УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ВТОРОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ $\mathcal{LCK}$ - МНОГООБРАЗИЙ

Мухометзянова И.А.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 20.01.2008, после переработки 27.05.2008.

В работе выведены структурные уравнения локально конформно К-контактных многообразий. Введено понятие второй канонической связности локально конформно К-контактного многообразия. Выяснен также смысл обращения в нуль элементов спектра тензоров кривизны и кручения этой связности.

The structural equations of locally conformal K-contact manifolds are obtained. Some geometrical properties of such manifolds are considered.

Ключевые слова: почти контактные метрические структуры, контактная метрическая структура (почти сасакиева),К-контактные многообразия,конформное отображение, локально конформно почти сасакиева структура, нормальные многообразия, полусимметрическая связность, 1-я и 2-я канонические связности, обобщенное L-многообразие.
Keywords: almost contact metric structure, contact metric structure (Almost sasakian), K- contact manifold, conformal mapping, locally Conformal K- contact manifold, normal manifold, semisymmetric connection, canonical connectivity Generalized L- manifold.

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию почти контактных структур. В данной работе рассматриваются локально конформно К-контактные многообразия. Изучаются дифференциально-геометрические свойства с использованием структурных уравнений этой G-структуры и их дифференциального продолжения. Выясняется смысл обращения в нуль элементов спектра тензоров кривизны и кручения второй канонической связности локально конформно К-контактного многообразия.

1. Основные понятия

Пусть (M, g) —2n+1-мерное риманово многообразие, $\mathcal{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M, $\triangledown$ — оператор Кошуля римановой связности метрики g.

Определение 1. *Почти контактной метрической структурой* ($\mathcal{AC}$-структурой) на M называется совокупность $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ — тензорных полей на M, где $g=<,>$ — риманова метрика, Φ — тензор типа (1,1), который называется структурным оператором, ξ — характеристический вектор, η — контактная 1-форма:

$$\Phi(\xi)=0, \eta\circ\Phi=0, \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta, \eta(X)=<\xi, X>, \eta(\xi)=1,$$

$$<\Phi X, \Phi Y>=<X, Y>-\eta(X)\eta(Y), X, Y\in\mathcal{X}(M).$$

Известно [1], что на почти контактном многообразии M внутренним образом определены распределения $\mathcal{L}=ker(\eta)$ и $\mathcal{M}=\mathbb{R}\xi=\{\lambda\xi \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$, $dim\mathcal{L}=2n$, $dim\mathcal{M}=1$, $\mathcal{L}\cap\mathcal{M}=\{0\}$, $\mathcal{X}(M)=\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{L}^c=\mathcal{L}\otimes\mathbf{C}$. В $\mathcal{L}^c$ внутренним образом определены проекторы $\tau=\frac{1}{2}(id-i\Phi^c)$ и $\overline{\tau}=\frac{1}{2}(id+i\Phi^c)$, а в $\mathcal{X}(M)$— проекторы $m=\eta\otimes\xi, \pi=\tau\circ(-\Phi^2)=-\frac{1}{2}(id-i\Phi)\Phi^2=-\frac{1}{2}(\Phi^2-i\Phi^3)=-\frac{1}{2}(\Phi^2+i\Phi)$, $\overline{\pi}=\overline{\tau}\circ(-\Phi^2)=-\frac{1}{2}(id+i\Phi)\Phi^2=-\frac{1}{2}(\Phi^2+i\Phi^3)=\frac{1}{2}(-\Phi^2+i\Phi)$ на собственные распределения структурного оператора.

В касательном пространстве $T_p(M), p\in M$, можно построить ортонормированный репер $(p, e_0, e_1, ..., e_n, \Phi e_1, ..., \Phi e_n)$, где $e_0=\xi_p$ и A-репер $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, ..., \varepsilon_{\hat{n}})$ пространства $T^c_p(M)=T_p(M)\otimes\mathbf{C}$, где $\varepsilon_0=\xi_p, \varepsilon_a=\sqrt{2}\tau(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}}=\sqrt{2}\overline{\tau}(e_a)$. A-реперы характеризуются тем, что в них матрицы эндоморфизма Φ и метрического тензора g имеют вид, соответственно: $(\Phi^i_j)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & iI_n & 0 \\ 0 & 0 & -iI_n \end{pmatrix}$, $(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$. Известно, что совокупность A-реперов определяет G-структуру со структурной группой $U(n)\times\{1\}$ на M, которая называется *присоединенной G-структурой* [1].

Фундаментальной формой $\mathcal{AC}$-структуры называется кососимметричный дважды ковариантный тензор $\Omega(X, Y)=<X, \Phi Y>$.

Определение 2. Если фундаментальная форма удовлетворяет условию $d\eta=\Omega$, то почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой*, или *почти сасакиевой* (короче $\mathcal{AS}$-) структурой, на M [1]. Если к тому же η—форма Киллинга, т.е. $\bigtriangledown_j(\eta)_i+\bigtriangledown_i(\eta)_j=0$, где $i, j=\overline{0, 2n}$, то $\mathcal{AC}$-структура называется *K-контактной* (короче, $\mathcal{LCK}$-структурой). А если присоединенная Q-алгебра этого многообразия абелева [2], то это многообразие называется *многообразием келерова типа.*

Переход от $\mathcal{AC}$-структуры $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ к $\mathcal{AC}$-структуре $\{\Phi, e^{\sigma}\xi, e^{-\sigma}\eta, e^{-2\sigma}g\}$ называется *конформной деформацией структуры,* где σ—функция на M, называемая *определяющей функцией деформации.* Если $\sigma=const$, то конформная деформация называется *гомотетией.*

Определение 3. $\mathcal{AC}$-структура называется *локально конформно почти сасакиевой* (короче, $\mathcal{LCAS}$-) структурой, если в некоторой окрестности каждой точки многообразия эта структура допускает конформную деформацию в почти сасакиеву структуру.$\mathcal{AC}$-структура называется *локально конформно K-контактной* (короче, $\mathcal{LCK}$-) структурой, если в некоторой окрестности каждой точки многообразия эта структура допускает конформную деформацию в K-контактную структуру.

Пусть $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$ — $\mathcal{LCAS}$ - структура. Тогда она локально допускает конформную деформацию в $\mathcal{AS}$-структуру $\{\Phi,\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g}\}$, где $\tilde{g}=e^{-2\sigma}g, \tilde{\eta}=e^{-\sigma}\eta, \tilde{\xi}=e^{\sigma}\xi$, σ— определяющая функция соответствующей деформации. Фундаментальные формы Ω и $\tilde{\Omega}$ $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$ и $\{\Phi,\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g}\}$ структур соответственно локально связаны следующим образом:

$$\tilde{\Omega}(X,Y)=\tilde{g}(X,\Phi Y)=e^{-2\sigma}g(X,\Phi Y)=e^{-2\sigma}\Omega(X,Y).$$

Очевидно, что $d\tilde{\Omega}=0\Longleftrightarrow d(e^{-2\sigma}\Omega)=0\Longleftrightarrow -2e^{-2\sigma}d\sigma\wedge\Omega+e^{-2\sigma}d\Omega=0$, т.е.

$$d\Omega=2d\sigma\wedge\Omega. \tag{1}$$

Пусть в областях U и $\widetilde{U}$ заданы определяющие функции σ и $\widetilde{\sigma}$ соответствующих конформных деформаций. Тогда в области $U\bigcap\widetilde{U}$ имеем

$$d\Omega=2d\sigma\wedge\Omega=2d\widetilde{\sigma}\wedge\Omega\Longleftrightarrow d(\sigma-\widetilde{\sigma})\wedge\Omega=0.$$

Условимся, что индексы $a,b,c,...$ пробегают значения от 1 до $n, \hat{a}=a+n, \omega_a=\omega^{\hat{a}}$.

С учетом того, что $\Omega=-2i\omega^a\wedge\omega_a$ [1], где $\{\omega^i\}$ —компоненты форм смещения, имеем

$$\hat{\sigma}_0\omega\wedge\omega^a\wedge\omega_a+\hat{\sigma}_{[c}\delta^b_{a]}\omega^c\wedge\omega^a\wedge\omega_b+\hat{\sigma}^{[c}\delta^{b]}_a\omega_c\wedge\omega^a\wedge\omega_b=0,$$

где $\hat{\sigma}_i$ — компоненты формы $d\hat{\sigma}=d(\sigma-\tilde{\sigma}), \hat{\sigma}^a=\hat{\sigma}_{\hat{a}}$.
В силу линейной независимости базисных форм ω^i получим

$$\hat{\sigma}_0=0, \hat{\sigma}_{[c}\delta^b_{a]}=0, \hat{\sigma}^{[c}\delta^{b]}_a=0.$$

Итак,

$$\hat{\sigma}_{[c}\delta^b_{a]}=0\Longleftrightarrow\hat{\sigma}_c\delta^b_a-\hat{\sigma}_a\delta^b_c=0$$

Свернем последнее равенство по индексам a и b: $\hat{\sigma}_c\delta^a_a-\hat{\sigma}_a\delta^a_c=0\Longleftrightarrow(n-1)\hat{\sigma}_c=0\Longleftrightarrow\hat{\sigma}_c=0$, если $n\neq 1$.
Аналогичным образом получаем $\hat{\sigma}^c=0$. Таким образом $d\hat{\sigma}=0\Longleftrightarrow d\tilde{\sigma}=d\sigma$. Итак, в области $U\bigcap\widetilde{U}$ имеем $d\tilde{\sigma}=d\sigma$, а значит справедлива

Теорема 1. *Пусть σ—определяющая функция локально конформной деформации, переводящей $\mathcal{LCAS}$-структуру в $\mathcal{AS}$-структуру. Тогда $d\sigma$—глобально определенная дифференциальная 1-форма на M* $\square$.
Обозначим ее ϑ и назовем *контактной формой Ли*. Заметим, что ϑ— локально точная, а значит замкнутая 1-форма на M.

Далее,

$$d\tilde{\eta}=\tilde{\Omega}\Longleftrightarrow d(e^{-\sigma}\eta)=e^{-2\sigma}\Omega\Longleftrightarrow -e^{-\sigma}d\sigma\wedge\eta+e^{-\sigma}d\eta=e^{-2\sigma}\Omega\Longleftrightarrow$$

$$d\eta=d\sigma\wedge\eta+e^{-\sigma}\Omega. \tag{2}$$

2. Структурные уравнения

Выведем 1-ую группу структурных уравнений $\mathcal{LCK}$- многообразий.

Общий вид структурных уравнений $\mathcal{AC}$-структуры на пространстве присоединенной G- структуры таков [3]:

$$\begin{cases} d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b, \\ d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_a{}^c{}_b\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b, \\ d\omega = C_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + C^{ab}\omega_a \wedge \omega_b + C^a_b\omega^b \wedge \omega_a + C_a\omega \wedge \omega^a + C^a\omega \wedge \omega_a. \end{cases}$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\omega^i_j\}$—компоненты форм смещения и римановой связности соответственно,

$$\omega = \omega_0, \omega_a = \omega^{\hat{a}}, B^{abc} = \frac{i}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}, B^{ab} = \frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},0} - i\Phi^a_{0,\hat{b}},$$

$$B_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}, B_{ab} = -\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} + i\Phi^{\hat{a}}_{0,b},$$

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}, B_a{}^c{}_b = \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}, C_a = i\Phi^0_{a,0} B^a{}_b = i\Phi^a_{0,b}, B_a{}^b = -i\Phi^{\hat{a}}_{0,b}, C^a = -i\Phi^0_{\hat{a},0},$$

$$C_{ab} = -i\Phi^0_{[a,b]}, C^{ab} = i\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]}, C^a_b = -i\Phi^0_{b,\hat{a}} - i\Phi^0_{\hat{a},b},$$

$\Phi^i_{j,k}$— компоненты ковариантного дифференциала тензора Φ в римановой связности.

Известно [3], что на пространстве присоединенной G-структуры (т.е. в А-репере) $\Omega = -2i\omega^a \wedge \omega_a$. Подставив это равенство в равенство (1), получим:

$$(B^{ab}{}_c + 2\sigma^{[b}\delta^{a]}_c)\omega^c \wedge \omega_b \wedge \omega_a + B^{[abc]}\omega_b \wedge \omega_c \wedge \omega_a + (B^a{}_b + B_b{}^a - 2\sigma_0\delta^a_b)\omega \wedge \omega^b \wedge \omega_a +$$

$$(-B_a{}^c{}_b - 2\sigma_{[b}\delta^c_{a]})\omega^a \wedge \omega_c \wedge \omega^b - B_{[abc]}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c = 0,$$

где σ_i — компоненты формы $d\sigma, \sigma^a = \sigma_{\hat{a}}$.

В силу линейной независимости базисных форм ω^i получим

$$B^{[abc]} = B_{[abc]} = 0, B^a{}_b + B_b{}^a = 2\sigma_0\delta^a_b, B^{ab}{}_c = -2\sigma^{[b}\delta^{a]}_c.$$

Путем прямых вычислений имеем

$$B^a{}_b = (\sigma_0 - ie^{-\sigma})\delta^a_b, B_b{}^a = (\sigma_0 + ie^{-\sigma})\delta^a_b.$$

Используя равенство (2), находим :

$$C^{[ab]} = C_{[ab]} = 0, C^a_b = -2ie^{-\sigma}\delta^a_b, C_a = -\sigma_a, C^a = -\sigma^a.$$

Таким образом, 1-ая группа структурных уравнений $\mathcal{LCAS}$-многообразий имеет вид:

$$\begin{cases} d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a}\delta^{b]}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + (\sigma_0 - ie^{-\sigma})\delta^a_b\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b, \\ d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a}\delta^c_{b]}\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + (\sigma_0 + ie^{-\sigma})\delta^b_a\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b, \\ d\omega = -2ie^{-\sigma}\delta^a_b\omega^b \wedge \omega_a + \sigma_a\omega^a \wedge \omega + \sigma^a\omega_a \wedge \omega. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $M-\mathcal{LCAS}$- многообразие. Тогда если $B^{abc} = 0$, то многообразие M локально конформно многообразию келерова типа, а если $B^{ab} = 0$, то*

многообразие M локально конформно K-контактному многообразию.
Доказательство.
Пусть $\bigtriangledown$—исходная риманова связность метрики $g=<,>$, $\widetilde{\bigtriangledown}$— риманова связность метрики $\tilde{g}=e^{-2\sigma}g$.
Тогда $\widetilde{\bigtriangledown}_X Y-\bigtriangledown_X Y=T(X,Y)$— тензор аффинной деформации от $\bigtriangledown$ к $\widetilde{\bigtriangledown}$, имеющий вид $T^k_{ij}=-\sigma_i\delta^k_j-\sigma_j\delta^k_i+g_{ij}\sigma^k$.

Известно, что $d\Phi^i_j+\Phi^i_k\omega^k_j-\Phi^k_j\omega^i_k=\Phi^i_{j,k}\omega^k$ в исходной связности $\bigtriangledown$, $d\Phi^i_j+\Phi^i_k\widetilde{\omega}^k_j-\Phi^k_j\widetilde{\omega}^i_k=\widetilde{\Phi}^i_{j,k}\omega^k$ в связности $\widetilde{\bigtriangledown}$.
Так как $\widetilde{\omega}^i_j=\omega^i_j+T^i_{jk}\omega^k$, то

$$(d\Phi^i_j+\Phi^i_k\omega^k_j-\Phi^k_j\omega^i_k)+\Phi^i_kT^k_{jr}\omega^r-\Phi^k_jT^i_{kr}\omega^r=\widetilde{\Phi}^i_{j,k}\omega^k.$$

В силу линейной независимости базисных форм получим

$$\tilde{\Phi}^i_{j,r}=\Phi^i_{j,r}+\Phi^i_kT^k_{jr}-\Phi^k_jT^i_{kr}.$$

Так как $T^k_{ij}=-\sigma_i\delta^k_j-\sigma_j\delta^k_i+g_{ij}\sigma^k$, получим

$$\tilde{\Phi}^i_{j,r}=\Phi^i_{j,r}-\Phi^i_r\sigma_j+\Phi^i_k\sigma^k g_{jr}+\Phi^k_j\sigma_k\delta^i_r-\Phi^k_j\sigma^i g_{kr}.$$

Известно [3], что

$$\tilde{B}^{abc}=\frac{i}{2}\tilde{\Phi}^a_{[\hat{b},\hat{c}]}=\frac{i}{4}(\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},\hat{c}}-\tilde{\Phi}^a_{\hat{c},\hat{b}}),$$

$$\tilde{B}^{ab}=-\frac{i}{2}(\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},0}-2\tilde{\Phi}^a_{0,\hat{b}}).$$

Найдем $\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},\hat{c}}$, $\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},0}$ и $\tilde{\Phi}^a_{0,\hat{b}}$

$$\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},\hat{c}}=\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}-\Phi^a_{\hat{c}}\sigma_{\hat{b}}+\Phi^a_d\sigma^d g_{\hat{b}\hat{c}}+\Phi^{\hat{d}}_{\hat{b}}\sigma_{\hat{d}}\delta^a_{\hat{c}}-\Phi^k_{\hat{b}}\sigma^a g_{k\hat{c}}=\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}},$$

$$\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},0}=\Phi^a_{\hat{b},0}-\Phi^a_0\sigma_{\hat{b}}+\Phi^a_c\sigma^c g_{\hat{b}0}+\Phi^{\hat{d}}_{\hat{b}}\sigma_{\hat{d}}\delta^a_0-\Phi^0_{\hat{b}}\sigma^a=\Phi^a_{\hat{b},0},$$

$$\tilde{\Phi}^a_{0,\hat{b}}=\Phi^a_{0,\hat{b}}-\Phi^a_{\hat{b}}\sigma_0+\Phi^a_c\sigma^c g_{0\hat{b}}+\Phi^k_0\sigma_k\delta^a_{\hat{b}}-\Phi^b_0\sigma^a=\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}.$$

Следовательно $\tilde{B}^{abc}=B^{abc}$, $\tilde{B}^{ab}=B^{ab}$.

С другой стороны, известно,[2] что $\mathcal{AS}$-структура является структурой келерова типа тогда и только тогда, когда $\tilde{B}^{abc}=0$ и [5] является K-контактной структурой тогда и только тогда, когда $\tilde{B}^{ab}=0$. Теорема доказана.

Путем дифференциального продолжения структурных уравнений находим 2-ю группу структурных уравнений:

$$d\omega^a_b=\omega^a_c\wedge\omega^c_b+2e^{-2\sigma}\delta^a_b\omega^c\wedge\omega_c+A^a_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d+A^{ad}_{bc}\omega^c\wedge\omega_d+A^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d+$$
$$+A^a_{bc0}\omega^c\wedge\omega+A^{ac}_{b0}\omega_c\wedge\omega,$$

где $A^{acd}_b=B^{a[dc]}_{\ \ \ b}-B^{acd}{}_b-B^{a[d}_{\ \ h}B^{|h|c]}_{\ \ \ \ b}+B^{ahd}B_{h\ b}^{\ c}+B^{ach}B_{h\ b}^{\ d}$, $A^{ac}_{b0}=-B^{ac}_{\ \ b0}-B^{ac}_{\ \ b}\sigma_0-\sigma^c\delta^a_b(\sigma_0+ie^{-\sigma})-\sigma_{0\hat{c}}\delta^a_b-\sigma_0\sigma^c\delta^a_b$, $A^b_{acd}=-B_{a\ [dc]}^{\ b}+B_{acd}{}^b+B_{a\ [d}^{\ h}B_{|h|c]}^{\ \ \ \ b}-B_{ah[d}B^{hb}_{\ \ \ c]}-B_{a[c|h|}B^{hb}_{\ \ \ d]}$, $A^{[bd]}_{ac}=B_{a\ c}^{\ [bd]}+B_{a\ h}^{\ [b}B^{|h|d]}_{\ \ \ \ c}+2B_{ahc}B^{hbd}-2ie^{-\sigma}\sigma_0\delta^{[b}_a\delta^{d]}_c$, $A^b_{ac0}=B_{a\ c0}^{\ b}-\sigma_a\sigma_0\delta^b_c+\sigma_{0c}\delta^b_a+\sigma_c(\sigma_0-ie^{-\sigma})\delta^b_a$.

Примерами таких структур являются структуры, возникающие на пространстве главного тороидального расслоения над почти эрмитовыми многообразиями [1], а так же Сасакиево многообразие на нечетномерной сфере радиуса 1.

Определение 4. $\mathcal{LCAS}$ - многообразие назовем *обобщенным L-многообразием*, если $\forall X \in \mathcal{L} \Longrightarrow X(\sigma) = 0$.

Тождество $X(\sigma) = 0, X \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \sigma^a = 0, a = \overline{1, n}$.

Определение 5. $\mathcal{AC}$ - многообразие называется *нормальным* [4], если $2N + d\eta \otimes \xi = 0$, где

$$N(X,Y) = \frac{1}{4}\{[\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X,Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]\}$$

—тензор Нейенхейса структуры.

Нормальные $\mathcal{AC}$-структуры играют фундаментальную роль в контактной геометрии, они являются в известной мере контактным аналогом эрмитовых (т.е. интегрируемых) структур в эрмитовой геометрии и тесно с ними связаны.

Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Сасакиевы структуры являются контактным аналогом келеровых структур в эрмитовой геометрии и их изучению посвящено огромное количество публикаций [1].

Известно [3], что $\mathcal{AC}$-структура нормальна тогда и только тогда, когда $B^{abc} = 0, B^{ab} = 0, C^{ab} = 0, C^a = 0$.

В случае, если $\mathcal{AC}$-структура является $\mathcal{LCAS}$-структурой, эти условия примут вид: $B^{abc} = 0, B^{ab} = 0, \sigma^a = 0$. В этом случае условия нормальности преобразований структуры $\{\Phi, e^{\sigma}\xi, e^{-\sigma}\eta, e^{-2\sigma}g\}$ примут вид:

$$2N + d(e^{-\sigma}\eta) \otimes e^{\sigma}\xi = 0,$$

т.е.

$$2N - e^{-\sigma} d\sigma \wedge \eta \otimes e^{\sigma}\xi + e^{-\sigma} d\eta \otimes e^{\sigma}\xi = 0$$

т.е. $d\sigma \wedge \eta = 0$, что равносильно соотношению $\sigma^a = 0$ и, таким образом, преобразованная структура автоматически нормальна, а значит, и сасакиева.

Обратно, если $\mathcal{LCAS}$-структура локально конформно сасакиева и $d\sigma \parallel \eta$, то она нормальна.

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 3. Пусть D—$\mathcal{LCAS}$-структура. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) D—нормальная $\mathcal{AC}$-структура,

2) D локально конформно сасакиева структура и $X(\sigma) = 0, X \in \mathcal{L}$.$\square$

3. Полусимметрическая связность

Определение 6. Связность $\overset{\approx}{\nabla}$ на M называется *полусимметрической*, если ее тензор кручения S имеет вид [6]:

1)$S(X,Y) = (\tau)(X)Y - (\tau)(Y)X$, где $\tau \in \Lambda_1(M)$ — дифференциальная 1-форма на M,

2) $\overset{\approx}{\nabla} g = 0$.

(3)

В частности, если $\tau = 0$, то $\tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}$—риманова связность.

Теорема 4. Пусть $\tau \in \Lambda_1(M)$ — произвольная дифференциальная 1-форма на M, тогда существует и при том только одна полусимметрическая связность на M, для которой выполняются соотношения (3) $\square$.

Доказательство. Пусть T—тензор типа (2,1) аффинной деформации связности ∇ и $\tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}$, то есть

$$\tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X Y = \nabla_X Y + T(X, Y). \tag{4}$$

Согласно (3)

$$\tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X Y - \tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_Y X - [X, Y] = \tau(X)Y - \tau(Y)X.$$

С учетом (4), имеем

$$S(X, Y) = \tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X Y - \tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_Y X - [X, Y] =$$

$$= \nabla_X Y + T(X, Y) - \nabla_Y X - T(Y, X) - [X, Y] = \tau(X)Y - \tau(Y)X,$$

то есть

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) + T(X, Y) - T(Y, X) = \tau(X)Y - \tau(Y)X$$

и так как ∇—риманова связность, имеем

$$T(X, Y) - T(Y, X) = \tau(X)Y - \tau(Y)X. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$\tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X(g)(Y, Z) = 0,$$

следовательно

$$\tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X(g(Y, Z)) = g(\tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_Y Y, Z) + g(Y, \tilde{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X Z).$$

С учетом (4), имеем

$$X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = g(T(X, Y), Z) + g(Y, T(X, Z)).$$

Так как $\nabla g = 0$, имеем

$$g(T(X, Y), Z) + g(Y, T(X, Z)) = 0$$

или

$$< T(X, Y), Z > + < Y, T(X, Z) >= 0. \tag{6}$$

Сделаем замену $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X$

$$< T(Y, Z), X > + < Z, T(Y, X) >= 0. \tag{7}$$

Сделаем замену $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X$

$$< T(Z, X), Y > + < X, T(Z, Y) >= 0. \tag{8}$$

Почленно сложим тождества (6) и (7) и почленно вычтем тождество (8):

$$< T(X,Y) + T(Y,X), Z > + < T(Y,Z) - T(Z,Y), X > +$$

$$+ < T(X,Z) - T(Z,X), Y >= 0$$

С учетом (8), имеем

$$< T(X,Y) + T(Y,X), Z > + < \tau(Y)Z - \tau(Z)Y, X > + < \tau(X)Z - \tau(Z)X, Y >= 0$$

или

$$< T(X,Y) + T(Y,X), Z >= -\tau(X) < Y, Z > +\tau(Z) < X, Y > -$$

$$-\tau(Y) < Z, X > +\tau(Z) < Y, X >$$

Умножим равенство (5) на Z, имеем

$$< T(X,Y) - T(Y,X), Z >= \tau(X) < Y, Z > -\tau(Y) < X, Z >$$

Складывая два последних равенства, получим

$$< T(X,Y), Z >= \tau(Z) < X, Y > -\tau(Y) < X, Z >, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Таким образом,

$$T(X,Y) = -\tau(Y)X + < X, Y > \tau^\sharp,$$

где $\tau^\sharp$-вектор, дуальный 1-форме τ. Обратно, пусть

$$T(X,Y) = -\tau(Y)X + < X, Y > \tau^\sharp \Longleftrightarrow$$

Тогда в связности $\overset{\approx}{\nabla} = \nabla + T$ имеем
1)$\overset{\approx}{\nabla} g = 0$,
2)$S(X,Y) = T(X,Y) - T(Y,X) = -\tau(Y)X + < X, Y > \tau^\sharp + \tau(X)Y - < Y, X > \tau^\sharp = \tau(X)Y - \tau(Y)X$. Теорема доказана.

Для $\mathcal{LCAS}$-многообразия канонически определена полусимметрическая связность:

$$\overset{\approx}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - (d\sigma)(Y)X + < X, Y > grad(\sigma).$$

Назовем ее *второй канонической связностью.*

Пусть $\widetilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \overset{\approx}{\omega}{}^0_0 & \overset{\approx}{\omega}{}^a_0 & \overset{\approx}{\omega}{}^{\hat{a}}_0 \\ \overset{\approx}{\omega}{}^0_b & \overset{\approx}{\omega}{}^a_b & \overset{\approx}{\omega}{}^{\hat{a}}_b \\ \overset{\approx}{\omega}{}^0_{\hat{b}} & \overset{\approx}{\omega}{}^a_{\hat{b}} & \overset{\approx}{\omega}{}^{\hat{a}}_{\hat{b}} \end{pmatrix}$ — форма 2-ой канонической связности метрики g, где

$$\overset{\approx}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j - T^i_{kj}\omega^k, \Phi^a_{b,k} = 0, \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0, \Phi^0_{0,k} = 0,$$

$$\omega^a_{\hat{b}} = -\frac{1}{2} i\Phi^a_{\hat{b},k}\omega^k, \omega^{\hat{a}}_b = \frac{1}{2} i\Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k, \omega^a_0 = -i\Phi^a_{0,k}\omega^k,$$

$$\omega^{\hat{a}}_0 = i\Phi^{\hat{a}}_{0,k}\omega^k, \omega^0_b = i\Phi^0_{b,k}\omega^k, \omega^0_{\hat{b}} = -i\Phi^0_{\hat{b},k}\omega^k.$$

Вычислим компоненты формы $\{\widetilde{\widetilde{\omega}}^i_j\}$ 2-ой канонической связности. Для этого запишем компоненты тензора аффинной деформации на пространстве расслоения реперов:

$$T^i_{jk} = -\sigma_k \delta^i_j + g_{jk}\sigma^i.$$

Следовательно $T^0_{0c} = -\sigma_c, T^0_{0\hat{c}} = -\sigma^c, T^0_{\hat{b}c} = T^0_{c\hat{b}} = \sigma_0 \delta^b_c, T^a_{00} = \sigma^a, T^a_{b0} = -\delta^a_b \sigma_0$, $T^a_{bc} = -\delta^a_b \sigma_c, T^a_{b\hat{c}} = \delta^c_b \sigma^a - \delta^a_b \sigma^c, T^a_{\hat{b}c} = \delta^b_c \sigma^a, T^{\hat{a}}_{00} = \sigma_a, T^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} = -\delta^b_a \sigma^c, T^{\hat{a}}_{\hat{b}c} = \delta^b_c \sigma_a - \delta^b_a \sigma_c, T^{\hat{a}}_{b\hat{c}} = \delta^c_b \sigma_a, T^{\hat{a}}_{\hat{b}0} = -\delta^b_a \sigma_0$.

Таким образом, имеем:

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}^i_j = \omega^i_j - T^i_{kj}\omega^k$$

или $\widetilde{\widetilde{\omega}}^0_0 = 0, \widetilde{\widetilde{\omega}}^0_a = ie^{-\sigma}\omega_a, \widetilde{\widetilde{\omega}}^0_{\hat{a}} = -ie^{-\sigma}\omega^a, \widetilde{\widetilde{\omega}}^a_0 = ie^{-\sigma}\omega^a, \widetilde{\widetilde{\omega}}^{\hat{a}}_0 = -ie^{-\sigma}\omega_a, \widetilde{\widetilde{\omega}}^a_b = \omega^a_b + \sigma_b\omega^a - \sigma^a\omega_b, \widetilde{\widetilde{\omega}}^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -\omega^b_a - \sigma_a\omega^b + \sigma^b\omega_a, \widetilde{\widetilde{\omega}}^a_{\hat{b}} = 2B^{cab}\omega_c, \widetilde{\widetilde{\omega}}^{\hat{a}}_b = 2B_{cab}\omega^c$.

4. Тензор кручения

Вычислим компоненты тензора S кручения этой связности на пространстве присоединенной G- структуры. Согласно (3), $S(X,Y) = (d\sigma)(X)Y - (d\sigma)(Y)X$ или

$$S^k_{ij} = \sigma_i \delta^k_j - \sigma_j \delta^k_i.$$

Таким образом

$$S^a_{b0} = -\sigma_0 \delta^a_b, S^a_{b\hat{c}} = -\sigma^c \delta^a_b, S^a_{bc} = 2\sigma_{[b}\delta^a_{c]}, S^0_{b0} = \sigma_b, S^a_{\hat{b}0} = S^a_{\hat{b}\hat{c}} = S^0_{bc} = S^0_{\hat{b}c} = 0.$$

Поскольку S— тензор типа (2,1) его компоненты $\{S^i_{jk}\}$, как функции на пространстве главного расслоения всех комплексных реперов многообразия M, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$dS^i_{jk} + S^i_{mk}\widetilde{\widetilde{\omega}}^m_j + S^i_{jm}\widetilde{\widetilde{\omega}}^m_k - S^m_{jk}\widetilde{\widetilde{\omega}}^i_m = S^i_{jk|m}\omega^m,$$

причем верно и обратное [1]. Отсюда, легко вывести, что уравнениям такого же вида удовлетворяют и следующие группы его компонент $S_1 = \{S^a_{bc}; S^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}}\}, S_2 = \{S^0_{bc}; S^0_{\hat{b}\hat{c}}\}, S_3 = \{S^a_{\hat{b}c}; S^{\hat{a}}_{b\hat{c}}\}, S_4 = \{S^0_{0b}; S^0_{0\hat{b}}\}, S_5 = \{S^a_{\hat{b}\hat{c}}; S^{\hat{a}}_{bc}\}, S_6 = \{S^a_{0\hat{b}}; S^{\hat{a}}_{0b}\}, S_7 = \{S^0_{b\hat{c}}; S^0_{\hat{a}b}\}$, $S_8 = \{S^a_{0b}; S^{\hat{a}}_{0\hat{b}}\}$. И, таким образом, они служат компонентами вещественных тензоров, которые мы будем обозначать теми же символами и называть элементами спектра тензора S [1].

Выясним геометрический смысл обращения в нуль тензора S_2.

$$S^0_{bc} = 0 \Longleftrightarrow S(\pi e_b, \pi e_c)^0 = 0$$

или

$$mS((\Phi^2 + i\Phi)e_b, (\Phi^2 + i\Phi)e_c) = 0.$$

Раскрывая скобки, в силу линейности тензора S получим:

$$mS(\Phi^2 e_b, \Phi^2 e_c) - mS(\Phi e_b, \Phi e_c) + imS(\Phi^2 e_b, \Phi e_c) + imS(\Phi e_b, \Phi^2 e_c) = 0.$$

Приравняем действительную и мнимую части этого равенства к нулю:

$$1) mS(\Phi^2 e_b, \Phi^2 e_c) - mS(\Phi e_b, \Phi e_c) = 0,$$

$$2) mS(\Phi^2 e_b, \Phi e_c) + mS(\Phi e_b, \Phi^2 e_c) = 0.$$

Очевидно, это два эквивалентных равенства.
Первое равенство равносильно тождеству:

$$mS(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) - mS(\Phi X, \Phi Y) = 0, X, Y \in \mathcal{L}$$

или

$$mS(\Phi^3 X, \Phi^3 Y) - mS(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) = 0, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

С учетом того, что $\Phi^3 = -\Phi$ и $m = \eta \otimes \xi$, имеем:

$$\eta \circ S(\Phi X, \Phi Y) - \eta \circ S(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) = 0, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Очевидно, верно и обратное.
Аналогичным образом получим

$$S^{\hat{a}}_{bc} = 0 \Longleftrightarrow -\Phi^2 S(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) + \Phi^2 S(\Phi X, \Phi Y) - \Phi S(\Phi^2 X, \Phi Y) - \Phi S(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0,$$

$$S^{a}_{\hat{b}0} = 0 \Longleftrightarrow \Phi^2 S(\Phi^2 X, \xi) + \Phi S(\Phi X, \xi) = 0,$$

$$S^{0}_{b\hat{c}} = 0 \Longleftrightarrow \eta \circ S(\Phi X, \Phi Y) = 0, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 5. Тензор S кручения 2-ой канонической связности локально конформно K-контактного многообразия M удовлетворяет любому из тождеств:

$$\eta \circ S(\Phi X, \Phi Y) = 0,$$

$$\Phi^2 S(\Phi^2 X, \xi) + \Phi S(\Phi X, \xi) = 0,$$

$$-\Phi^2 S(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) + \Phi^2 S(\Phi X, \Phi Y) - \Phi S(\Phi^2 X, \Phi Y) - \Phi S(\Phi X, \Phi^2 Y) =$$
$$= 0, X, Y \in \mathcal{X}(M). \square$$

Выясним геометрический смысл обращения в нуль тензора S_1.
Пусть $S^a_{bc} = 0 \Longleftrightarrow 2\sigma_{[c}\delta^a_{b]} = 0 \Longleftrightarrow \sigma_c \delta^a_b = \sigma_b \delta^a_c$.
Свернем последнее равенство по индексам a и b: $\sigma_c \delta^b_b = \sigma_b \delta^b_c \Longleftrightarrow (n-1)\sigma_c = 0 \Longleftrightarrow \sigma_c = 0$, если $n \neq 1$.

С другой стороны,

$$S^a_{bc} = 0 \Longleftrightarrow -\Phi^2 S(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) + \Phi^2 S(\Phi X, \Phi Y) = 0, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Аналогичным образом получим

$$S^a_{b\hat{c}} = 0 \Longleftrightarrow \Phi^2 S(\Phi X, \Phi Y) - \Phi S(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0,$$

$$S^0_{0b} = 0 \Longleftrightarrow \eta \circ S(\xi, \Phi X) = 0, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 6. Следующие условия эквивалентны:
1)LCK-многообразие M локально конформно обобщенному L-многообразию,
2)тензор S кручения 2-ой канонической связности удовлетворяет любому из тождеств:

$$\Phi S(\Phi^2 X, \Phi Y) + \Phi S(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0,$$

$$\Phi^2 S(\Phi X, \Phi Y) - \Phi S(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0,$$

$$\eta \circ S(\xi, \Phi X) = 0, X, Y \in \mathcal{X}(M).\square$$

Выясним смысл обращения в нуль тензора S_8.

$$S^a_{b0} = 0 \Longleftrightarrow \sigma_0 = 0 \Longleftrightarrow d\sigma(\varepsilon_0) = 0 \Longleftrightarrow d\sigma(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \xi(\sigma) = 0 \Longleftrightarrow$$

функция σ постоянна вдоль интегральных линий поля ξ.
С другой стороны

$$S^a_{b0} = 0 \Longleftrightarrow -\Phi^2 S(\Phi^2 X, \xi) + \Phi S(\Phi X, \xi) = 0, X \in \mathcal{X}(M).$$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 7. Следующие условия эквивалентны:
1)определяющая функция конформного преобразования исходной структуры в $\mathcal{AC}$-структуру является первым интегралом поля характеристического вектора,
2)тензор S кручения 2-ой канонической связности локально конформно K-контактного многообразия M удовлетворяет тождеству:

$$-\Phi^2 S(\Phi^2 X, \xi) + \Phi S(\Phi X, \xi) = 0, X \in \mathcal{X}(M).\square$$

5. Тензор кривизны

Вычислим компоненты тензора R кривизны этой связности на пространстве присоединенной G- структуры. Согласно [3],

$$d\widetilde{\widetilde{\omega}}^i_j = \widetilde{\widetilde{\omega}}^i_k \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}}^k_j + \frac{1}{2} R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, i, j, k, l = \overline{0, 2n}.$$

Пусть $i, j = 0$, тогда

$$d\widetilde{\widetilde{\omega}}^0_0 = \widetilde{\widetilde{\omega}}^0_k \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}}^k_0 + \frac{1}{2} R^0_{0kl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

Подставляем значения $\widetilde{\widetilde{\omega}}^i_j$ и в силу линейной независимости базисных форм, имеем

$$R^0_{0cd} = R^0_{0\hat{c}\hat{d}} = R^0_{0c\hat{d}} = R^0_{0c0} = R^0_{0\hat{c}0} = 0.$$

Пусть $i = 0, j = a$, тогда

$$d\widetilde{\widetilde{\omega}}^0_a = \widetilde{\widetilde{\omega}}^0_b \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}}^b_a + \widetilde{\widetilde{\omega}}^0_{\hat{b}} \wedge \widetilde{\widetilde{\omega}}^{\hat{b}}_a + \frac{1}{2} R^0_{akl}\omega^k \wedge \omega^l$$

или

$$d(ie^{-\sigma}\omega_a) = ie^{-\sigma}\omega_b \wedge (\omega^b_a + \sigma_a\omega^b - \sigma^b\omega_a) - ie^{-\sigma}\omega^b \wedge (2B_{cba}\omega^c) + R^0_{ac0}\omega^c \wedge \omega + R^0_{a\hat{c}0}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega +$$

$$+R^0_{ac\hat{d}}\omega^c \wedge \omega^{\hat{d}} + \frac{1}{2}R^0_{acd}\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}R^0_{a\hat{c}\hat{d}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}}.$$

В силу линейной независимости базисных форм, имеем

$$R^0_{ac0} = R^0_{ac\hat{d}} = R^0_{a\hat{c}\hat{d}} = 0, R^0_{a\hat{c}0} = e^{-2\sigma}\delta^c_a, R^0_{acd} = -4ie^{-\sigma}B_{adc}.$$

Пусть $i = a, j = \hat{b}$, тогда

$$d\tilde{\tilde{\omega}}^a_{\hat{b}} = \tilde{\tilde{\omega}}^a_0 \wedge \tilde{\tilde{\omega}}^0_{\hat{b}} + \tilde{\tilde{\omega}}^a_c \wedge \tilde{\tilde{\omega}}^c_{\hat{b}} + \tilde{\tilde{\omega}}^a_{\hat{c}} \wedge \tilde{\tilde{\omega}}^{\hat{c}}_{\hat{b}} + \frac{1}{2}R^a_{\hat{b}kl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

Аналогичным образом получим

$$R^a_{\hat{b}\hat{c}0} = 4ie^{-\sigma}B^{cab}, R^a_{\hat{b}c0} = 0, R^a_{\hat{b}c\hat{d}} =$$

$$= 2B^{dab}{}_c + 2B^{dab}\sigma_c - 2B^{hab}\sigma_h\delta^d_c - 2B^{dhb}\sigma_h\delta^a_c - 2B^{dah}\sigma_h\delta^b_c,$$

$$R^a_{\hat{b}cd} = -4B^{hac}B_{hdc} - 2ie^{-2\sigma}\delta^a_{[c}\delta^b_{d]}, R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = -4B^{[c|ab|d]} + 4B^{[dc]b}\sigma^a + 4B^{[d|a|c]}\sigma^b.$$

Поскольку R— тензор типа (3,1) его компоненты $\{R^i_{jkl}\}$, как функции на пространстве главного расслоения всех комплексных реперов многообразия M, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$dR^i_{jkl} + R^i_{mkl}\tilde{\tilde{\omega}}^m_j + R^i_{jml}\tilde{\tilde{\omega}}^m_k + R^i_{jkl}\tilde{\tilde{\omega}}^m_l - R^m_{jkl}\tilde{\tilde{\omega}}^i_m = R^i_{jkl,m}\omega^m,$$

причем верно и обратное [1]. Отсюда, легко вывести, что уравнениям такого же вида удовлетворяют и группы его компонент, мы рассмотрим некоторые из них: $R_1 = \{R^0_{0cd}; R^0_{0\hat{c}\hat{d}}\}, R_2 = \{R^0_{0c\hat{d}}; R^0_{0\hat{c}d}\}, R_3 = \{R^0_{00\hat{d}}; R^0_{00d}\}, R_4 = \{R^0_{bc\hat{d}}; R^0_{\hat{b}\hat{c}d}\}, R_5 = \{R^0_{b\hat{c}\hat{d}}; R^0_{\hat{b}cd}\}, R_6 = \{R^a_{\hat{b}c\hat{d}}; R^{\hat{a}}_{b\hat{c}d}\}, R_7 = \{R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}; R^{\hat{a}}_{bcd}\}, R_8 = \{R^0_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}; R^0_{bcd}\}, R_9 = \{R^a_{\hat{b}0\hat{d}}; R^{\hat{a}}_{b0d}\}, R_{10} = \{R^a_{\hat{b}0d}; R^{\hat{a}}_{b0\hat{d}}\}, R_{11} = \{R^0_{\hat{b}0\hat{d}}; R^0_{b0d}\}$.

И, таким образом, они служат компонентами вещественных тензоров, которые мы будем обозначать теми же символами и называть *элементами спектра* тензора R [1].

Выясним геометрический смысл обращения в нуль тензора R_1.

$$R^0_{0cd} = 0 \Longleftrightarrow (R(\pi e_c, \pi e_d)\xi)^0 = 0$$

или

$$mR((\Phi^2 + i\Phi)e_c, (\Phi^2 + i\Phi)e_d)\xi = 0.$$

Раскрывая скобки, в силу линейности тензора R получим:

$$mR(\Phi^2 e_c, \Phi^2 e_d)\xi + mR(i\Phi e_c, i\Phi e_d)\xi + mR(\Phi^2 e_c, i\Phi e_d)\xi + mR(i\Phi e_c, \Phi^2 e_d)\xi = 0.$$

Приравняем действительную и мнимую части этого равенства к нулю:

$$1) mR(\Phi^2 e_c, \Phi^2 e_d)\xi - mR(\Phi e_c, \Phi e_d)\xi = 0,$$

$$2) mR(\Phi^2 e_c, \Phi e_d)\xi + mR(\Phi e_c, \Phi^2 e_d)\xi = 0.$$

Очевидно, это два эквивалентных равенства.
Первое равенство равносильно тождеству:

$$mR(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\xi - mR(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0, X, Y \in \mathcal{L}$$

или
$$mR(\Phi^4X,\Phi^4Y)\xi - mR(\Phi^3X,\Phi^3Y)\xi = 0, X,Y\in\mathcal{X}(M).$$
С учетом того, что $\Phi^3=-\Phi$ и $m=\eta\otimes\xi$, имеем:
$$\eta\circ R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\xi - \eta\circ R(\Phi X,\Phi Y)\xi = 0, X,Y\in\mathcal{X}(M).$$

Аналогичным образом получим
$$R^0_{0c\hat{d}}=0 \Longleftrightarrow \eta\circ R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\xi=0,$$
$$R^0_{0c0}=0 \Longleftrightarrow \eta\circ R(\Phi^2X,\xi)\xi=0,$$
$$R^0_{ac\hat{d}}=0 \Longleftrightarrow \eta\circ R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z+\eta\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z+$$
$$+\eta\circ R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z-\eta\circ R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z=0,$$
$$R^0_{a\hat{c}\hat{d}}=0 \Longleftrightarrow -\eta\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z+\eta\circ R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z=0,$$
$$R^a_{\hat{b}c0}=0 \Longleftrightarrow \Phi^2R(\Phi^2X,\xi)\Phi^2Z+\Phi^2R(\Phi X,\xi)\Phi Z+\Phi R(\Phi^2X,\xi)\Phi Z-$$
$$-\Phi R(\Phi X,\xi)\Phi^2Z=0,$$
$$R^0_{ac0}=0 \Longleftrightarrow \eta\circ R(\Phi^2X,\xi)\Phi^2Z-\eta\circ R(\Phi X,\xi)\Phi Z=0, X,Y,Z\in\mathcal{X}(M).$$
Таким образом, доказана теорема:

Теорема 8. Тензор R кривизны 2-ой канонической связности локально конформно K-контактного многообразия удовлетворяет любому из тождеств:
$$\eta\circ R(\Phi X,\Phi Y)\xi=0,$$
$$\eta\circ R(\Phi^2X,\xi)\xi=0,$$
$$\eta\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z-\eta\circ R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z=0,$$
$$\Phi^2R(\Phi^2X,\xi)\Phi^2Z+\Phi^2R(\Phi X,\xi)\Phi Z+\Phi R(\Phi^2X,\xi)\Phi Z-\Phi R(\Phi X,\xi)\Phi^2Z=0,$$
$$\eta\circ R(\Phi^2X,\xi)\Phi^2Z-\eta\circ R(\Phi X,\xi)\Phi Z=0, X,Y,Z\in\mathcal{X}(M).\square$$
Выясним геометрический смысл обращения в нуль тензора R_8.
$$R^0_{bcd}=0 \Longleftrightarrow B_{bcd}=0$$
С другой стороны
$$R^0_{bcd}=0 \Longleftrightarrow \eta\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z+2\eta\circ R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z+\eta\circ R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z=$$
$$=0, X,Y,Z\in\mathcal{X}(M).$$

Аналогичным образом получим
$$R^a_{\hat{b}\hat{c}0}=0 \Longleftrightarrow \Phi^2R(\Phi^2X,\xi)\Phi^2Z+\Phi R(\Phi^2X,\xi)\Phi Z=0,$$
$$R^a_{\hat{b}c\hat{d}}=0 \Longleftrightarrow \Phi^2R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z+$$
$$+\Phi^2R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z+\Phi R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi^2Z-\Phi R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi^2Z-$$

$$-\Phi^2R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z+\Phi^2R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z+\Phi R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi Z+\Phi R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z=0,$$

$$R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}=0\Longleftrightarrow\Phi^2R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z+\Phi^2R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z-$$

$$-\Phi R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi^2Z+\Phi R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z=0,$$

$$X,Y,Z\in\mathcal{X}(M).$$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 9. Следующие условия эквивалентны:
1)LCK-многообразие M локально конформно многообразию келерова типа,
2) тензор R кривизны 2-ой канонической связности удовлетворяет любому из тождеств:

$$\eta\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z+2\eta\circ R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z+\eta\circ R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z=0,$$

$$\Phi^2R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z+\Phi^2R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z-\Phi R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi^2Z+\Phi R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z=0,$$

$$\Phi^2R(\Phi^2X,\xi)\Phi^2Z+\Phi R(\Phi^2X,\xi)\Phi Z=0,X,Y,Z\in\mathcal{X}(M).\square$$

Список литературы

[1] Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М., 2003. МПГУ.

[2] Кириченко В.Ф. Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Известия Академии Наук СССР. Серия математическая. Т.48 1984. N4.С.711-734.

[3] Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Математический сборник. V.193. N.8. 2002. C.71-105.

[4] Blair D.E., The theory of quasi-Sasakian structures // I.J.Different. Geom., 1, №4, 331-345 (РЖМат, 1969, 5А513). 1967.

[5] Ермак Н.В. О геометрии K-контактных многообразий // Моск. пед. гос. ун-т - М., 1996-20с.-деп. в ВИНИТИ 19.09.1996 №2441-В96.

[6] Pandey P.N., Dubey Sudhit Rumar. Almost Grayan manifold admitting semi-symmetric metric connection // Tensor, N.S., Volume 65 (2004), p. 143-152.