

**МЕТОД КРИТИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТ
РЕШЕНИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ЗАДАЧ**

Душанов Э.Б.^{1,2}, Емельяненко Г.А.^{1,3}, Михайлов И.Е.³, Муравей Л.А.³

¹Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

²Институт ядерной физики, Улугбек, Ташкент, Узбекистан

³Международный университет природы, общества и человека «Дубна», Дубна

Поступила в редакцию 13.08.2008.

Изложены результаты исследования эффективности прямого метода критических компонент решения вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. Приведен критерий образования подпространств метода критических компонент.

Results are expounded for the investigation of efficiency of the critical-component direct method for solving degenerate and ill-posed systems of linear algebraic equations. The criterions of creations of subspaces in critical-component method was adduced.

Ключевые слова: плохо обусловленные системы, трехдиагональные системы, линейные уравнения.

Keywords: ill-posed systems, tridiagonal matrices, linear equations.

Введение

Данная работа посвящена проблеме решения систем линейных алгебраических уравнений

$$AZ = F, \quad (1)$$

где A — произвольная действительная прямоугольная (в общем случае) матрица. В зависимости от вида A система (1) ортогональными преобразованиями сводится к системам

$$C_2 X_1 = Y_1, \quad C_3 X_2 = Y_2, \quad (2)$$

где C_2, C_3 — квадратные m -мерные двух- и трехдиагональные матрицы

$$C_2 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ & q_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & r_m & \\ & & & & q_m \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & r_m & \\ & & p_m & q_m & \end{bmatrix} \quad (3)$$

Если матрица A плохо обусловлена, матрицы C_2 и C_3 также являются плохо обусловленными [1], поскольку

$$C_2 = PAQ \quad \text{и} \quad C_3 = Q^T A Q. \quad (4)$$

Здесь T — знак транспонирования, P и Q — ортогональные матрицы. При этом $Z = QX_1$ или $Z = QX_2$ соответственно.

В основе метода критических компонент, которым решаются системы (2), лежат обобщенные последовательности

$$\Lambda_{i+1} = q_i - p_i \Lambda_i^{-1} r_i, \quad \Lambda_2 = q_1, i = 2, 3, \dots, m, \quad (5)$$

$$G_{i-1} = q_i - r_{i+1} G_i^{-1} p_{i+1}, \quad G_{m-1} = q_m, i = m-1, \dots, 2, 1, \quad (6)$$

анализ вычислительных свойств которых приведен в [2], [3].

1. Метод критических компонент

Пусть $X_2 = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ и при этом x_i — точные, а \tilde{x}_i — приближенные значения компонент решения X_2 . Имеет место следующая теорема [1].

Теорема 1. Пусть (2) реально представленная в компьютере система линейных алгебраических уравнений. Тогда для вектора X_2 , полученного методом критических компонент, имеют место неравенства

$$\Phi(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = ||y_i| - |p_i \tilde{x}_{i-1} + q_i \tilde{x}_i + r_{i+1} \tilde{x}_{i+1}|| \leq 3\mu(\varepsilon_1), \quad i = \overline{m, 1}, \quad (7)$$

где $\mu(\varepsilon_1)$ — величина порядка ε_1 , ε_1 — относительная погрешность компьютерной вещественной арифметики.

С учетом этой теоремы решение системы (2) находится в виде

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_i^k + \varphi_i^k, \quad (8)$$

где k — номера подпространств, выделяемых условиями (7),

$$\varphi_i^k = -B_{il_{k+1}}^k r_{l_{k+1}} \tilde{x}_{l_{k+1}},$$

$B_{il_{k+1}}^k$ — элементы матриц, обратных подматрицам C_3 порядка $[l_k \times l_k]$ соответственно. Алгоритмическая техника выделения подпространств или, что тоже самое, получение последовательности $\Phi(\tilde{x}_{i-1}^k, \tilde{x}_i^k, \tilde{x}_{i+1}^k)$, подробно приведены в [4]. Здесь же отметим лишь, что в каждом из выделяемых подпространств первые из условий (7), т. е. при $i = l_k$, приобретают в случае матриц C_3 вид

$$\Phi(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i) = ||y_i| - |p_i \tilde{x}_{i-1} + q_i \tilde{x}_i|| \leq 2\mu(\varepsilon_1) \quad (9)$$

и в случае матриц C_2

$$\Phi(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = ||y_i| - |q_i \tilde{x}_i + r_{i+1} \tilde{x}_{i+1}|| \leq 2\mu(\varepsilon_1), \quad (10)$$

$$\Phi(\tilde{x}_i) = ||y_i| - |q_i \tilde{x}_i|| \leq \mu(\varepsilon_1). \quad (11)$$

2. Алгоритм метода критических компонент

С учетом изложенного выше и [1] приведем алгоритм метода критических компонент.

решалась разными численными методами. Точное решение этой системы $X = [1, 1/2, \dots, 1/m]^T$, где m порядок матрицы A . Численные характеристики решения (13) приведены в таблице 2. При этом $\mu_e(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|F\|/\|Z\|$ — естественное число обусловленности, $\mu(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ — стандартное число обусловленности, $\delta_Y = \|AZ - F\|/\|F\|$ — норма невязки, $\delta_Z = \|\tilde{Z} - Z\|/\|Z\|$ — относительная погрешность полученного решения, $\delta_L = \left| \|\tilde{Z}\| - \|Z\| \right| / \|Z\|$ — нижняя граница и $\delta_R = \|A^{-1}\| \delta_Y$ — верхняя граница δ_Z , т. е. $\delta_L \leq \delta_Z \leq \delta_R$. В таблице 2 введены следующие обозначения: MCC — метод критических компонент, GS — модифицированный метод Гаусса [5], QR — QR-метод [6], SVD — метод сингулярного разложения [7] и TRM — метод регуляризации А. Н. Тихонова [8]. Как видно, программа SVD в случае $\mu(A) = 1.042 \cdot 10^{16}$ не работает.

Таблица 2. Сравнительные характеристики метода критических компонент.

m	$\frac{\mu_e(A)}{\mu(A)} = \frac{\ F\ /\ A\ }{\ Z\ }$	PRG	$\frac{\mu_e(A)}{\mu(A)}$	δ_Y	δ_L	δ_Z	δ_R
5	2.819e05/4.766e05= = 0.591499 = =0.7156/1.2098	MCC	0.591499	9.9006e-17	5.1391e-13	5.1423e-12	6.2593e-11
		INV	0.591499	2.6093e-12	1.6122e-12	1.0071e-11	7.3556e-07
		GS	0.591499	1.4851e-16	4.1920e-13	4.3866e-12	6.2593e-11
		QR	0.591499	1.5654e-16	3.8213e-13	3.8582e-12	6.2593e-11
		SVD	0.591499	9.9006e-17	5.1391e-13	5.1422e-12	6.2593e-11
		TRM	0.591499	1.2097e-12	3.7622e-08	3.4097e-07	3.4101e-07
7	2.472e08/4.754e08= =0.519984= =0.6393/1.2296	MCC	0.519984	2.2787e-16	7.6473e-10	1.8579e-08	5.6329e-08
		INV	0.519984	1.0977e-08	8.4635e-09	2.9002e-08	2.7135e+00
		GS	0.519984	1.5899e-16	4.5845e-10	1.0940e-08	5.4888e-08
		QR	0.519984	7.8414e-17	6.8698e-10	1.6747e-08	5.4888e-08
		SVD	0.519984	2.2787e-16	7.6473e-10	1.8579e-08	5.6329e-08
		TRM	0.519984	3.5231e-10	1.1941e-04	8.5994e-02	8.7091e-02
9	2.324e11/4.931e11= =0.519984= =0.6393/1.2296	MCC	0.471181	3.1361e-16	1.3290e-07	8.1191e-06	7.2883e-05
		INV	0.471181	7.0968e-06	2.8738e-08	1.4611e-05	1.6493e+06
		GS	0.471181	1.0653e-16	2.0260e-07	1.2522e-05	5.1602e-05
		QR	0.471181	3.9765e-16	6.1938e-08	3.7432e-06	9.2414e-05
		SVD	0.471181	3.1361e-16	1.3290e-07	8.1191e-06	7.2883e-05
		TRM	0.473976	5.3249e-09	5.8969e-03	8.0065e-02	1.2375e03
10	7.237e12/1.602e13= =0.451896= =0.5626/1.2449	MCC	0.451894	3.5623e-16	3.3404e-06	3.0969e-04	2.5780e-03
		INV	0.451874	8.1412e-05	4.8889e-05	3.8706e-04	5.8918e+08
		GS	0.451896	1.0537e-16	1.7282e-07	2.0302e-05	1.6069e-03
		QR	0.451895	1.0907e-16	7.5591e-07	6.6065e-05	1.6069e-03
		SVD	0.451894	3.5623e-16	3.3404e-06	3.0969e-04	2.5780e-03
		TRM	0.450785	3.5254e-10	2.4637e-03	0.1755e+00	2.5513e+03
11	2.236e14/5.139e14= =0.435041= =0.5430/1.2482	MCC	0.434919	2.4266e-16	2.7999e-04	1.7885e-02	5.4259e-02
		INV	0.435460	3.0501e-03	9.6332e-04	2.4217e-02	6.8200e+11
		GS	0.434914	7.6192e-17	2.9071e-04	1.8310e-02	4.9648e-02
		QR	0.434978	1.7752e-16	1.4385e-04	1.1561e-02	4.9648e-02
		SVD	0.434919	2.4266e-16	2.7999e-04	1.7885e-02	5.4259e-02
		TRM	0.435796	1.2944e-10	1.7339e-03	1.9027e-02	2.8943e+04
12	4.378e15/1.042e16= =0.420137= =0.5256/1.2510	MCC	0.419840	2.0379e-16	7.0755e-04	3.3957e-02	9.7209e-01
		INV	0.407509	4.5442e-02	3.0987e-02	0.3247e+00	1.9895e+14
		GS	0.414575	1.5564e-16	1.3415e-02	0.1688e+00	9.7209e-01
		QR	0.410843	3.7553e-16	2.2621e-02	0.2097e+00	1.6441e+00
		SVD	—	—	—	—	—
		TRM	0.423667	2.0000e-09	8.3322e-03	9.9311e-02	8.7560e+06

Список литературы

- [1] Emel'yanenko G.A., Emelianenko M.G., Rakhmonov T.T., Dushanov E.B. and Konovalova G.Yu. On efficiency of critical-component method for solving degenerate and ill-posed systems of linear algebraic equations. JINR Preprint. E11-98-302, 1998. 31 p.
- [2] G.A. Emel'yanenko, Rakhmonov T.T., Dushanov E.B. Critical-component method for solving systems of linear equations with tridiagonal matrix of the general form, JINR Preprint E11-96-105, 1996. 24 p.; critical-component method solutions of linear equations JINR Preprint E11-96-107, 1996. 21 p.
- [3] Емельяненко Г.А., Душанов Э.Б., Емельяненко М.Г., Рахмонов Т.Т., Сапожников А.П. Машинно-независимый пакет программ JINRLINPACK для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. Препринт ОИЯИ Р11-2000-287, 2000. 47 с.
- [4] Емельяненко и др. Стандарт RUSEEP и плохо обусловленные задачи линейной алгебры. Препринт ОИЯИ Р11-2005-173, 2005. 47 с.
- [5] CERNLIB — CERN Program Library: <http://cernlib.web.cern.ch/cernlib>
- [6] LAPACK — Linear Algebra Package: <http://www.netlib.org>
- [7] Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру (с приложением алгоритмов на ФОРТРАНе). Новосибирск: Наука, 1991.
- [8] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.