

МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

УДК 539.3

ВЫСОКОГРАДИЕНТНАЯ МНОГОПОЛЕВАЯ МИКРОПОЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ РЕШЕТКИ С АУКСЕТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Васильев А.А.*, Мирошниченко А.Е.**

*Кафедра математического моделирования

**Центр нелинейной физики, исследовательская школа физических и инженерных наук, Австралийский национальный университет, г. Канберра

Поступила в редакцию 05.09.2008, после переработки 19.09.2008.

Построена высокоградиентная многополевая микрополярная модель, обладающая ауксетическими свойствами решетки с частицами конечного размера. Дан сравнительный анализ динамических свойств дискретной и различных типов обобщенных континуальных моделей, построенных с использованием подходов высокоградиентной, микрополярной, многополевой механики и их комбинаций.

We derive higher-gradient multi-field micropolar model for auxetic lattice having finite size particles. Comparative analysis of dynamical properties of discrete and different types of generalized continuum models constructed by using higher-grade, micropolar, and multi-field approaches and their combinations is given.

Ключевые слова: ауксетическая решетка, плоские волновые решения, высокоградиентная многополевая микрополярная модель.

Keywords: auxetic lattice, plane wave solutions, higher-order multi-field micropolar model.

Введение

Континуальные модели эффективно используются для моделирования твердых деформируемых тел, составленных из большого количества структурных элементов. Классические модели отражают обобщенные макроскопические свойства моделируемых систем и применимы для описания широкого класса явлений в них. Однако разработка и применение перспективных в технологических приложениях материалов сложной структуры с необычными свойствами приводит к необходимости разработки обобщенных моделей, уточняющих классические модели для адекватного описания и учета тонких структурных эффектов.

Есть ряд подходов к уточнению моделей. В статье реализуется физический подход, базирующийся на анализе, оценке и дальнейшем отклонении или обобщении базовых гипотез классических теорий. Анализ и классификация обобщений классических теорий с такой точки зрения даны в [1], обзор моделей представлен, например, в [2, 6].

Одним из подходов, используемых для построения обобщенных моделей, является учет большего, чем в классических моделях, количества степеней свободы структурных элементов. В моделях Коссера и микрополярных моделях в дополнение к пространственным перемещениям вводятся поля вращений. Вращательные степени свободы элементов естественно появляются в балочных решетках, материалах с учетом конечного размера частиц. Другой подход к построению более адекватных моделей состоит в учете нелокальности, взаимодействий дальнего порядка. Учет в моделях градиентов полей более высокого, чем в классических моделях, порядка приводит к высокоградиентным моделям. Отмеченные два типа моделей для тел периодической структуры строятся на основе элементарной ячейки периодичности. Построение моделей на основе макроячейки, включающей несколько элементарных ячеек, с использованием увеличенного соответственно количества полей приводит к многополевым моделям. Необходимо отметить, что отмеченные гипотезы и подходы независимы и могут быть использованы как отдельно, так и в комбинациях. Разработка теории и исследование возможностей таких комплексных моделей представляет интерес и дается, в частности, в статье [7], сообщении авторов [5] на XXII Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике (Аделаида, 2008).

В настоящей статье строится высокоградиентное обобщение многополевой микрополярной модели ауксетической решетки, построенной и исследованной в статье [8], дается сравнение дискретной и различных обобщенных континуальных моделей.

1. Дискретная модель

Двухмерная структурная модель кристалла с ауксетическими свойствами, то есть кристалла, обладающего необычным свойством при растяжении расширяться в направлении поперечного растяжению, была предложена в статье [4]. В модели предполагается, что деформациями групп атомов кристалла можно пренебречь и рассматривать их как недеформируемые квадратные жесткие частицы, которые взаимодействуют так, как показано на рис. 1. Аналогичная модель для формирования материалов с ауксетическими свойствами была предложена в [3], где рассматривается подход для конструирования искусственного материала с отрицательным коэффициентом Пуассона на основе элементов квадратной формы.

В статье [9] построена дискретная и микрополярная математические модели такой системы. Геометрия системы задается двумя параметрами h и $A = (\sqrt{2}/2)a \sin \alpha$, где a и α - размер и угол ориентации частиц соответственно (рис. 1). Коэффициенты, характеризующие жесткости связей атомов в узлах частиц, центральные взаимодействия соседних частиц, сопротивление поворотам со стороны внешней среды обозначены C_1 , C_2 , c соответственно. Деформированное состояние характеризуется смещениями $u_{m,n}$, $v_{m,n}$ и углами поворотов $\varphi_{m,n}$ частиц. Частицы имеют массу M , момент инерции I .

Чтобы получить уравнения движения для p -й частицы, строится функция Лагранжа

$$L_p = \frac{1}{2}M\dot{u}_p^2 + \frac{1}{2}M\dot{v}_p^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_p^2 - \sum E_{(p,i)(q,j)} - \frac{1}{2}c\varphi_p^2, \quad (1)$$

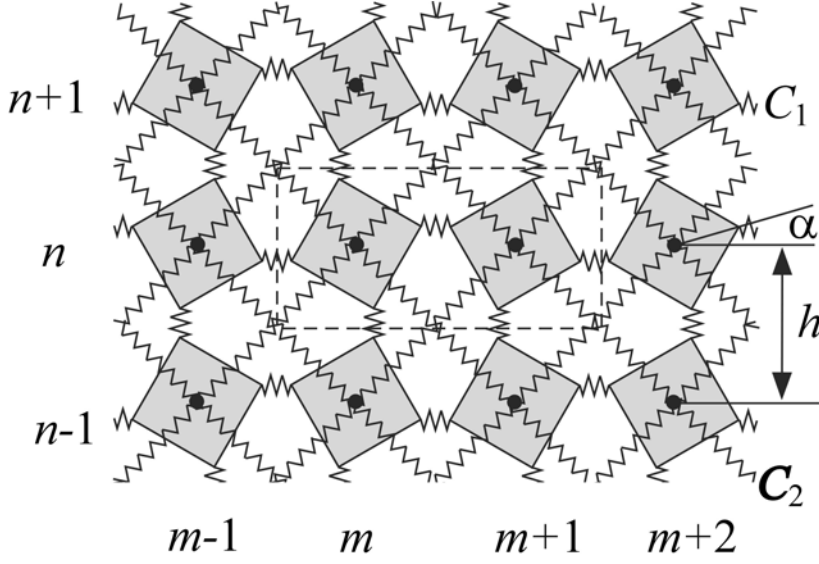


Рис. 1: Квадратная решетка с частицами конечного размера. Обозначения. Макроячейка, составленная из двух частиц.

где u_p , v_p являются компонентами смещений тяжести центра p -й частицы, а φ_p - углом поворота этой частицы. Первые три составляющие в (1) определяют кинетическую энергию p -й частицы, четвертая описывает потенциальную энергию восьми упругих связей, соединяющих i -й узел p -й частицы с j -м узлом q -й частицы, пятая составляющая - энергия сопротивления вращениям со стороны внешней среды.

Потенциальная энергия упругой связи, соединяющей i -й узел p -й частицы с j -м узлом q -й частицы, строится на основе потенциальной энергии связи пружинного типа $E_{(p,i)(q,j)} = (C/2)(L_1 - L_0)^2$, где C является приведенной жесткостью связи, $C = c/L_0^2$, а L_0 и L_1 - длины связи до и после деформации, соответственно. Линеаризацией изменения длины связи $\Delta L = L_1 - L_0$ относительно смещений и вращений, предполагая, что они малы, представляем потенциальную энергию в виде

$$E_{(p,i)(q,j)} = \frac{1}{2}C [(u_q - u_p) \cos \gamma + (v_q - v_p) \sin \gamma + r_i \varphi_p \sin(\gamma_i - \gamma) - r_j \varphi_q \sin(\gamma_j - \gamma)]^2,$$

где для соединений в углах и центрах частиц $r_i = r_j = a/\sqrt{2}$ и $r_i = r_j = 0$; γ_i - величина угла между осью Ox и радиус-вектором, соединяющим центр массы p -й частицы с ее i -м узлом; аналогично γ_j - величина угла между осью Ox и радиус-вектором, соединяющим центр массы q -й частицы с ее j -м узлом; γ - угол между осью Ox и направлением от узла i к узлу j .

2. Высокоградиентная многополевая микрополярная модель

Как правило, для получения континуальных моделей используется минимальная ячейка периодичности и одно соответствующее векторное поле обобщенных

перемещений. Отказ от этого не самоочевидного предположения ведет к новому классу моделей – многополевым моделям. N -полевые модели строятся на основе макроячейки, включающей N простых ячеек, с использованием N векторных полей для описания деформаций системы.

Для построения двухполевой модели используем макроячейку, содержащую две частицы с координатами (m, n) и $(m+1, n)$ (рис. 1). Для частиц макроячейки вводим дополнительно маркировку индексом s , который равен 0, если сумма $m+n$ четная, и 1, если сумма нечетная.

Далее, используя Лагранжиан (1), получаем шесть уравнений движения для частиц в периодической ячейке.

Для частиц с индексом $s = 0$ уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_0^{m,n} &= C_1 (\Delta_{xx}u_1^{m,n} + 2u_1^{m,n} - 2u_0^{m,n}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}C_2 (\Delta u_0^{m,n} + \Delta_{xy}v_0^{m,n}) - AC_1 \Delta_x \varphi_1^{m,n}, \\ M\ddot{v}_0^{m,n} &= C_1 (\Delta_{yy}v_1^{m,n} + 2v_1^{m,n} - 2v_0^{m,n}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}C_2 (\Delta_{xy}u_0^{m,n} + \Delta v_0^{m,n}) - AC_1 \Delta_y \varphi_1^{m,n}, \\ I\ddot{\varphi}_0^{m,n} &= A^2 C_1 (\Delta_{xx}\varphi_1^{m,n} + \Delta_{yy}\varphi_1^{m,n} + 4\varphi_1^{m,n} - 4\varphi_0^{m,n}) - \\ &\quad - AC_1 (\Delta_x u_1^{m,n} + \Delta_y v_1^{m,n}) - c\varphi_0^{m,n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где использованы следующие обозначения для конечных разностей

$$\begin{aligned} \Delta_x u_s^{m,n} &= u_s^{m+1,n} - u_s^{m-1,n}, & \Delta_{xx} u_s^{m,n} &= u_s^{m+1,n} - 2u_s^{m,n} + u_s^{m-1,n}, \\ \Delta_y u_s^{m,n} &= u_s^{m,n+1} - u_s^{m,n-1}, & \Delta_{yy} u_s^{m,n} &= u_s^{m,n+1} - 2u_s^{m,n} + u_s^{m,n-1}, \\ \Delta_{xy} u_s^{m,n} &= u_s^{m+1,n+1} - u_s^{m-1,n+1} - u_s^{m+1,n-1} + u_s^{m-1,n-1}, \\ \Delta u_s^{m,n} &= u_s^{m+1,n+1} + u_s^{m-1,n+1} + u_s^{m+1,n-1} + u_s^{m-1,n-1} - 4u_s^{m,n}. \end{aligned}$$

Три другие уравнения для частиц с индексом $s = 1$ могут быть получены из уравнений (2) заменой $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, m \rightarrow m+1$ и $A \rightarrow -A$.

Для построения двухполевой модели вводим две вектор-функции $\{u_s(x, y, t), v_s(x, y, t), \varphi_s(x, y, t)\}$, $s = 0, 1$, чтобы описать смещения частиц, отмеченных индексами 0 и 1 соответственно.

Предполагаем, что в точках расположения частиц введенные функции обобщенных перемещений, $s = 0, 1$, принимают значения перемещений соответствующих частиц решетки, то есть

$$\{u_s^{m,n}(t), v_s^{m,n}(t), \varphi_s^{m,n}(t)\} = \{u_s(x, y, t), v_s(x, y, t), \varphi_s(x, y, t)\}|_{x=mh, y=nh}.$$

Заменяя в дискретном уравнении значения перемещений и вращений их полевыми аналогами и используя далее разложение в ряд Тейлора

$$w_s^{m\pm 1, n\pm 1}(t) \rightarrow w_s(x \pm h, y \pm h, t) = \sum_i \sum_j \frac{(\pm h)^i (\pm h)^j}{i! j!} \frac{\partial^{i+j} w_s(x, y, t)}{\partial x^i \partial y^j},$$

приходим к уравнениям континуальной модели. В случае, если учитываются производные не выше второго порядка, получаем длинноволновую двухполевую модель, а сохраняя производные до четвертого порядка включительно – высокоградиентную модель.

Первые три уравнения модели имеют вид

$$\begin{aligned}
 Mu_{0,tt} &= C_1 (h^2 u_{1,xx} + 2u_1 - 2u_0 - 2Ah\varphi_{1,x}) + \\
 &+ C_2 h^2 (u_{0,xx} + u_{0,yy} + 2v_{0,xy}) + C_1 h^4 \left(\frac{1}{12} u_{1,xxxx} - \frac{1}{3} \frac{A}{h} \varphi_{1,xxx} \right) + \\
 &+ C_2 h^4 \left(\frac{1}{12} u_{0,xxxx} + \frac{1}{2} u_{0,xyy} + \frac{1}{12} u_{0,yyyy} + \frac{1}{3} v_{0,xxxy} + \frac{1}{3} v_{0,yxxx} \right), \\
 Mv_{0,tt} &= C_1 (h^2 v_{1,yy} + 2v_1 - 2v_0 - 2Ah\varphi_{1,y}) + \\
 &+ C_2 h^2 (2u_{0,xy} + v_{0,xx} + v_{0,yy}) + C_1 h^4 \left(\frac{1}{12} v_{1,yyyy} - \frac{1}{3} \frac{A}{h} \varphi_{1,yyy} \right) + \\
 &+ C_2 h^4 \left(\frac{1}{12} v_{0,xxxx} + \frac{1}{2} v_{0,xyy} + \frac{1}{12} v_{0,yyyy} + \frac{1}{3} u_{0,xxxy} + \frac{1}{3} u_{0,yxxx} \right), \\
 I\varphi_{0,tt} &= A^2 C_1 [h^2 (\varphi_{1,xx} + \varphi_{1,yy}) + 4\varphi_1 - 4\varphi_0] - 2AC_1 h (u_{1,x} + v_{1,y}) - \\
 &- c\varphi_0 + C_1 Ah^3 \left(\frac{1}{12} Ah [\varphi_{1,xxxx} + \varphi_{1,yyyy}] - \frac{1}{3} [u_{0,xxx} + v_{0,yyy}] \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Три другие уравнения модели получаются из уравнений (3) заменой $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$, $A \rightarrow -A$.

Введением двух, $s = 0, 1$, новых векторных полей

$$U_s = \frac{1}{2} [u_1 + (-1)^s u_0], \quad V_s = \frac{1}{2} [v_1 + (-1)^s v_0], \quad \Phi_s = \frac{1}{2} [\varphi_1 - (-1)^s \varphi_0]$$

шесть связанных уравнений расщепляются на две независимые группы уравнений.

Уравнения для функций $U_0(x, y, t)$, $V_0(x, y, t)$, $\Phi_0(x, y, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 MU_{0,tt} &= C_1 (h^2 U_{0,xx} - 2Ah\Phi_{0,x}) + \\
 &+ C_2 h^2 (U_{0,xx} + U_{0,yy} + 2V_{0,xy}) + C_1 h^4 \left(\frac{1}{12} U_{0,xxxx} - \frac{1}{3} \frac{A}{h} \Phi_{0,xxx} \right) + \\
 &+ C_2 h^4 \left(\frac{1}{12} U_{0,xxxx} + \frac{1}{2} U_{0,xyy} + \frac{1}{12} U_{0,yyyy} + \frac{1}{3} V_{0,xxxy} + \frac{1}{3} V_{0,xyyy} \right), \\
 MV_{0,tt} &= C_1 (h^2 V_{0,yy} - 2Ah\Phi_{0,y}) + \\
 &+ C_2 h^2 (2U_{0,xy} + \Delta V_0) + C_1 h^4 \left(\frac{1}{12} V_{0,yyyy} - \frac{1}{3} \frac{A}{h} \Phi_{0,yyy} \right) + \\
 &+ C_2 h^4 \left(\frac{1}{12} V_{0,xxxx} + \frac{1}{2} V_{0,xyy} + \frac{1}{12} V_{0,yyyy} + \frac{1}{3} U_{0,xxxy} + \frac{1}{3} U_{0,xyyy} \right), \\
 I\Phi_{0,tt} &= -A^2 C_1 (h^2 [\Phi_{0,xx} + \Phi_{0,yy}] + 8\Phi_0) + 2AC_1 h (U_{0,x} + V_{0,y}) - \\
 &- c\Phi_0 - C_1 Ah^3 \left(\frac{1}{12} Ah [\Phi_{0,xxxx} + \Phi_{0,yyyy}] + \frac{1}{3} [U_{0,xxx} + V_{0,yyy}] \right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

В частном случае сохранения производных не выше второго порядка в этих уравнениях, приходим к уравнениям классической микрополярной модели, полученной для рассматриваемой системы в статье [9] и описывающей длинноволновые деформации решетки. Построенные уравнения (4) являются обобщающими их уравнениями однополевой высокоградиентной микрополярной модели.

Три другие уравнения модели для функций $U_1(x, y, t)$, $V_1(x, y, t)$, $\Phi_1(x, y, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
MU_{1,tt} &= C_1 (-h^2 U_{1,xx} - 4U_1 + 2Ah\Phi_{1,x}) + \\
&+ C_2 h^2 (U_{1,xx} + U_{1,yy} + 2V_{1,xy}) - C_1 h^4 \left(\frac{1}{12} U_{1,xxxx} - \frac{1}{3} \frac{A}{h} \Phi_{1,xxx} \right) + \\
&+ C_2 h^4 \left(\frac{1}{12} U_{1,xxxx} + \frac{1}{2} U_{1,xyxy} + \frac{1}{12} U_{1,yyyy} + \frac{1}{3} V_{1,xxxy} + \frac{1}{3} V_{1,xyyy} \right), \\
MV_{1,tt} &= C_1 (-h^2 V_{1,yy} - 4V_1 + 2Ah\Phi_{1,y}) + \\
&+ C_2 h^2 (2U_{1,xy} + V_{1,xx} + V_{1,yy}) - C_1 h^4 \left(\frac{1}{12} V_{1,yyyy} - \frac{1}{3} \frac{A}{h} \Phi_{1,yyy} \right) + \\
&+ C_2 h^4 \left(\frac{1}{12} V_{1,xxxx} + \frac{1}{2} V_{1,xyxy} + \frac{1}{12} V_{1,yyyy} + \frac{1}{3} U_{1,xxxy} + \frac{1}{3} U_{1,xyyy} \right), \\
I\Phi_{1,tt} &= A^2 C_1 h^2 (\Phi_{1,xx} + \Phi_{1,yy}) - 2AC_1 h (U_{1,x} + V_{1,y}) - c\Phi_1 + \\
&+ C_1 Ah^3 \left(\frac{1}{12} Ah [\Phi_{1,xxxx} + \Phi_{1,yyyy}] - \frac{1}{3} [U_{1,xxx} + V_{1,yyy}] \right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Смысл этих новых уравнений раскрывается дополнительным анализом.

3. Сравнительный анализ моделей

Сравнительный анализ моделей проведем на основе сравнения дисперсионных соотношений для волновых решений вида

$$\begin{aligned}
u_s^{m,n}(t) &= \tilde{u}_s \exp [i(\omega t - mK_x - nK_y)], \\
v_s^{m,n}(t) &= \tilde{v}_s \exp [i(\omega t - mK_x - nK_y)], \\
\varphi_s^{m,n}(t) &= \tilde{\varphi}_s \exp [i(\omega t - mK_x - nK_y)],
\end{aligned} \tag{6}$$

где $K_x = hk_x$, $K_y = hk_y$, k_x , k_y - волновые числа, ω - угловая частота, \tilde{u}_s , \tilde{v}_s , $\tilde{\varphi}_s$ - амплитуды колебаний.

Подстановка выражений (6) в дискретные уравнения движения приводит к системе шести линейных алгебраических уравнений для амплитуд. В новых переменных

$$\tilde{U}_s = \frac{1}{2} [\tilde{u}_1 + (-1)^s \tilde{u}_0], \quad \tilde{V}_s = \frac{1}{2} [\tilde{v}_1 + (-1)^s \tilde{v}_0], \quad \tilde{\Phi}_s = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_1 - (-1)^s \tilde{\varphi}_0]$$

система из шести связанных уравнений распадается на две независимые системы уравнений вида

$$\begin{aligned}
(a_{s,0} + a_{s,2} + m\omega_s^2) \tilde{U}_s + a_{s,3} \tilde{V}_s + a_{s,4} i \tilde{\Phi}_s &= 0, \\
a_{s,3} \tilde{U}_s + (a_{s,1} + a_{s,2} + m\omega_s^2) \tilde{V}_s + a_{s,5} i \tilde{\Phi}_s &= 0, \\
a_{s,4} \tilde{U}_s + a_{s,5} \tilde{V}_s + (a_{s,6} + I\omega_s^2) i \tilde{\Phi}_s &= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $s = 0, 1$.

Для $s = 0$ коэффициенты системы (7) имеют вид

$$\begin{aligned}
a_{0,0} &= 2C_1 (\cos K_x - 1), \quad a_{0,1} = 2C_1 (\cos K_y - 1), \\
a_{0,2} &= 2C_2 (\cos K_x \cos K_y - 1), \quad a_{0,3} = -2C_2 \sin K_x \sin K_y, \\
a_{0,4} &= 2AC_1 \sin K_x, \quad a_{0,5} = 2AC_1 \sin K_y, \\
a_{0,6} &= 2A^2 C_1 (-\cos K_x - \cos K_y - 2) - c.
\end{aligned} \tag{8}$$

Для $s = 1$ коэффициенты равны

$$\begin{aligned}
a_{1,0} &= 2C_1 (-\cos K_x - 1), \quad a_{1,1} = 2C_1 (-\cos K_y - 1), \\
a_{1,2} &= 2C_2 (\cos K_x \cos K_y - 1), \\
a_{1,3} &= -2C_2 \sin K_x \sin K_y, \quad a_{1,4} = -2AC_1 \sin K_x, \\
a_{1,5} &= -2AC_1 \sin K_y, \quad a_{1,6} = 2A^2 C_1 (\cos K_x + \cos K_y - 2) - c.
\end{aligned} \tag{9}$$

Приравнивание нулю определителя для нахождения нетривиальных решений системы (7) с $s = 0$ и $s = 1$ дает шесть дисперсионных соотношений, которые задают шесть дисперсионных поверхностей, определенных в приведенной первой зоне Бриллюэна, $||K_x| + |K_y|| < \pi$.

Поскольку коэффициенты $a_{0,m}$, (8), совпадают с коэффициентами модели, полученными в [9] для случая одной частицы в ячейке периодичности, три первые дисперсионные поверхности построенной на основе макроячейки дискретной модели (2) совпадают с поверхностями дискретной модели, построенной для ячейки периодичности с одной частицей в статье [9]. Замены $K_x \rightarrow \pi - K_x$ и $K_y \rightarrow \pi - K_y$ в коэффициентах для другой группы поверхностей $a_{1,m}$, (9), приводят к тому же самому детерминанту для дисперсионных соотношений, что и коэффициенты $a_{0,m}$, (8). Это означает, что три другие поверхности дискретной модели, построенной на основе макроячейки, соответствующие коэффициентам $a_{1,m}$ и определенные на области $||K_x| + |K_y|| < \pi$, будучи отраженными относительно плоскостей $K_x \pm K_y = \pm\pi$ дают дисперсионные поверхности дискретной модели, полученной в [9] с использованием ячейки с одной частицей, в областях $||K_x| + |K_y|| > \pi$, $|K_x| < \pi$, $|K_y| < \pi$.

Таким образом, введение макроячейки для дискретной системы приводит к более сложной модели с увеличенным количеством уравнений, но с той же информацией о системе, что и модель, построенная на основе элементарной ячейки. Далее будет показано, что введение макроячейки и увеличение количества аппроксимирующих полей при построении континуальной модели приводит к существенно новому результату – уточнению континуальной модели, построенной на основе ячейки с одной частицей.

Для построения дисперсионных соотношений континуальных моделей рассматриваем континуальные аналоги решений (6) вида

$$\begin{aligned} U_s(x, y, t) &= \tilde{U}_s \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y)] , \\ V_s(x, y, t) &= \tilde{V}_s \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y)] , \\ \Phi_s(x, y, t) &= \tilde{\Phi}_s \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y)] . \end{aligned}$$

Их подстановка в уравнения высокоградиентной двухполевой микрополярной модели (4) и (5) приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида (7) с коэффициентами

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= C_1 (-K_x^2 + K_x^4/12) , \quad c_{0,1} = C_1 (-K_y^2 + K_y^4/12) , \\ c_{0,2} &= C_2 (-K_x^2 - K_y^2 + K_x^4/12 + K_x^2 K_y^2/2 + K_y^4/12) , \\ c_{0,3} &= -2C_2 (K_x K_y - K_x^3 K_y/6 - K_x K_y^3/6) , \\ c_{0,4} &= 2AC_1 (K_x - K_x^3/6) , \quad c_{0,5} = 2AC_1 (K_y - K_y^3/6) , \\ c_{0,6} &= A^2 C_1 (K_x^2 + K_y^2 - 8 - K_x^4/12 - K_y^4/12) - c \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= C_1 (-4 + K_x^2 - K_x^4/12) , \quad c_{1,1} = C_1 (-4 + K_y^2 - K_y^4/12) , \\ c_{1,2} &= C_2 (-K_x^2 - K_y^2 + K_x^4/12 + K_x^2 K_y^2/2 + K_y^4/12) , \\ c_{1,3} &= -2C_2 (K_x K_y - K_x^3 K_y/6 - K_x K_y^3/6) , \\ c_{1,4} &= -2AC_1 (K_x - K_x^3/6) , \quad c_{1,5} = -2AC_1 (K_y - K_y^3/6) , \\ c_{1,6} &= A^2 C_1 (-K_x^2 - K_y^2 + K_x^4/12 + K_y^4/12) - c. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты $c_{0,m}$ являются разложениями в ряд Тейлора коэффициентов $a_{0,m}$ дискретной модели (8) в точке $(K_x, K_y) = (0, 0)$ с учетом членов четвертой степени и, следовательно, соответствующие уравнениям (4) дисперсионные поверхности двухполевой модели аппроксимируют дисперсионные поверхности дискретной системы в точке $(K_x, K_y) = (0, 0)$. Однако различие дисперсионных поверхностей дискретной и континуальной моделей значительно в области коротких волн. Таким образом, уравнения (4) могут быть использованы при моделировании медленно изменяющихся длинноволновых деформаций решетки, но не применимы для моделирования коротковолновых полей.

Коэффициенты $c_{1,m}$ являются разложениями коэффициентов $a_{1,m}$, (8), в ряд Тейлора в точке $(K_x, K_y) = (0, 0)$ до членов четвертой степени включительно. С учетом сделанного ранее замечания о соответствующих коэффициентах $a_{0,m}$ и $a_{1,m}$ дисперсионных поверхностях можно сделать вывод, что соответствующие коэффициентам $c_{1,m}$ дисперсионные поверхности континуальной модели, отраженные относительно плоскостей $K_x \pm K_y = \pm\pi$, аппроксимируют дисперсионные поверхности дискретной модели около точек $(K_x, K_y) = (\pm\pi, \pm\pi)$. Таким образом, полученные дополнительные уравнения (5) двухполевой модели уточняют уравнения микрополярной теории (4) и позволяют описать коротковолновые деформации решетки с волновыми числами в области вблизи значений $(K_x, K_y) = (\pm\pi, \pm\pi)$.

Коэффициенты $c_{0,m}$ и $c_{1,m}$ высокоградиентной модели в случае учета в их выражениях компонент не выше второй степени совпадают с соответствующими коэффициентами длинноволновой двухполевой модели [8]. То есть учет высокоградиентных членов в уравнениях модели повышает порядок аппроксимации и увеличивает точность модели в области длинных и коротких волн с волновыми числами около значений $(K_x, K_y) = (0, 0)$ и $(K_x, K_y) = (\pm\pi, \pm\pi)$ соответственно.

Заключение

Таким образом, в статье построена высокоградиентная двухполевая микрополярная модель обладающей ауксетическими свойствами представленной на рис. 1 решетки с конечным размером частиц. При построении используются подходы высокоградиентной, микрополярной и многополевой механики в их комбинации. Показано, что построенная модель включает модели соответствующих теорий и обладает их свойствами. Таким образом, получается система моделей с нарастающей точностью. Микрополярная модель уточняет модель классической теории упругости учетом вращений, которые, как показано в [9], играют ключевую роль в появлении ауксетических свойств. Недостатком модели является то, что она дает существенную погрешность и не описывает коротковолновые поля [8, 9]. Длинноволновая двухполевая модель, построенная в [8], уточняет однополевую модель при описании коротковолновых эффектов, в частности статических коротковолновых погранслойных деформаций, правильное описание которых необходимо для построения континуальной теории разрушения при возникновении таких деформаций в решетке. Построенная в настоящей статье высокоградиентная модель дает дополнительное уточнение однополевой модели при моделировании решетки для длинных и коротких волн. С физической точки зрения, это означает, в частности, более точное описание скорости распространения и дисперсии таких волн при решении задач динамики и локализованных погранслойных полей соответствующего вида в задачах статики.

Список литературы

- [1] Ломакин В.А. Статистические задачи механики деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1970.
- [2] Короткина М.Р. Физика твердого тела. М.: МГУ, 1985.
- [3] Grima J.N., Evans K.E. Auxetic behavior from rotating squares // Journal of Material Science Letters, 19, 2000. P. 1563-1565.
- [4] Ishibashi Y., Iwata M. A microscopic model of a negative Poisson's ratio in some crystals // Journal of the Physical Society of Japan, V. 69, 2000. P. 2702-2703.
- [5] Miroshnichenko A.E., Vasiliev A.A. Multi-field modelling of short wavelength deformations for Cosserat solids // Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the XXIIth International Congress, 25-29 August 2008, Adelaide, Australia, № 10926.
- [6] Rogula D. Non-classical material continua // Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the XVIth International Congress, 1985. P. 339-353.
- [7] Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Ruzzene M. Multi-field model for Cosserat media // Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2008, (in press); preprint: arXiv: cond-mat/0803.0372.
- [8] Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations // International Journal of Solids and Structures, V. 42 (24-25), 2005. P. 6245-6260.
- [9] Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Ishibashi Y., Shigenari T. Elastic properties of a two-dimensional model of crystals containing particles with rotational degrees of freedom. Physical Review B 65, 2002, 09410.