УДК 519.95

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕОБХОДИМОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Солдатенко И.С.[1], **Пильщиков Д.Е.**[1,2], **Язенин А.В.**[1]
[1]Кафедра информационных технологий
[2]ФГУП НИИИТ, г.Тверь

Поступила в редакцию 05.09.2008, после переработки 15.09.2008.

В статье исследуется задача уровневой оптимизации со взаимодействующими нечеткими параметрами при ограничениях по мере необходимости. Получен непрямой метод решения задачи, основанный на построении ее детерминированного эквивалента. Изучаются его свойства. Получены результаты, позволяющие установить связь между возможностной и необходимостной моделью оптимизации.

Level optimization task with mutually related parameters under necessity measure is investigated in the article. Indirect solution method based on building of equivalent deterministic analogue is proposed. Its properties are studied. Results which help to determine relationship between possibility and necessity optimization models are received.

Ключевые слова: возможностная оптимизация, мера возможности, мера необходимости, слабая t-норма, непрямой метод.
Keywords: possibilistic optimization, possibility measure, necessity measure, weak t-norm, indirect solution method.

1. Введение

В статье изучается задача уровневой оптимизации в возможностно-необходимостном контексте при взаимодействующих параметрах. В общем виде она может быть записана следующим образом:

$$k \to \max, \tag{1}$$

$$\tau\left\{f_0(x,\gamma) \geqslant k\right\} \geqslant \alpha_0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \tau\{f_i(x,\gamma) \leqslant 0\} \geqslant \alpha_i, \ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}^n_+. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $f_0(x,\gamma) = \sum_{j=1}^n a_{0j}(\gamma)x_j$, $f_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma)$, $i = \overline{1,m}$, $\tau \in \{\pi, \nu\}$, π — возможностная мера, ν — двойственная ей мера необходимости, $a_{ij}(\gamma), b_i(\gamma)$ — взаимно T_W-связанные нечеткие величины, $\mathbb{E}^n_+$ — неотрицательный октант n-мерного евклидова пространства.

Эта задача детально изучена при $\tau = \pi$ в [4]. Данная статья продолжает это исследование. В случае, когда $\tau = \nu$, в статье построен эквивалентный детерминированный аналог задачи.

Показано, что в отличие от рассмотренной в [4] ситуации, в данном случае эквивалентный детерминированный аналог есть задача выпуклого программирования. Установлена связь между допустимыми и оптимальными решениями задачи (1)-(3) в случае мер возможности и необходимости.

2. Необходимый математический аппарат

Введем необходимые определения и понятия из теории возможностей [1, 5, 7 – 13].

Пусть множество Γ есть модельное множество, $\gamma \in \Gamma$ — его элементы, $\mathbb{P}(\Gamma)$ — множество всех подмножеств множества Γ.

Определение 5. *Возможностной мерой* $\pi : \Gamma \to \mathbb{E}^1$ *называется функция множества, обладающая следующими свойствами:*

1. $\pi\{\varnothing\} = 0,\ \pi\{\Gamma\} = 1,$

2. $\pi\left\{\bigcup_{i\in I} A_i\right\} = \sup_{i\in I} \pi\{A_i\},\ \forall A_i \in \mathbb{P}(\Gamma),\ \forall I.$

Определение 6. *Тройка* $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ *называется возможностным пространством.*

Определение 7. *Мерой необходимости* $\nu : \Gamma \to \mathbb{E}^1$ *называется функция множества, обладающая следующими свойствами:*

1. $\nu\{\varnothing\} = 0,\ \nu\{\Gamma\} = 1,$

2. $\nu\left\{\bigcap_{i\in I} A_i\right\} = \inf_{i\in I} \nu\{A_i\},\ \forall A_i \in \mathbb{P}(\Gamma),\ \forall I.$

Отметим важные свойства мер возможности и необходимости.

1. π и ν есть меры неопределенности и обладают всеми их свойствами (ограниченность, монотонность).
2. $\nu\{A\} = 1 - \pi\{A^C\}$, где A^C — дополнение множества A. Это свойство показывает, что меры возможности и необходимости являются двойственными.
3. $\max\{\pi\{A\}, \pi\{A^C\}\} = 1$, $\min\{\nu\{A\}, \nu\{A^C\}\} = 0$.
4. $\pi\{A\} + \pi\{A^C\} \geqslant 1$, $\nu\{A\} + \nu\{A^C\} \leqslant 1$.
5. $\pi\{A\} \geqslant \nu\{A\} : \nu\{A\} > 0 \Rightarrow \pi\{A\} = 1, \pi\{A\} < 1 \Rightarrow \nu\{A\} = 0$.
6. Мера возможности непрерывна снизу, мера необходимости непрерывна сверху.

Определение 8. *Возможностной (нечеткой) величиной называется вещественная функция*

$$A(\cdot) : \Gamma \to \mathbb{E}^1,$$

возможные значения которой характеризуются ее распределением возможностей $\mu_A(x)$:

$$\mu_A(x) = \pi\{\gamma \in \Gamma : A(\gamma) = x\},\ \forall x \in \mathbb{E}^1.$$

$\mu_A(x)$ — возможность того, что A может принять значение x.

Аналогичным образом можно определить и «необходимостную» величину [13].

Определение 9. *Необходимостная величина есть вещественная функция*

$$N(\cdot) : \Gamma \to \mathbb{E}^1,$$

значения которой ограничены ее распределением необходимостей $\mu_N^\nu(x)$:

$$\mu_N^\nu(x) = \nu\{\gamma \in \Gamma : N(\gamma) = x\} =$$

$$= 1 - \pi\{\gamma \in \Gamma : N(\gamma) \neq x\} = 1 - \sup_{u \neq x} \mu_N(u),\ \forall x \in \mathbb{E}^1.$$

Очевидно, что определенная таким образом «необходимостная» величина будет почти всегда равна нулю. Ее прямое применение лишено смысла. Однако она может применяться в двойственном контексте возможность-необходимость для моделирования отношений типа «неравенство». Поэтому всюду далее под нечеткой величиной мы будем понимать именно возможностную величину.

Определение 10. *Носителем возможностной величины A называется четкое подмножество*

$$supp(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\},\ x \in \mathbb{E}^1.$$

Определение 11. *Для любой возможностной переменной A и любого $\alpha \in [0,1]$, α-уровневым множеством A^α называется:*

- $A^\alpha = \{x \in \mathbb{E}^1 \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$, *для* $\alpha \in (0,1]$,
- $A^\alpha = cl(supp(A))$, *для* $\alpha = 0$,

где $cl(supp(A))$ — замыкание носителя возможностной переменной A.

Определение 12. *Возможностная переменная A называется выпуклой, если ее функция распределения является квазивогнутой:*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\},\ \lambda \in [0,1],\ x_1, x_2 \in \mathbb{E}^1.$$

Как правило, возможностные переменные на числовой прямой, характеризующиеся строго унимодальными, квазивогнутыми, полунепрерывными сверху функциями распределения и ограниченными носителями, называются *нечеткими числами.* При этом если функция распределения возможностей не является строго унимодальной, то возможностная переменная называется *нечетким интервалом.*

Для моделирования нечетких чисел и нечетких интервалов мы используем распределения (L,R)-типа [1].

В данной работе исследуется задача возможностной оптимизации со взаимодействующими параметрами. Зависимость (взаимодействие, связанность, минисвязанность) параметров моделируется на основе аппарата t-норм [7, 8, 9]. Напомним, что применяемая в настоящей работе слабая t-норма T_W имеет следующий вид:

$$T_W(x,y) = \begin{cases} min\{x,y\}, & \text{если } max\{x,y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Используемое нами понятие взаимной T-связанности обобщает соответствующие понятия взаимной связанности (минисвязанности), данные в [10, 12]. Следуя [6], дадим еще два определения.

Определение 13. *Пусть даны возможностное пространство* $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ *и* t-*норма* T. *Множества* $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{P}(\Gamma)$ *называются взаимно* T-*связанными, если для любого подмножества* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *множества* $\{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\pi\Big\{X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}\Big\} = T\Big(\pi\{X_{i_1}\}, \ldots, \pi\{X_{i_k}\}\Big),$$

где

$$T\Big(\pi\{X_{i_1}\}, \ldots, \pi\{X_{i_k}\}\Big) =$$

$$= T(T(\ldots T(T(\pi\{X_{i_1}\}, \pi\{X_{i_2}\}), \pi\{X_{i_3}\}), \ldots \pi\{X_{i_{k-1}}\}), \pi\{X_{i_k}\}).$$

Допустим, что $A_1, \ldots, A_n$ — возможностные величины, заданные на возможностном пространстве $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$.

Определение 14. *Возможностные величины* $A_1, \ldots, A_n$ *называются взаимно* T-*связанными, если для любого подмножества* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *множества* $\{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{gathered} \mu_{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \pi\{\gamma \in \Gamma \mid A_{i_1}(\gamma) = x_{i_1}, \ldots, A_{i_k}(\gamma) = x_{i_k}\} = \\ \pi\{A_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\} \cap \ldots \cap A_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\}\} = \\ T(\pi\{A_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\}\}, \ldots, \pi\{A_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\}\}),\ x_{i_j} \in \mathbb{E}^1. \end{gathered}$$

При норме $T(x,y) = \min\{x,y\}$ мы приходим к соответствующим определениям из [10, 12].

3. Основные результаты

Исследуем проблему (1)-(3) в случае $\tau = \nu$ и нормы $T = T_W$, описывающей взаимодействие нечетких параметров. Она принимает вид:

$$k \to \max, \tag{4}$$

$$\nu\{f_0(x,\gamma) \geqslant k\} \geqslant \alpha_0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \nu\{f_i(x,\gamma) \leqslant 0\} \geqslant \alpha_i,\ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}^n_+. \end{cases} \tag{6}$$

Исследуем сначала модель ограничений (6). Построим для нее эквивалентную детерминированную. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в модели ограничений (6) нечеткие параметры* $a_{ij}(\gamma)$ *и* $b_i(\gamma)$ *являются взаимно* T_W*-связанными и характеризуются распределениями* (L,R)*-типа:*

$$a_{ij}(\gamma) = (a'_{ij}, a''_{ij}, \eta_{ij}, \beta_{ij})_{LR},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$$
$$b_i(\gamma) = (b'_i, b''_i, \eta_i, \beta_i)_{LR},\ i=\overline{1,m}$$

с одинаковыми функциями представления формы L *и* R*. Если* L *и* R *имеют обратные функции, то эквивалентный детерминированный аналог модели (6) имеет вид:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a''_{ij}x_j + \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{x_j\beta_{ij}\}R^{-1}(1-\alpha_i) \leqslant b'_i - \eta_i L^{-1}(1-\alpha_i),\ i=\overline{1,m}, \\ x\in\mathbb{E}^n_+. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. В силу представления функции $f_i(x,\gamma)$:

$$f_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma)$$

модель ограничений (6) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \nu\{f'_i(x,\gamma) \leqslant b_i(\gamma)\} \geqslant \alpha_i,\ i=\overline{1,m}, \\ x\in\mathbb{E}^N_+. \end{cases} \tag{8}$$

Функция $f'_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j$ в модели ограничений (8) является взвешенной T_W-суммой нечетких величин (L,R)-типа с одинаковыми функциями представления формы. Согласно теореме о взвешенной T_W-сумме нечетких величин (L,R)-типа из [3], распределение возможностей $f'_i(x,\gamma)$ имеет вид:

$$\mu_{f'_i(x,\gamma)} = (l^*_i, r^*_i, \eta^*_i, \beta^*_i)_{LR},$$

где

$$l^*_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j,\quad r^*_i = \sum_{j=1}^{n} a''_{ij}x_j,$$

$$\eta^*_i = \max\{x_1\eta_{i1},\ldots,x_n\eta_{in}\} = \max_{j=1,\ldots,n}\{x_j\eta_{ij}\},$$
$$\beta^*_i = \max\{x_1\beta_{i1},\ldots,x_n\beta_{in}\} = \max_{j=1,\ldots,n}\{x_j\beta_{ij}\}.$$

В результате получаем, что $f'_i(x,\gamma)$ имеет следующую функцию представления формы $R^{f'_i}(x)$:

$$R^{f'_i}(x) = R\left(\frac{x-r^*_i}{\beta^*_i}\right).$$

Для свободного члена функция распределения возможностей будет иметь вид, заданный в условии теоремы: $b_i(\gamma) = (b'_i, b''_i, \eta_i, \beta_i)_{LR}$, а функция представления левой формы, соответственно:

$$L^{b_i}(x) = L\left(\frac{b'_i - x}{\eta_i}\right).$$

Из соотношения двойственности мер возможности и необходимости получаем:

$$\nu\{f_i'(x,\gamma) \leqslant b_i(\gamma)\} \geqslant \alpha_i \Rightarrow \pi\{f_i'(x,\gamma) > b_i(\gamma)\} \leqslant 1-\alpha_i.$$

В соответствии с [13] возможностное неравенство $\pi\{f_i'(x,\gamma) > b_i(\gamma)\} \leqslant 1-\alpha_i$ эквивалентно следующему неравенству:

$$r_i^{f_i'} \leqslant l_i^{b_i}, \tag{9}$$

где $r_i^{f_i'}$ — такое значение аргумента функции $R^{f_i'}$, при котором достигается супремум, равный $1-\alpha_i$: $R^{f_i'}(r_i^{f_i'}) = \alpha_i$, а l^{b_i} — значение аргумента функции L^{b_i}, при котором достигается супремум $1-\alpha_i$: $L^{b_i}(l_i^{b_i}) = \alpha_i$. Найдем $r_i^{f_i'}$:

$$R\left(\frac{r_i^{f_i'} - r_i^*}{\beta_i^*}\right) = 1-\alpha_i \Longrightarrow \frac{r_i^{f_i'} - r_i^*}{\beta_i^*} = R^{-1}(1-\alpha_i) \Longrightarrow r_i^{f_i'} = r_i^* + \beta_i^* R^{-1}(1-\alpha_i).$$

Вычислим теперь $l_i^{b_i}$. Имеем:

$$L\left(\frac{b_i' - l_i^{b_i}}{\eta_i}\right) = 1-\alpha_i \Longrightarrow \frac{b_i' - l_i^{b_i}}{\eta_i} = L^{-1}(1-\alpha_i) \Longrightarrow l_i^{b_i} = b_i' - \eta_i L^{-1}(1-\alpha_i).$$

Тогда неравенство (9) может быть записано в виде:

$$r_i^* + \beta_i^* R_i^{-1}(1-\alpha_i) \leqslant b_i' - \eta_i L^{-1}(1-\alpha_i).$$

Представив l_i^*, r_i^*, η_i^* и β_i^* в явной форме, получаем утверждение теоремы. Что и требовалось доказать. □

Замечание 1. *В предположениях теоремы 1 модель ограничений (6) определяет выпуклое множество допустимых решений задачи оптимизации (1)-(3).*

Действительно, нетрудно видеть, что для любого $i = \overline{1,n}$ функция

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'' x_j + \max_{j=1,\ldots,n}\{x_j \beta_{ij}\} R^{-1}(1-\alpha_i)$$

является выпуклой, так как представляет собой сумму линейной и выпуклой функции. Следовательно i-ое ограничение определяет выпуклую область. Пересечение выпуклых областей есть выпуклая область.

Этот результат является важным с позиции сравнительного изучения эквивалентных детерминированных аналогов задачи (1)-(3) в случае меры возможности и необходимости. Как было показано в [4] при $\tau = \pi$ соответствующая модель ограничений определяет невыпуклую область.

Обозначим через $X_W^{\alpha}(\nu)$ множество допустимых решений задачи (1)-(3), определяемых моделью ограничений

$$\begin{cases} \nu\{f_i(x,\gamma) \leqslant 0\} \geqslant \alpha_i, \ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases}$$

Через $X_W^\alpha(\pi)$ обозначим множество допустимых решений, определяемых моделью ограничений

$$\begin{cases} \pi\{f_i(x,\gamma) \leqslant 0\} \geqslant \alpha_i, \ i = \overline{1,m}, \\ x \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases}$$

При сделаных ранее предположениях, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_i = 0.5, \ i = \overline{1,m}$. *Тогда*

$$X_W^\alpha(\nu) \subseteq X_W^\alpha(\pi).$$

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in X_W^\alpha(\nu)$. Покажем, что $\bar{x} \in X_W^\alpha(\pi)$. Действительно, так как $\bar{x} \in X_W^\alpha(\nu)$, то, переходя к (7), имеем, что $\forall i = \overline{1,m}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a''_{ij}\bar{x}_j + \max_{j=1,\ldots,n}\{\bar{x}_j\beta_{ij}\}R^{-1}(0.5) \leqslant b'_i - \eta_i L^{-1}(0.5).$$

Но тогда $\forall i = \overline{1,m}$ имеет место и следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\bar{x}_j - \max_{j=1,\ldots,n}\{\bar{x}_j\beta_{ij}\}L^{-1}(0.5) \leqslant b''_i + \eta_i R^{-1}(0.5).$$

Так как $L^{-1}(0.5) = R^{-1}(0.5)$, ясно, что $\bar{x}$ принадлежит пересечению областей, определяемых последними неравенствами. Это пересечение определяет область $X_W^\alpha(\pi)$, как показано в [4], то есть $\bar{x} \in X_W^\alpha(\pi)$. Теорема доказана. □

Замечание 2. *Пороговый уровень 0.5 принят как в задачах стохастического, так и возможностного программирования.*

Перейдем к исследованию модели критерия задачи (1)-(3) для $\tau = \nu$. Эквивалентный детерминированный аналог модели критерия (4)-(5) дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в модели критерия (4)-(5)* $a_{0j}(\gamma)$ *есть* T_W*-связанные нечеткие величины* (L,R)*-типа:*

$$a_{0j}(\gamma) = (a'_{0j}, a''_{0j}, \eta_{0j}, \beta_{0j})_{LR}, \ j = \overline{1,n}$$

с одинаковыми функциями представления формы L *и* R. *Если* L *и* R *имеют обратные функции, то эквивалентный детерминированный аналог модели (4)-(5) имеет вид:*

$$\begin{cases} k \to \max, \\ k \leqslant \sum_{j=1}^{n} a'_{0j}x_j - \max_{j=1,\ldots,n}\{x_j\eta_{0j}\}L^{-1}(1-\alpha_0), \\ x \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Принимая во внимание определение меры необходимости, имеем:

$$\nu\{f_0(x,\gamma) \geqslant k\} \geqslant \alpha_0 \Rightarrow \pi\{f_0(x,\gamma) < k\} \leqslant 1 - \alpha_0.$$

Ввиду этого эквивалентная модель критерия (4)-(5) имеет вид:

$$k \to \max,$$

$$\begin{cases} \pi\{f_0(x,\gamma) < k\} \leqslant 1-\alpha_0, \\ x \in \mathbb{E}^n_+. \end{cases}$$

Функция $f_0(x,\gamma)$ является взвешенной T_W-суммой нечетких величин (L,R)-типа с одинаковыми функциями представления формы. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, находим распределение возможностей $f_0(x,\gamma)$, а затем левую границу его (1 - α_0)-уровневого множества:

$$l_0^{f_0} = l_0^* - \eta_0^* L^{-1}(1-\alpha_0),$$

где

$$l_0^* = \sum_{j=1}^n a'_{0j}x_j, \quad \eta_0^* = \max_{j=1,\dots,n}\{x_j\eta_{0j}\}.$$

В соответствии с [13], возможностное неравенство $\pi\{f_0(x,\gamma) < k\} \leqslant 1-\alpha_0$ эквивалентно следующему детерминированному неравенству:

$$k \leqslant l_0^{f_0}. \tag{11}$$

Тогда (11) может быть записано в виде:

$$k \leqslant l_0^* - \eta_0^* L^{-1}(1-\alpha_0). \tag{12}$$

Представив l_0^* и r_0^* в (12) в явной форме, получаем утверждение теоремы. □

Нетрудно видеть, что модель критерия представляет собой вогнутую функцию. Поэтому модель (10) может быть заменена эквивалентной моделью критерия:

$$\sum_{j=1}^n a'_{0j}x_j - \max_{j=1,\dots,n}\{x_j\eta_{0j}\}L^{-1}(1-\alpha_0) \to \max. \tag{13}$$

По сравнению с (10), использование этой модели является более предпочтительным по причине уменьшения размерности решаемой задачи.

Заключение

В работе исследована задача уровневой оптимизации со взаимодействующими нечеткими параметрами при ограничениях по мере необходимости. Получен непрямой метод решения задачи, основанный на построении ее эквивалентного детерминированного аналога. Получены результаты, позволяющие установить связь между возможностной и необходимостной моделью оптимизации.

Показано, что в отличие от рассмотренной в [4] возможностной модели, в случае меры необходимости эквивалентный детерминированный аналог есть задача выпуклого программирования. Однако функции, формирующие оптимизационную модель, не являются всюду гладкими. Поэтому для решения детерминированного эквивалента необходимо привлекать методы субградиентной оптимизации и обобщенного линейного программирования [2].

Список литературы

[1] Д. Дюбуа, А. Прад. Теория возможностей / Пер. с франц. М.: Радио и связь, 1990.

[2] М. Мину. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

[3] И.С. Солдатенко. О взвешенной сумме взаимно T_W-связанных нечетких величин // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». 2007. №5(33). С. 63-77.

[4] И.С. Солдатенко, А.В. Язенин. Задачи возможностной оптимизации с взаимно Т-связанными параметрами: сравнительное изучение // Изв. РАН, ТиСУ, 2008. №5. Стр. 87-98.

[5] А.В. Язенин. К задаче максимизации возможности достижения нечеткой цели // Изв. РАН, ТиСУ, 1999. N4. Стр. 120-123.

[6] D.H. Hong. Parameter estimations of mutually T-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems 123 (2001) 63-71.

[7] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. I. Basic analytical and algebraic properties // Fuzzy Sets and Systems 143 (2004) 5-26.

[8] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. II. General constructions and parameterized families // Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 411-438.

[9] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. III. Continuous t-norms // Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 439-454.

[10] S. Nahmias. Fuzzy Variables // Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 97-110.

[11] H.T. Nguyen, E.A. Walker. A first cours in fuzzy logic. CRC Press, 1997.

[12] M. Rao, A. Rashed. Some comments on fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems 6 (1981) 285-292.

[13] A.V. Yazenin, M. Wagenknecht. Possibilistic optimization. Brandenburgische Technische Universitat, Cottbus, Germany, 1996.