УДК 62-50

МЕТОД ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Катулев А.Н., Кудинов А.Н., Малевинский М.Ф.
Кафедра математического моделирования

Поступила в редакцию 22.05.2008, после переработки 10.06.2008.

Изложен метод вычисления вероятностных характеристик нелинейной стохастической динамической системы, основанный на аппроксимации решения нелинейной стохастической системы параболических уравнений отрезком равномерно сходящегося обобщенного ряда Котельникова. Метод распространяется на любые законы распределения вероятностей случайных коэффициентов уравнений, для которых существуют математические ожидания, и приводит к высокой точности решения при учете меньшего количества узлов интерполяции по сравнению с известными методами.

In this article new method of estimation of probability characteristic of non-linear dynamical stochastic system is elaborated. Investigating system is described of differential equation with partial derivatives of second order. By modeling high efficiency of method is revealed.

Ключевые слова: нелинейная стохастическая система, метод, оценка, вероятностные характеристики, ряд, дифференциальное уравнение.
Keywords: non-linear stochastic system, method, estimate, probability characteristic, differential equation, series.

Введение

В качестве вероятностных характеристик случайного процесса на выходе динамической системы (объекта) с распределенными параметрами здесь рассматриваются: математическое ожидание, моменты высшего порядка и закон распределения вероятностей.

Необходимость вычисления вероятностных характеристик исходит из актуальной потребности анализа функционирования нелинейных стохастических динамических систем при их идентификации в реальных условиях без линеаризации уравнения состояния и замены случайных возмущений средними. Имеется достаточно большое число нелинейных стохастических динамических систем различного назначения, описываемых параболическими и гиперболическими уравнениями, для оценки характеристик качества функционирования которых хороших практических методов не имеется. При этом отметим, что все реальные динамические системы обладают конечной полосой пропускания частот, а значит случайные процессы на выходе стохастических систем должны быть представимы в частотной области финитными функциями. Это обстоятельство является принципиальным и обусловливает необходимость построения метода анализа нелинейных динамических систем в базисе функций Котельникова, в общем случае, обобщенных функций Котельникова [1,2].

Цель настоящей статьи заключается в получении расчетных соотношений для вычисления вероятностных характеристик случайного процесса с финитным спектром на выходе стохастической нелинейной динамической системы с распределенными параметрами.

К настоящему времени разработаны и широко используются различные приближенные методы: методы гармонической и статистической линеаризации [3], эквивалентных возмущений [3,4], интерполяционный метод [3,4], метод теории марковских процессов при условии, что исследуемое решение имеет неограниченный спектр [3], метод сведения исходной системы к стохастической системе типа Ито [5], статистических испытаний и имитационного моделирования [3] и метод разложения [6]. Однако эти методы, за исключением двух последних, непосредственно не применимы для анализа стохастических систем с распределенными параметрами, к тому же они разработаны без учета отмеченного выше обстоятельства. Анализ таких систем очень сложен. Так, в [6] подобную задачу предложено исследовать теретико-операторным методом при допущении её сведения к сумме линейной и нелинейной частей и представлении линейной части суммой детерминированной и стохастической компонент. Затем введено предположение о существовании для выделенных частей и компонент обратных операторов и на такой основе предложена итерационная схема построения обратного оператора для исходной задачи; в результате формируется приближенное решение с последующим определением его вероятностных характеристик с использованием классических приемов теории вероятностей. В [7] собраны воедино важные достижения последних лет в области анализа биологических моделей и нелинейной динамики; однако стохастические задачи по существу авторами не затронуты.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать нелинейную стохастическую динамическую систему с распределенными параметрами, представимую параболическими уравнениями с независимыми случайными коэффициентами и заданными начальными условиями, то есть представимую задачей Коши – задачей нахождения решения системы уравнений

$$\frac{\partial x_1(t,r)}{\partial t} - \lambda_3 \frac{\partial^2 x_1(t,r)}{\partial r^2} = \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2),$$

(1.1) $\frac{\partial x_2(t,r)}{\partial t} - \lambda_6 \frac{\partial^2 x_2(t,r)}{\partial r^2} = \varphi_2(\lambda_4, \lambda_5, x_1, x_2)$, удовлетворяющего начальным условиям $x_1(0,r) = x_1(r)$,$x_2(0,r) = x_2(r)$, где $t \in R^1$, $r \in R^1$, $r-$ пространственная переменная, коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6-$ независимые случайные величины с известными плотностями распределения вероятностей $f_s(\lambda_s), s = \overline{1,6}$, для которых существуют математические ожидания.

Заметим, что если система случайных величин будет коррелированной, то её известным линейным преобразованием [8] можно свести к некоррелированной, а если вместо случайных величин требуется учитывать случайные воздействия в виде стационарных или нестационарных процессов, то последние можно свести к системе независимых случайных величин каноническим или неканоническим преобразованием соответственно[4,9].

Очевидно, что искомые характеристики будут вычислены, если получено решение задачи Коши. В основу получения решения принимается следующая теорема о его аппроксимации.

Теорема. Пусть в задаче Коши (1.1) для нелинейной стохастической системы параболических уравнений функции $\varphi_1(\lambda_1,\lambda_2,x_1,x_2)$, $\varphi_2(\lambda_4,\lambda_5,x_1,x_2)$ непрерывны, ограничены при любых значениях λ_1, λ_2, и λ_4, λ_5и имеют ограниченные производные по переменной t в каждой полосе [0,T], T>0, $[0,T]\subset R^1$, начальные условия $x_1(r)$и$x_2(r)$– ограниченные функции с ограниченными производными, решение системы имеет финитный спектр.

Тогда исследуемая задача Коши имеет в классе функций $x_1(t,r)$, $x_2(t,r)$ при любых значениях r, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 из ограниченной области единственное непрерывное решение в каждой полосе [0,T], T>0 и аппроксимирующий его обобщенный ряд Котельникова

(1.2) $x_i(t,r,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_6)=$

$$=\sum_{k_1=-N_1,\dots,k_7=-N_7}^{N_1,\dots,N_7} x_i\left(t,\frac{k_1\pi}{\alpha_1},...,\frac{k_6\pi}{\alpha_6},\frac{k_7\pi}{\alpha_7}\right)\prod_{s=1}^{7}\left(\frac{\sin[\alpha_s(\lambda_s-(k_s\pi/\alpha_s))]}{\alpha_s(\lambda_s-(k_s\pi/\alpha_s))}\right)^{q_s}$$

где $i=1,2$, α_s, $s=\overline{1,\ 7}$,–граничные значения спектров функций $x_1(t,r)$, $x_2(t,r)$по аргументам λ_s, $s=\overline{1,6}$, и $r=\lambda_7$, $q_1,\dots,q_7$- заданные целые положительные числа, сходится равномерно в этой области. Доказательство теоремы в приложении.

Требуется построить метод вычисления вероятностных характеристик решения системы (1.1), описывающей функционирование нелинейной стохастической динамической системы с распределенными параметрами.

2. Решение параболической системы, вероятностные характеристики

Сведем задачу Коши (1.1) к системе стохастических дифференциальных уравнений с обыкновенными производными относительно переменной t– времени и пространственной переменной r. Для этого, воспользовавшись идеей метода коллокации [10], представим решение системы в виде

(2.1) $x_1(t,r,\lambda)=\sum\limits_{k_7=-N_7}^{N_7} a_{k_7}(t,\lambda)\psi_{k_7}(r), x_2(t,r,\lambda)=\sum\limits_{k_7=-N_7}^{N_7} b_{k_7}(t,\lambda)\psi_{k_7}(r)$,

где $\psi_{k_7}(r)$, $k_7=-N_7,N_7$ - координатные функции из (1.2),$\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_6)$, $a_{k_7}(t,\lambda)$, $b_{k_7}(t,\lambda)$ – функции, подлежащие вычислению; они непрерывны и непрерывно дифференцируемы, их производыне ограничены, непрерывно дифференцируемы, их производные ограничены.

В (2.1) сделаем замену переменной k_7 на $l=N_7+1+k_7$, $l=1,2,...,n=2N_7+1$. Положим

$$\varphi_1(\lambda_1,\lambda_2,x_1,x_2)=\lambda_1x_1(t,r)+\lambda_2x_1(t,r)x_2(t,r),$$

$$\varphi_2(\lambda_4, \lambda_5, x_1, x_2) = \lambda_4 x_2(t,r) + \lambda_5 x_1(t,r) x_2(t,r).$$

На координатной оси r введем сетку узлов r_l, $l=\overline{1,n}$; затем подставим функции $x_{1(2)}(t,r,\lambda)$ в исходные уравнения и из условия равенства левых и правых частей последних в выбранных узловых точках r_l, $l=\overline{1,n}$, получим систему из $2n$ нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с обыкновенными производными

$$\dot{a}_l(t,\lambda) = \lambda_1 a_l(t,\lambda) + \lambda_2 a_l(t,\lambda) b_l(t,\lambda) + \lambda_3 \sum_{i=1}^{n} a_i(t,\lambda) \frac{d^2\psi_i(r_l)}{dr^2},$$

(2.2) $\dot{b}_l(t,\lambda) = \lambda_4 b_l(t,\lambda) + \lambda_5 a_l(t,\lambda) b_l(t,\lambda) + \lambda_6 \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(t,\lambda) \frac{d^2\psi_i(r_l)}{dr^2}$, $l=\overline{1,n}$,

с непрерывно дифференцируемыми по t и ограниченными правыми частями.

Решение системы (2.2) должно отыскиваться при начальных условиях

(2.3) $a_l(0,\lambda) = x_1(r_l), \quad b_l(0,\lambda) = x_2(r_l)$

для каждого узла r_l; эта система соответствует исходной системе (1.1) и также представляет задачу Коши. Перепишем ее в таком виде

(2.4) $\dot{z}_i(t) = g_i(t, z_1, z_2, ..., z_{2n}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6)$, $i=\overline{1,2n}$

с начальными условиями $z_i(0)$, где $z_1, z_2, ..., z_{2n}-$ векторы фазовых координат $(a_l(t,\lambda),\ b_l(t,\lambda))$, $l=\overline{1,n}$, объекта, $z_i(t,\lambda) = a_l(t,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$; $z_i(t,\lambda) = b_l(t,\lambda)$, $i=\overline{n+1,2n}$, $g_i(t, z_1, z_2, ..., z_{2n}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6)-$нелинейные правые части уравнений системы (2.2).

Для каждой выборки значений случайных величин $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6$ система (2.4) становится детерминированной нелинейной системой с начальными условиями (2.3), то есть – классической задачей Коши для нелинейной системы (2.4). В соответствии с теоремой п.1 решение системы (2.4) при каждом i аппроксимируем отрезком обобщенного ряда Котельникова и запишем в виде

$$z_i(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) =$$
$$= \sum_{k_1=-N_1,...,k_6=-N_6}^{N_1,...,N_6} z_i(t, \frac{k_1\pi}{\alpha_1}, ..., \frac{k_6\pi}{\alpha_6}) \prod_{s=1}^{6} \left(\frac{\sin[\alpha_s(\lambda_s - (k_s\pi/\alpha_s))]}{\alpha_s(\lambda_s - (k_s\pi/\alpha_s))} \right)^{q_s},$$

где $z_i(t, k_1\pi/\alpha_1, ..., k_6\pi/\alpha_6)$, $i=\overline{1,2n}$, известные решения, полученные в результате интегрирования системы (2.4) при конкретных реализациях случайных величин $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6$, то есть при $\lambda_{1k_1} = k_1\pi/\alpha_1, ..., \lambda_{6k_6} = k_6\pi/\alpha_6$ как статистических узлов интерполирования $\lambda_1, ..., \lambda_6$.

Введем функцию $\Phi(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6)$ и также аппроксимируем ее отрезком обобщенного ряда Котельникова

(2.5) $\Phi(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) =$

$$= \sum_{k_1=-N_1,...,k_6=-N_6}^{N_1,...,N_6} \Phi(t, \tfrac{k_1\pi}{\alpha_1}, ..., \tfrac{k_6\pi}{\alpha_6}) \prod_{s=1}^{6} \left(\tfrac{\sin[\alpha_s(\lambda_s - (k_s\pi/\alpha_s))]}{\alpha_s(\lambda_s - (k_s\pi/\alpha_s))} \right)^{q_s}.$$

При отыскании искомого решения системы (2.4) будет использоваться выражение для математического ожидания $M[(t)] = M[\Phi(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6)]$ введенной функции; такое выражение имеет вид

(2.6) $M[(t)] =$

$$= \sum_{k_1=-N_1,...,k_6=-N_6}^{N_1,...,N_6} \Phi(t, \tfrac{k_1\pi}{\alpha_1}, ..., \tfrac{k_6\pi}{\alpha_6}) \prod_{s=1}^{6} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \tfrac{\sin[\alpha_s(\lambda_s - (k_s\pi/\alpha_s))]}{\alpha_s(\lambda_s - (k_s\pi/\alpha_s))} \}^{q_s} f_s(\lambda_s) d\lambda_s$$

где

(2.7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin[\alpha_s(\lambda_s-(k_s\pi/\alpha_s))]}{\alpha_s(\lambda_s-(k_s\pi/\alpha_s))} \right\}^{q_s} f_s(\lambda_s)d\lambda_s = \rho_{k_s q_S}$

числа Кристоффеля для обобщенного ряда Котельникова; которые в зависимости от вида выражения для $f_s(\lambda_s)$, $s=\overline{1,6}$, могут быть вычислены аналитически либо с помощью системы программирования *Mapl.*

Несобственные интегралы (2.7) существуют, так как функции $f_s(\lambda_s) \geq 0$ абсолютно интегрируемы в промежутке $(-\infty, +\infty)$, функции

$$\frac{\sin[\alpha_s(\lambda_s-(k_s\pi/\alpha_s))]}{\alpha_s(\lambda_s-(k_s\pi/\alpha_s))}$$

ограничены и, следовательно, произведения функций под знаком интеграла абсолютно интегрируемы в промежутке $(-\infty, +\infty)$ [13].

$M[(t)]$, вычисляемое по(2.6), также существует, если $f_s(\lambda_s)$, $s=\overline{1,6}$, имеет математическое ожидание; и $M[(t)]$, в силу доказанной в приложении теоремы п.1, сходится к математическому ожиданию аппроксимируемой функции, если оно существует; в противном случае вычисленное $M[(t)]$ понимается в смысле главного значения несобственного интеграла.

Теперь искомое решение в виде (2.6) для системы (2.4), или, что то же и для системы (2.2), выписывается достаточно просто: необходимо в (2.6) принять $\Phi(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) = z_i(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6)$, i =1, 2,. . . ,$2n$, а для расчета высших центральных моментов – положить $\Phi(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) = (z_i(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) - M[z_i(t)])^{\gamma}$, где $\gamma \geq 2$−порядок момента, и для расчета взаимных моментов $(\nu+\mu)$ порядка

$$\Phi(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) = (z_j(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) - M[z_j(t)])^{\nu}(z_k(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) - \\ - M[z_k(t)])^{\mu}, \quad j,k=\overline{1,2n}.$$

Тогда, очевидно, последние следует вычислять по выражению

$$K_{jk}^{\nu\mu} = \sum_{k=-N_1,\ldots,-N_6}^{N_1,\ldots,N_6} (z_j(t, \lambda_{1k_1}, \lambda_{2k_2}, ..., \lambda_{6k_6}) - M[z_j(t)])^{\nu}(z_k(t, \lambda_{1k_1}, \lambda_{2k_2}, ..., \lambda_{6k_6}) - \\ - M[z_k(t)])^{\mu} \prod_{s=1}^{6} \rho_{k_s q_s}.$$

Интегральный закон распределения вероятностей решения системы (2.4), или, или, что то же, для системы (2.2) записывается в виде [4]

(2.8) $P(z_i(t) \leq z_i) = \sum\limits_{k_1=-N_1,\ldots k_6=-N_6}^{N_1,\ldots,N_6} \frac{1}{2}[1 - \frac{z_i(t,k_1\pi/\alpha_1,\ldots,k_6\pi/\alpha_6)-z_i}{|z_i(t,k_1\pi/\alpha_1,\ldots,k_6\pi/\alpha_6)-z_i|}] \prod\limits_{s=1}^{6} \rho_{k_s q_s}$, $i=\overline{1,2n}$.

Итак, установлены расчетные соотношения для вероятностных характеристик случайных функций – решений системы (2.2) $a_l(t,\lambda)$, $b_l(t,\lambda)$, l =1,2,. . . ,n. По ним с учетом соотношений (2.1) можно вычислить вероятностные характеристики решений исходной системы (1.1), например, расчетные выражения для математических ожиданий имеют вид

$$M[x_1(t,r,\lambda)] = \sum_{l=1}^{n} M[a_l(t)]\psi_l(r), \quad M[x_2(t,r,\lambda)] = \sum_{l=1}^{n} M[b_l(t)]\psi_l(r),$$

а для дисперсий -

$$D[x_1(t,r,\lambda)] = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_j(r)\psi_i(r)K_{ij}^{1,1}(t),$$

$$D[x_2(t,r,\lambda)] = \sum_{i,j=n+1}^{2n} \psi_{j-n}(r)\psi_{i-n}(r)K_{ij}^{1,1}(t).$$

Отметим, что закон распределения вероятностей случайных координат (2.1), можно найти по формуле композиции законов распределения, зная (2.8).

3. Решение задач

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайного процесса на выходе стохастической динамической системы, описываемой уравнением из [4]

(3.1) $\dot{x}(t) = \sqrt{1-\lambda^2 x^2}$

с начальным условием x(t)=0, t=0; λ- случайная величина, распределенная по равномерному закону на отрезке [-0.5, 0.5].

Точное решение уравнения (3.1) при любом λ имеет вид $x(t) = (\sin\lambda t)/\lambda$ и оно есть функция с финитным спектром и граничной частотой $\lambda = t$, что непосредственно следует из преобразования Фурье

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{\lambda} e^{-j\omega\lambda} d\lambda = \begin{cases} 1\ /\ 2\ , \text{ если } |\omega| \le t, \\ 0, \text{ если } |\omega| > t. \end{cases}$$

Точные значения математического ожидания для процесса на выходе системы (3.1)

$$m(t)_{t=2} = \int_{-0.5}^{0.5} (\sin\lambda t)/\lambda d\lambda = 2\cdot Si(0.5t)_{t=2} = 1.8922,$$

где $Si(0.5t)$ - интегральный синус,

дисперсии $D(t)_{t=2} = \int_{-0.5}^{0.5} [(\sin\lambda t)/\lambda]^2 d\lambda - m^2(t)_{t=2} = 0.008937$ и среднеквадратического отклонения $\sigma(t)_{t=2} = \sqrt{D(2)} = 0.09453$.

Теперь получим искомое решение в форме математического ожидания $m(t)$ и дисперсии $D(t)$ фазовой координаты $x(t)$ на момент времени t=2 с использованием обобщенного ряда Котельникова. Для этого возьмем всего лишь один статистический узел $\lambda = 0$ и степень $q = 1$ для вычисления $m(2)$, и $q = 2$ для вычисления $D(2)$. При таких исходных данных имеем

$$x(t) = t \cdot (\sin \lambda t)/t\lambda = (\sin \lambda t)/\lambda, \quad m(t)_{t=2,q=1} = \int\limits_{-0.5}^{0.5} [(\sin \lambda 2)/\lambda] d\lambda = m(2),$$

а выражение для вычисления дисперсии записывается в виде
(3.2) $t^2[\sin \lambda t)/t\lambda]^2 = [(\sin 2\lambda)/\lambda]^2$.

Видно, что дисперсия по (3.2) рассчитывается точно; аналогичное относится и к среднеквадратическому отклонению. Если же расчеты математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения производить интерполяционным методом, как в [4], то приближение к точным результатам будет иметь место только при трех статистических узлах. Отсюда следует одно из преимуществ предложенного в статье метода.

Проиллюстрируем преимущества метода и при вычислении чисел Кристоффеля для следующих случаев:

1. Пусть q=1, а плотность распределения вероятностей случайной величины λ - равномерная на отрезке $a \leq \lambda \leq b$, то есть $f(\lambda) = 1\ /\ (b$ - $a)$, $\quad a \leq \lambda \leq b$; $\ f(\lambda) = 0,\ a > \lambda,\ \lambda > b$. Статистические узлы при расчете искомых чисел Кристоффеля задаются в виде $\lambda_k = k\pi/\alpha$, $k = -\overline{N, N}$, непосредственно по аргументам координатных функций обобщенного ряда Котельникова (2.5).

Соответствующее расчетное выражение имеет вид

$$\rho_{k,1} = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a} \frac{\sin[\alpha(\lambda - k\pi/\alpha)]}{\alpha(\lambda - k\pi/\alpha)} d\lambda = \frac{1}{b-a}[Si(\frac{b+k\pi}{\alpha}) - Si(\frac{a+k\pi}{\alpha})];$$

оно приводит к точному значению чисел Кристоффеля, тогда как в интерполяционном методе [4] требуется предварительно вычислить статистические узлы как корни ортогональных полиномов Лежандра или воспользоваться составленной в [4] таблицей. Однако таблица пригодна только для степени интерполяционного полинома не выше 16. Отметим, что аналогичное ограничение в [4] имеет место и при вычислении статистических узлов, когда случайные величины λ_s, $s = \overline{1, 6}$, подчинены нормальному и показательному законам, а таблиц вычисления статистических узлов, когда случайные величины распределены по другим законам, не имеется.

2. Случайная величина λ подчинена экспоненциальному закону с параметром a и начальными моментами $n-$го порядка $m_n = n!/a^n$. Тогда (2.7) преобразуется к виду
(3.3) $\rho_{k,q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\frac{\sin[\alpha(\lambda - k\pi/\alpha)]}{\alpha(\lambda - k\pi/\alpha} \right)^q_{|\lambda=0}$.

Здесь в отличие от интерполяционного метода [4] не требуется вычислять статистические узлы; производные вычисляются аналитически с помощью системы программирования *Mapl*, их значения убывают как $1/2nq$ с увеличением порядка n и степени q обобщенного ряда Котельникова; поэтому при вычислении чисел Кристоффеля можно ограничиться небольшим числом членов в выражении (3.3).

3. Случайная величина λ подчинена нормальному закону с математическим ожиданием m, дисперсией D и начальными моментами $n-$го порядка $m_n = \frac{n(n-1)}{2}$

$\int\limits_0^D m_{n-2}dD + m^n$, $n = 2, 3, \ldots$, $m_0 = 1$, $\quad m_1 = m$.

Тогда числа Кристоффеля рассчитываются также по формуле (3.3).

4. Случайная величина λ подчинена закону Коши $f(\lambda) = h/\pi(h^2 + \lambda^2)$, $-\infty < \lambda < \infty$, с характерической функцией $W(u) = \exp(-h\,|u|)$.

Числа Кристоффеля $\rho_{k,1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{k,1}(u)W(u)du$,

где

$$F_{k,1}(u) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\alpha(\lambda - k\pi/\alpha)]}{\alpha(\lambda - k\pi/\alpha)} e^{-ju\lambda}d\lambda = \begin{cases} (1/2\alpha)\exp\{-j(k\pi/\alpha)u\}, & |u| \le \alpha, \\ 0, |u| > \alpha. \end{cases}$$

$$(3.4) \quad \rho_{k,1} = \frac{2h}{\alpha(h^2 + (k\pi/\alpha)^2)}(1 - (-1)^k e^{-h\alpha}).$$

Получим выражение для математического ожидания процесса на выходе упрощенной динамической системы (1.1), представимой уравнениями

$$\partial x_1/\partial t = \partial x_2/\partial t = 0$$

с начальным условием $x_1(0, r) = x_2(0, r) = \lambda$. Решение таких уравнений имеет вид $x_1(t, r) = x_2(t, r) = \lambda$; аппроксимируем его рядом Котельникова $\lambda \approx \sum\limits_{k=-N}^{N} \frac{k\pi}{\alpha}\frac{\sin[\alpha(\lambda - r\pi/\alpha)]}{\alpha(\lambda - r\pi/\alpha)}$.

Теперь, воспользовавшись (2.6), имеем выражение $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda)d\lambda \approx \sum\limits_{k=-N}^{N} \frac{k\pi}{\alpha}\rho_{k1}$, где сумма ряда равна нулю, так какρ_{k1} согласно (3.4) – четная функция от k и $\rho_{01} = 0$, а функция $k\pi/\alpha$- нечетная. Несобственный интеграл в этом выражении существует в смысле главного значения, поскольку закон распределения Коши не имеет математического ожидания, и таким образом, искомое математическое ожидание процесса на выходе рассматриваемой стохастической динамической системы $\partial x_1/\partial t = \partial x_2/\partial t = 0$ представляется величиной, соответствующей главному значению несобственного интеграла.

4. Заключение

Из полученных результатов решений непосредственно следуют преимущества и высокая эффективность разработанного метода по сравнению с интерполяционным методом [3,4] и теоретико-операторным методом [6]:

- при применении обобщенного ряда Котельникова не требуется вычисление статистических узлов – они устанавливаются для (2.5) однозначно априори по выражениям $\lambda_{k_i} = k_i\pi/\alpha_i$, $-N_{k_i} \le k_i \le N_{k_i}$, $i = \overline{1, 6}$, для известных граничных частот α_i (аналогичным образом задаются узлы для (2.5) и по координате r), тогда как в интерполяционном методе [3,4] статистические узлы должны вычисляться как корни ортогональных полиномов с весами, равными плотностям распределений вероятностей случайных коэффициентов $\lambda_1, ..., \lambda_6$;

- при аппроксимации решения, имеющего финитный спектр, в базисе обобщенных функций Котельникова достигается максимальная точность вычисления вероятностных характеристик и закона распределения вероятностей при меньшем количестве узлов интерполирования по сравнению с интерполяционным методом [3,4], использующим полиномы Лагранжа. Это непосредственно следует из равномерной сходимости приближенного решения в базисе обобщенных функций Котельникова к истинному. В интерполяционном методе с использованием полиномов Лагранжа [3,4] обеспечивается только слабая в среднем сходимость, но такую сходимость влечет, как известно[11], равномерная (но не наоборот);

- метод решения и результаты исследования рассмотренной в статье задачи в отличие от [6] могут быть применены при практическом решении задач Коши для уравнений параболического и гиперболического типов.

Приложение. Доказательство теоремы п.1.

Сначала отметим, что согласно свойствам ряда Котельникова и функций с финитным спектром обобщенный ряд Котельникова также является функций с финитным спектром [12] и что формула (1.2) - точная при $N_i \to \infty$,

$$\lambda_1 = k_1\pi/\alpha_1, \quad \lambda_2 = k_2\pi/\alpha_2, \dots, \lambda_6 = k_6\pi/\alpha_6, \quad r = k_7\pi/\alpha_7,$$
$$-N_i \le k_i \le N_i, \ i = \overline{1,7}.$$

Существование, непрерывность и единственность решения установлены в [14, 15]. Справедливость утверждения о равномерном приближении решения $x_1(t, r, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6)$, $x_2(t, r, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6)$ к истинному в базисе обобщенных функций Котельникова нами доказана в [1,2], она непосредственно следует из стремления к нулю ошибки аппроксимации решения на конечных отрезках $r \in [-R, R]$, $\lambda_k \in [-\Lambda_k, \Lambda_k]$, $k = \overline{1,6}$, при неограниченном увеличении степеней $q_i, i = \overline{1,7}$,и количества членов обобщенного ряда Котельникова.

Список литературы

[1] Кудинов А.Н., Катулев А.Н., Малевинский М.Ф. Восстановление сигнала обобщенным рядом Котельникова.//Известия вузов. Радиофизика, Т. XLIX, №8, 2006. 712-717

[2] Кудинов А.Н., Катулев А.Н., Малевинский М.Ф.Математические методы оценки показателей безопасности состояния динамических систем. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2005.

[3] Астапов Ю.М., Медведев В.С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1982.

[4] Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления. М.: Машиностроение, 1968.

[5] Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СП-б: СПбГТУ, 2001.

[6] Адомиан Дж. Стохастические системы. М.: Мир, 1987.

[7] Гурли С.А., Соу Дж. В.-Х., Ву Дж. Х. Нелокальные уравнения реакции- диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика. // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 1, М.: МАИ, 2003. 84-120

[8] Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачи по теории вероятностей и математической статистике. Л-д, ЛГУ. 1967.

[9] Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Наука, 1957.

[10] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Гостехиздат, 1952.

[11] Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967.

[12] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[13] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Наука,1966.

[14] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976.

[15] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.