве него всегда можно взять 0. Верхняя граница t_k может отсутствовать.

Выберем среди всех слагаемых всех s_k максимальное по величине (без учета коэффициента перед ними). Это возможно сделать с помощью рассмотрения различных случаев и объединения их с помощью дизъюнкции.

Если есть несколько одинаковых максимальных (например, в случае $f(x_1) = f(F(x_2)))$, то возьмем любое из них. Умножим все неравенства (3) на коэффициент так, чтобы коэффициенты при этом слагаемом стали одинаковыми. Пусть σ — слагаемое с коэффициентом по абсолютной величине.

Пусть s'_k — остаток суммы s_k (без σ). Слагаемое σ может иметь один из видов: $\mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k})$ или $\mathfrak{a}f(F(x_i + \mathfrak{e}) + \mathfrak{d})$, $i = 1, \ldots, n$, где $\mathfrak{a} \geqslant 1$. Следует отметить, что слагаемое σ не может иметь вид x_i, $i = 1, \ldots, n$, так как мы сказали, что для всех x_i имеется член $f(x_i + \mathfrak{k})$ или член $f(F(x_i + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$, то, если бы σ имет вид x_i, мы получаем:

$$x_i \leqslant f(x_i + \mathfrak{k}) \text{ или } x_i \leqslant f(F(x_i + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}).$$

В обоих случаях, согласно сделанным в начале доказательства замечаниям (2) и (3), x_i не превосходит некоторую константу.

Итак, возможны две ситуации:

1. σ по модулю превосходит каждое s'_k не менее чем в два раза,
2. σ по модулю меньше $2s'_k$ для некоторого k.

Первый случай: $|\sigma| \geqslant 2|s'_k|$ для всех k.
Тогда для каждого s_k имеем оценку

$$\frac{1}{2}\sigma \leqslant s_k \leqslant \frac{3}{2}\sigma.$$

(A) Пусть $\sigma = \mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k})$.

Выберем r_p — максимальный из всех r_k, и t_q — минимальный из всех t_k.

Мы знаем что, если f — функция, согласованная со сложением, то существует такое δ ,что $f(x + \delta) \geqslant 3 \times f(x)$ (см. [3]).

Если истинно

$$(\exists u)\left(r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \mathfrak{k}) \wedge \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \mathfrak{k} + 1) \leqslant t_q\right),$$

то, положив $x_i = u$, будем иметь

$$r_k \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \mathfrak{k}) \leqslant s_k$$

и

$$t_k \geqslant t_q \geqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \mathfrak{k} + 1) \geqslant s_k.$$

Получили, что (3) выполнено для всех k. Следовательно, заменив x_i на u, истинность формулы (2) не изменится.

Если же такого u нет, то

$$(\forall u)\left(r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \mathfrak{k}) \to t_q < \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \mathfrak{k} + 1)\right)$$

Далее возможны две ситуации:

(a) $\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(\mathfrak{k} - 1) < r_p$.

Тогда формула (2) эквивалентна такой:

$$(\exists u)\Bigg(\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(u - 1 + \mathfrak{k}) < r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \mathfrak{k}) \wedge \\ \wedge \neg(\exists x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \bigvee_{x_i \in \{u-\delta, \ldots, u+\delta\}} \phi\Bigg).$$

По лемме 6 такое u только одно. При $x_i \leqslant u - \delta - 1$ имеем

$$s_p \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k}) \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(u - \delta - 1 + \mathfrak{k}) \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \mathfrak{k} - 1) < r_p,$$

При $x_i \geqslant u + \delta + 1$ имеем

$$s_q \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k}) \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(u + \delta + 1 + \mathfrak{k}) \geqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(u + 1 + \mathfrak{k}) > t_q.$$

Таким образом, и в том, и в другом случае формула ϕ ложна.

(b) $\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(\mathfrak{k} - 1) \geqslant r_p$.

Тогда формула (2) эквивалентна такой:

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \bigvee_{x_i \in \{0, \ldots, \delta\}} \phi,$$

потому что при $x_i \geqslant \delta + 1$ имеем

$$s_q \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k}) \geqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(\delta + 1 + \mathfrak{k}) \geqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(1 + \mathfrak{k}) > t_q.$$

то есть в этом случае формула ϕ ложна.

(B) Пусть $\sigma = \mathfrak{a}f(F(x_i + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$.

Выберем r_p — максимальный из всех r_k, и t_q — минимальный из всех t_k.

Если

$$(\exists u)\left(r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}) \wedge \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u + \mathfrak{e} + 1) + \mathfrak{h}) \leqslant t_q\right),$$

то, положив $x_i = u$, будем иметь

$$r_k \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}) \leqslant s_k$$

и

$$t_k \geqslant t_q \geqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u + \mathfrak{e} + 1) + \mathfrak{h}) > \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}) \geqslant s_k.$$

Получили, что (3) выполнено для всех k. Следовательно, заменив x_i на u, истинность формулы (2) не изменится.

Если же такого u нет, то

$$(\forall u)\left(r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \to t_q < \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u+\mathfrak{e}+1)+\mathfrak{h})\right)$$

Далее возможны две ситуации:

(a) $\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(\mathfrak{e}-1)+\mathfrak{h}) < r_p$

Тогда формула (2) эквивалентна такой:

$$(\exists u)\Bigg(\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u+\mathfrak{e}-1)+\mathfrak{h}) < r_p \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \wedge \\ \wedge \neg(\exists x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \bigvee_{x_i \in \{u-1,u,u+1\}} \phi\Bigg).$$

По лемме 7 такое u только одно. При $x_i \leqslant u-2$, пользуясь леммой 2, имеем

$$s_p \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \leqslant \frac{3}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u-2+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(u-1+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) < r_p,$$

При $x_i \geqslant u+2$, пользуясь леммой 2, имеем

$$s_q \geqslant \frac{1}{2}\times\mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \geqslant \frac{1}{2}\times\mathfrak{a}f(F(u+2+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \geqslant \frac{3}{2}\times\mathfrak{a}f(F(u+1+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) > t_q.$$

Таким образом, и в том, и в другом случае формула ϕ ложна.

(b) $\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}f(F(\mathfrak{e}-1)+\mathfrak{h}) \geqslant r_p$

Тогда формула (2) эквивалентна такой:

$$\neg(\exists x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \bigvee_{x_i \in \{0,1\}} \phi,$$

потому что при $x_i \geqslant 2$, пользуясь леммой 2, имеем

$$s_q \geqslant \frac{1}{2}\times\mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \geqslant \frac{1}{2}\times\mathfrak{a}f(F(2+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \geqslant \frac{3}{2}\times\mathfrak{a}f(F(1+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) > t_q.$$

то есть в этом случае формула ϕ ложна.

Второй случай: $|\sigma| < 2|s'_k|$ для некоторого k.
Выберем в s_k второе по величине из слагаемых (без учета коэффициента перед ними). Если максимальных слагаемых было несколько, то берем другое максимальное. Умножим это слагаемое на коэффициент, который стоял перед ним. Полученное слагаемое по абсолютной величине будем обозначать τ_k. Пусть $\mathfrak{c}$ — удвоенная сумма модулей всех коэффициентов из s'_k, то есть некоторая константа. Тогда получаем:

$$\sigma < \mathfrak{c}\tau_k.$$

Слагаемое τ_k может иметь один из видов: $\mathfrak{b}f(x_j + \mathfrak{k})$, $\mathfrak{b}f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$ или $\mathfrak{b}x_j$, $j = 1, \ldots, n$, где $\mathfrak{b} \geqslant 1$. Рассмотрим все случаи для τ_k и покажем, как в каждом из них можно уменьшить количество кванторов в формуле (2).

1. $\sigma = \mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k}), \tau_k = \mathfrak{b}f(x_j + \mathfrak{k}_1)$.

   Имеем:

$$f(x_j + \mathfrak{k}_1) \leqslant f(x_i + \mathfrak{k}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k}) < \mathfrak{c}\mathfrak{b}f(x_j + \mathfrak{k}_1),$$

$$f(x_j + \mathfrak{k}_1) \leqslant f(x_i + \mathfrak{k}) < \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}f(x_j + \mathfrak{k}_1),$$

$$f^{-1}(f(x_j + \mathfrak{k}_1)) \leqslant x_i + \mathfrak{k} \leqslant f^{-1}\left(\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}f(x_j + \mathfrak{k}_1)\right).$$

   Далее, по лемме 3, получаем:

$$x_j + \mathfrak{k}_1 \leqslant x_i + \mathfrak{k} \leqslant f^{-1}(f(x_j + \mathfrak{k}_1)) + \mathfrak{d},$$

$$x_j + \mathfrak{k}_1 \leqslant x_i + \mathfrak{k} \leqslant x_j + \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{d},$$

   тогда получаем, что x_i может принимать конечное количество значений:

$$x_j + \mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}, \ldots, x_j + \mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k} + \mathfrak{d},$$

   и можно вместо x_i подставить эти значения, объединив полученные формулы дизъюнкцией.

2. $\sigma = \mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k}), \tau_k = \mathfrak{b}f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$.

   Если в каком-то s_l содержится член $f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h})$, то получаем $f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \leqslant f(x_i+\mathfrak{k})$ и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (3), x_i не превосходит некоторую константу. Если же ни в каком s_l не содержится член $f(F(x_i + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$, имеем:

$$f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}) \leqslant f(x_i + \mathfrak{k}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}f(x_i + \mathfrak{k}) < \mathfrak{c}\mathfrak{b}f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}),$$

$$f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}) \leqslant f(x_i + \mathfrak{k}) < \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}),$$

$$f^{-1}(f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})) \leqslant x_i + \mathfrak{k} \leqslant f^{-1}\left(\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})\right).$$

   Далее, по лемме 3, получаем:

$$F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h} \leqslant x_i + \mathfrak{k} \leqslant f^{-1}(f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})) + \mathfrak{d},$$

$$F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h} \leqslant x_i + \mathfrak{k} \leqslant F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h} + \mathfrak{d},$$

тогда получаем, что x_i может принимать конечное количество значений:

$$F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h} - \mathfrak{k}, \ldots, F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h} - \mathfrak{k} + \mathfrak{d}$$

и можно вместо x_i подставить эти значения, объединив полученные формулы дизъюнкцией.

3. $\sigma = \mathfrak{a} f(x_i + \mathfrak{k}), \tau_k = \mathfrak{b} x_j, j \geqslant 1.$

   Возможны два случая:

   (a) $\mathfrak{b} x_j \leqslant \mathfrak{a} f(x_i + \mathfrak{k})$.
   Имеем:

$$\mathfrak{b} x_j \leqslant \mathfrak{a} f(x_i + \mathfrak{k}) < \mathfrak{c}\mathfrak{b} x_j,$$

   Так как в начале нашего доказательства мы сказали, что для всех x_j имеется член $f(x_j + \mathfrak{k}_1)$ или член $f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$, то в каком-то s_l $(l \neq k)$ содержится член $f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$ или $f(x_j + \mathfrak{k}_1)$.
   Если в каком-то s_l $(l \neq k)$ содержится член $f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h})$, то получаем

$$f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}) \leqslant f(x_i + \mathfrak{k}),$$

$$\mathfrak{a} f(x_i + \mathfrak{k}) \leqslant \mathfrak{c}\mathfrak{b} x_j,$$

$$f(F(x_j + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}) \leqslant \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} x_j,$$

   и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (2), x_j не превосходит некоторую константу.
   Если в каком-то s_l $(l \neq k)$ содержится член $f(x_j + \mathfrak{k}_1)$, то получаем

$$f(x_j + \mathfrak{k}_1) \leqslant f(x_i + \mathfrak{k}),$$

$$\mathfrak{a} f(x_i + \mathfrak{k}) \leqslant \mathfrak{c}\mathfrak{b} x_j,$$

$$f(x_j + \mathfrak{k}_1) \leqslant \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} x_j,$$

   и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (1), x_j не превосходит некоторую константу.

   (b) $\mathfrak{b} x_j > \mathfrak{a} f(x_i + \mathfrak{k})$.
   Имеем:

$$x_j \leqslant \mathfrak{a} f(x_i + \mathfrak{k}) < \mathfrak{b} x_j.$$

   Далее рассмотрения аналогично случаю (a).

4. $\sigma = \mathfrak{a} f(F(x_i + \mathfrak{e}) + \mathfrak{h}), \tau_k = \mathfrak{b} x_j.$

   Возможны два случая:

(a) $\mathfrak{b}x_j \leqslant \mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h})$.
Имеем:

$$\mathfrak{b}x_j \leqslant \mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) < \mathfrak{cb}x_j,$$

Так как в начале нашего доказательства мы сказали, что для всех x_j имеется член $f(x_j+\mathfrak{k}_1)$ или член $f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1)$, то в каком-то s_l $(l \neq k)$ содержится член $f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1)$ или $f(x_j+\mathfrak{k}_1)$.
Если в каком-то s_l $(l \neq k)$ содержится член $f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1)$, то получаем

$$f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1) \leqslant f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}),$$

$$\mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{cb}x_j,$$

$$f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1) \leqslant \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{a}}x_j,$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (2), x_j не превосходит некоторую константу.
Если в каком-то s_l $(l \neq k)$ содержится член $f(x_j+\mathfrak{k}_1)$, то получаем

$$f(x_j+\mathfrak{k}_1) \leqslant f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}),$$

$$\mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{cb}x_j,$$

$$f(x_j+\mathfrak{k}_1) \leqslant \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{a}}x_j,$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (1), x_j не превосходит некоторую константу.

(b) $\mathfrak{b}x_j > \mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h})$. Имеем:

$$x_j \leqslant \mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) < \mathfrak{b}x_j$$

Далее рассмотрения аналогично случаю (a).

5. $\sigma = \mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}), \tau_k = \mathfrak{b}f(x_j+\mathfrak{k})$.
Имеем:

$$f(x_j+\mathfrak{k}) \leqslant f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) < \mathfrak{cb}f(x_j+\mathfrak{k}).$$

Если в каком-то s_l $(l \neq k)$ содержится член $f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1)$, то получаем

$$f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1) \leqslant f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}),$$

$$\mathfrak{a}f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{cb}f(x_j+\mathfrak{k}),$$

$$f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1) \leqslant \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{a}}f(x_j+\mathfrak{k}),$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (3), x_j не превосходит некоторую константу.

Если же ни в каком s_l не содержится член $f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1)$, то получаем, что

$$f(x_j+\mathfrak{k}) \leqslant f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) \quad \text{и} \quad f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) < \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} f(x_j+\mathfrak{k}).$$

Отсюда следует

$$f^{-1}(f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h})) < f^{-1}\left(\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} f(x_j+\mathfrak{k})\right)$$

и

$$f^{-1}(f(x_j+\mathfrak{k})) \leqslant f^{-1}(f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h})).$$

Пользуясь леммой 3, получаем

$$F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h} < f^{-1}(f(x_j+\mathfrak{k}))+\mathfrak{d} \text{ и } x_j+\mathfrak{k} \leqslant F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h},$$

$$F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}-\mathfrak{d} < x_j+\mathfrak{k} \text{ и } x_j+\mathfrak{k} \leqslant F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h},$$

получили, что x_j может принимать лишь значения на отрезке

$$\left[F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}-\mathfrak{d}-\mathfrak{k}; F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}-\mathfrak{k}\right],$$

то есть вместо квантора по x_j можно написать дизъюнкцию формул.

6. $\sigma = \mathfrak{a} f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}), \tau_k = \mathfrak{b} f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1)$.

Имеем:

$$f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1) \leqslant f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h})$$

и

$$\mathfrak{a} f(F(x_i+\mathfrak{e})+\mathfrak{h}) < \mathfrak{c}\mathfrak{b} f(F(x_j+\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{h}_1).$$

Если $x_j+\mathfrak{e}_1 < x_i+\mathfrak{e}$, то, согласно лемме 4, x_j не превосходит некоторой константы, если $x_j+\mathfrak{e}_1 > x_i+\mathfrak{e}$, то, согласно лемме 4, x_i не превосходит некоторой константы, если же $x_j+\mathfrak{e}_1 = x_i+\mathfrak{e}$, то в качестве x_j возьмём $x_i+\mathfrak{e}-\mathfrak{e}_1$.

Итак, мы убедились, что в первом случае количество элиминируемых кванторов можно уменьшить, добавляя новые кванторы существования перед отрицанием, а во втором — сократить их количество, используя вместо кванторов дизъюнкцию. □

Следствие 1. Если f — эффективно согласованная со сложением функция, и гиперфункция F от f эффективно периодична, то построения в теореме 1 эффективны.

Теперь докажем главную теорему нашей работы.

Теорема 2. Пусть f — согласованная со сложением функция и гиперфункция F от f периодична по модулю p для любого натурального p. Пусть $T_f = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), F(x))$, тогда если теорию T_f обогатить предикатами делимости и обратными функциями для f и F, то в обогащённой теории любая формула будет эквивалентна бескванторной формуле.

Доказательство. Мы в предыдущей теореме установили, что если f согласована со сложением и гиперфункция F периодична по модулю p для любого натурального p, то в теории T_f любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле.

Нам осталось доказать, что формула

$$(\exists x_1, \ldots, x_n)\phi \tag{4}$$

эквивалентна бескванторной.

Будем доказывать это индукцией по количеству кванторов.

Это доказательство почти в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы, с тем лишь отличием, что в случае 1 термы t_k и r_k содержат только константы и свободные переменные.

В случае (A) мы можем в качестве переменной u взять

$$f^{-1}\left(\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}\right) - \mathfrak{k} \quad \text{или} \quad f^{-1}\left(\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}\right) - \mathfrak{k} - 1.$$

В случае (B) мы можем вместо переменной u взять

$$F^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}\right) - \mathfrak{h}\right) - \mathfrak{e} \quad \text{или} \quad F^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{2r_p}{\mathfrak{a}}\right) - \mathfrak{h}\right) - \mathfrak{e} - 1. \quad \square$$

Следствие 2. Если f — эффективно согласованная со сложением функция, и гиперфункция F от f эффективно периодична, то в теории T_f, обогащённой предикатами делимости и обратными функциями для f и F, любая формула эквивалентна бескванторной формуле, которая строится по исходной эффективно.

Заключение

Мы установили, что если f — эффективно согласованная со сложением функция и гиперфункция F эффективно периодична, то в теории T_f любая формула эквивалентна бескванторной формуле, которая строится по исходной эффективно, и, следовательно, теория $T_f = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), F(x))$ разрешима.

Список литературы

[1] Дудаков С.М. Трансляционная теорема и автоматные структуры // Вестник ТвГУ сер. Прикл. матем., 4(21), 2006. С. 5–35.

[2] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

[3] Семёнов А.Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде // Изв. АН СССР, 47(3), 1983. С.623–658.

[4] Снятков А.С. Разрешимость теории $T_c = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, c^x, \mathfrak{C}^x)$ // Вестник ТвГУ сер. Прикл. матем., 5(35), 2007. С. 113–121