

МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 530.12, 517.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО КОЛЛАПСА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ КОВАРИАНТНЫМИ РЯДАМИ В НОРМАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Семыкин А.А., Цирулев А.Н.

кафедра математических методов современного естествознания
(tsirulev@tversu.ru)

Поступила в редакцию 20.01.2009, после переработки 24.03.2009.

Развит новый метод решения задачи Коши для сферически-симметричной системы уравнений Эйнштейна. Метод основан на аналитическом продолжении начальных данных вдоль геодезических с помощью ковариантных рядов в нормальных координатах. Мы используем этот метод для изучения сферически-симметричного коллапса вещественного гравитирующего скалярного поля с минимальной связью в асимптотически плоском пространстве-времени. Полученные результаты хорошо согласуются с теорией критических явлений в гравитационном коллапсе. Показано также, что на ранних стадиях коллапса образуются два горизонта.

A new method for solving the Cauchy problem for the spherically symmetric Einstein equations is developed. The method is based on analytical continuation of initial data along geodesics by means of covariant series in normal coordinates. We use this method to study the spherically symmetric collapse of real, minimally coupled gravitating scalar fields in an asymptotically flat spacetime. The obtained results are in good agreement with the theory of critical phenomena in gravitational collapse. In addition it is shown that there are two horizons at an early stage of collapse.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, скалярное поле, задача Коши, горизонт событий.

Keywords: Einstein equations, scalar field, Cauchy problem, event horizon.

Введение

В математическом моделировании нестационарных гравитирующих систем важное место занимает проблема гравитационного коллапса вещественных скалярных полей, поскольку на их существование в галактических и космологических масштабах косвенно указывают современные астрономические наблюдения. Современный анализ этой проблемы дан в обзорах [1, 2, 3, 4] и в цитированных там

работах. Численные эксперименты в различных вариантах показывают, что ограниченное распределение скалярного поля в процессе эволюции либо образует черную дыру, либо рассеивается на пространственной бесконечности. Пространство допустимых начальных условий разделяется на соответствующие подпространства границей, которую в любой точке можно пересечь однопараметрическим семейством начальных условий так, что только те начальные условия, у которых параметр не превышает граничное значение, приводят к образованию черной дыры. Коллапс скалярного поля с начальными данными вблизи граничной точки, впервые изученный в работах [5, 6], называется критическим и обладает рядом характерных свойств, которые не зависят от выбора точки и однопараметрического семейства.

Все основные результаты для критического гравитационного коллапса получены для безмассового скалярного поля посредством численного решения задачи Коши для уравнений Эйнштейна с регулярными начальными данными в сферически-симметричном случае. Такой подход фиксирует появление в процессе эволюции видимого (apparent) горизонта и является локальным по своей сути, в то время как геометрия пространства-времени предполагает глобальное описание, например, горизонта событий и внутренней области вплоть до сингулярности. Поэтому интерпретация численных решений встречает серьезные трудности, которые получили общее название «global versus local» [7, 8, 9]. В частности, предельная конфигурация, возникающая в отдаленном будущем (по часам внешнего наблюдателя) после образования горизонта, в принципе не может быть установлена посредством численного решения; отметим, что она не является стационарной, поскольку для безмассового скалярного поля стационарными могут быть только голые сингулярности [10, 11, 12]. Кроме того, было установлено [13], что некоторые из допустимых начальных данных приводят к появлению голых сингулярностей, т. е. отмеченная выше альтернатива не верна. Поскольку точные решения, по-видимому, недостижимы, качественное описание глобальной геометрии возможно только с помощью совместного использования различных численных методов, наилучшим образом отражающих отдельные аспекты проблемы.

Целью данной работы является исследование математических моделей гравитационного коллапса сферически-симметричных асимптотически плоских конфигураций гравитирующего скалярного поля с минимальной связью. Мы развиваем принципиально новый подход к решению задачи Коши для уравнений Эйнштейна, основанный на аналитическом продолжении решения с начальной гиперповерхности вдоль геодезических посредством ковариантных рядов в нормальных координатах [14]. Метод ковариантных рядов имеет отдельные преимущества по сравнению с численными методами, основанными на конечно-разностной аппроксимации производных. Во-первых, нормальная окрестность начальной гиперповерхности всегда существует, а вырождение нормальных координат в фокальных точках легко контролируется; напротив, при другом выборе координат отделение истинных сингулярностей от координатных является непростой задачей. Во-вторых, в отличие от конечно-разностных методов, метод ковариантных рядов универсален и работает одинаково для безмассовых и нелинейных скалярных полей с произвольным потенциалом самодействия. Наконец, предлагаемый метод допускает естественные апостериорные оценки точности, сходимости и устойчивости. Отметим, что применение метода ковариантных рядов к решению эволю-

ционных задач теории гравитации стало возможным только благодаря развитию компьютерной алгебры и появлению эффективных систем аналитических вычислений.

В первом разделе рассмотрена естественная постановка задачи Коши для уравнений Эйнштейна и проведена редукция полной системы с выделением уравнений связи и эволюционных уравнений. Во втором разделе обсуждается выбор калибровочных условий, рассмотрена конкретная схема вычисления коэффициентов ковариантных рядов и решена задача построения регулярных начальных условий на заданной пространственноподобной гиперповерхности. В третьем разделе обсуждаются детали вычислительной схемы, критерии появления горизонта и результаты численных расчетов. В заключительном разделе приведен краткий анализ полученных результатов и перспектив дальнейшего развития метода ковариантных рядов.

1. Редукция уравнений

Современный подход к постановке задачи Коши для уравнений Эйнштейна в общем виде и в применении к проблеме гравитационного коллапса рассмотрен в работах [15, 16, 17, 8]. Из связанной системы уравнений Эйнштейна выделяются эволюционные уравнения и уравнения связи, вместе составляющие редуцированную систему, эквивалентную исходной. Начальные данные для системы эволюционных уравнений, в которую, как правило, входят и материальные динамические уравнения, задаются на некоторой пространственноподобной гиперповерхности таким образом, что уравнения связи на этой гиперповерхности выполняются тождественно. Тогда решения эволюционных уравнений в области их существования и единственности будут автоматически удовлетворять уравнениям связи.

В принципе эта программа может быть реализована, по крайней мере локально, для любой гравитирующей системы, однако явная постановка задачи Коши существенно зависит от симметрии системы и выбора калибровочных (координатных) условий, определяющих вид уравнений Эйнштейна. В данном и следующем разделе рассмотрена постановка задачи Коши, которую мы будем называть *естественной*, для асимптотически плоского, сферически-симметричного пространства-времени на примере гравитирующего скалярного поля; выбор конкретного источника гравитации не снижает, как будет видно, общности рассуждений. В литературе не отражены приведенные ниже детали естественной постановки, возможно потому, что она не является оптимальной для применения разностных схем.

Полное действие и соответствующий тензор энергии-импульса для такой системы имеют вид

$$\Sigma = \frac{1}{8\pi} \int \left(-\frac{1}{2} S + \mathcal{L}_\phi \right) \sqrt{|g|} d^4x, \quad \mathcal{L}_\phi = \langle d\phi, d\phi \rangle - 2V(\phi), \quad (1)$$

$$T = 2 d\phi \otimes d\phi - (\langle d\phi, d\phi \rangle - 2V(\phi)) g,$$

где используется геометрическая система единиц ($G = 1, c = 1$), скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение относительно метрики, S – скалярная кривизна, $V(\phi)$ – потенциал самодействия.

Следуя работе [18], метрику сферически-симметричного пространства-времени запишем в виде

$$g = A^2 dt \otimes dt - B^2 dr \otimes dr - C^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi), \quad (2)$$

оставляя свободу в выборе калибровочных (координатных) условий, и будем использовать далее ортонормированный базис векторных полей

$$e_0 = \frac{1}{A} \partial_t, \quad e_1 = \frac{1}{B} \partial_r, \quad e_2 = \frac{1}{C} \partial_\theta, \quad e_3 = \frac{1}{C \sin \theta} \partial_\varphi,$$

и дуальный базис 1-форм

$$e^0 = A dt, \quad e^1 = B dr, \quad e^2 = C d\theta, \quad e^3 = C \sin \theta d\varphi,$$

где метрические функции A, B, C и поле ϕ зависят только от t и r . Производные по направлению базисных векторных полей будут, как обычно, обозначаться соответствующими нижними индексами в круглых скобках, расположенными в обратном порядке, например, $e_0 \phi \equiv \phi_{(0)} = (1/A) \partial_t \phi$, $e_0 e_1 C \equiv C_{(1)(0)} = (1/A) \partial_t \{(1/B) \partial_r C\}$.

В сферически-симметричном случае нестационарная система уравнений Эйнштейна для действия (1) содержит пять алгебраически независимых уравнений

$$G_{00} = T_{00} : \quad -2 \frac{C_{(1)(1)}}{C} + 2 \frac{B_{(0)} C_{(0)}}{BC} - \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} = \phi_{(0)}^2 + \phi_{(1)}^2 + 2V, \quad (3)$$

$$G_{11} = T_{11} : \quad -2 \frac{C_{(0)(0)}}{C} + 2 \frac{A_{(1)} C_{(1)}}{AC} + \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} = \phi_{(0)}^2 + \phi_{(1)}^2 - 2V, \quad (4)$$

$$G_{22} = T_{22} : \quad \frac{A_{(1)(1)}}{A} - \frac{B_{(0)(0)}}{B} + \frac{C_{(1)(1)}}{C} - \frac{C_{(0)(0)}}{C} + \frac{A_{(1)} C_{(1)}}{AC} - \frac{B_{(0)} C_{(0)}}{BC} = \phi_{(0)}^2 - \phi_{(1)}^2 - 2V, \quad (5)$$

$$G_{01} = T_{01} : \quad -2 \frac{C_{(0)(1)}}{C} + 2 \frac{B_{(0)} C_{(1)}}{BC} \equiv -2 \frac{C_{(1)(0)}}{C} + 2 \frac{A_{(1)} C_{(0)}}{AC} = 2\phi_{(0)} \phi_{(1)}, \quad (6)$$

$$\square \phi + V'_\phi = 0 : \quad \phi_{(0)(0)} - \phi_{(1)(1)} + \phi_{(0)} \frac{(BC^2)_{(0)}}{BC^2} - \phi_{(1)} \frac{(AC^2)_{(1)}}{AC^2} + V'_\phi = 0. \quad (7)$$

Тензорное поле $\Upsilon = G - T$ удовлетворяет тождеству (закону сохранения)

$$\Upsilon_{ij; k} g^{jk} = 0, \quad (8)$$

поскольку поля G и T удовлетворяют ему вследствие свернутых тождеств Бианки и, соответственно, выполнения динамического уравнения (7). Для метрики (2)

тождество (8) содержит три нетривиальных компоненты, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
 (\Upsilon_{00})_{(0)} + \frac{B_{(0)}}{B}(\Upsilon_{00} + \Upsilon_{11}) + \frac{C_{(0)}}{C}(2\Upsilon_{00} + \Upsilon_{22} + \Upsilon_{33}) - \\
 - (\Upsilon_{01})_{(1)} - 2\frac{(AC)_{(1)}}{AC}\Upsilon_{01} = 0, \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Upsilon_{11})_{(1)} + \frac{A_{(1)}}{A}(\Upsilon_{00} + \Upsilon_{11}) + \frac{C_{(1)}}{C}(2\Upsilon_{11} - \Upsilon_{22} - \Upsilon_{33}) - \\
 - (\Upsilon_{01})_{(0)} - 2\frac{(BC)_{(0)}}{BC}\Upsilon_{01} = 0, \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$\Upsilon_{22} = \Upsilon_{33}. \tag{11}$$

Уравнения Эйнштейна имеют вид $\Upsilon = 0$. Если уравнения (4) и (5) выполнены, т. е. $\Upsilon_{11} = 0$ и $\Upsilon_{22} = 0$, то $\Upsilon_{33} = 0$ в силу (11). Поэтому (9) и (10) примут вид

$$(\Upsilon_{00})_{(0)} + \frac{(BC^2)_{(0)}}{BC^2}\Upsilon_{00} - (\Upsilon_{01})_{(1)} - 2\frac{(AC)_{(1)}}{AC}\Upsilon_{01} = 0, \tag{12}$$

$$-(\Upsilon_{01})_{(0)} + \frac{A_{(1)}}{A}\Upsilon_{00} - 2\frac{(BC)_{(0)}}{BC}\Upsilon_{01} = 0. \tag{13}$$

Далее, если уравнения $\Upsilon_{00} = 0$ и $\Upsilon_{01} = 0$ выполняются на некоторой пространственноподобной гиперповерхности (например $t = const$), то производные по t любого порядка от функций Υ_{00} и Υ_{01} равны нулю на этой гиперповерхности: это легко получить, дифференцируя по t соотношения (12) и (13). Поэтому уравнения $\Upsilon_{00} = 0$ и $\Upsilon_{01} = 0$ выполняются в некоторой окрестности этой пространственноподобной гиперповерхности. В задаче Коши эти уравнения носят характер связей между начальными условиями.

Тем не менее, система эволюционных уравнений (4), (5) и (7) не подходит для естественной постановки задачи Коши, поскольку она не разрешена относительно старших производных по времени от метрических функций B и C . Удобно выбрать в качестве эволюционных уравнений линейные комбинации

$$\Upsilon_{22} + \frac{1}{2}(\Upsilon_{00} - \Upsilon_{11}) = 0, \quad \frac{1}{2}(\Upsilon_{00} + \Upsilon_{11}) = 0, \tag{14}$$

а также уравнение (7), поскольку каждое из них содержит вторые производные по времени только от одной из неизвестных функций B , C и ϕ . Повторяя с незначительными изменениями рассуждения предыдущего абзаца, нетрудно увидеть, что уравнения $\Upsilon_{00} = 0$ и $\Upsilon_{01} = 0$ являются уравнениями связи для выбранных эволюционных уравнений.

В эволюционные уравнения входит неизвестная функция $A(r)$ и ее производные по времени не выше первого порядка. Можно в общем случае показать, что эта метрическая функция полностью определяется начальными данными, но алгоритм ее вычисления существенно зависит от метода решения задачи Коши. В методе аналитического продолжения решения ковариантными рядами мы можем выбрать на начальной гиперповерхности I_0 любую регулярную функцию $A(r)$, удовлетворяющую асимптотическому условию $A \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, а затем взять векторы $e_0 = (1/A(r))\partial_t|_{I_0}$ за начальные условия для геодезических. Тогда вдоль

геодезической, проходящей через точку $(r, \theta, \varphi)_{I_0}$ в направлении вектора e_0 , функция A будет постоянной.

2. Постановка задачи Коши

Для применения метода ковариантных рядов в нормальных координатах выбор калибровочных условий на начальной гиперповерхности заранее, т. е. до вычисления коэффициентов рядов, не является необходимым, что придает дополнительную гибкость вычислительной схеме. С другой стороны, коэффициенты ковариантного ряда суть суммы произведений компонент ковариантных производных кривизны [14], в которых число слагаемых быстро (в общем случае – при отсутствии симметрий – факториально) растет с ростом степени ряда, поэтому выбор конкретной калибровки существенно упрощает формулы и снижает требования к вычислительным ресурсам.

В данной работе мы принимаем гиперповерхность $t = 0$ в качестве начальной и сразу накладываем первое из двух калибровочных условий, полагая $A = 1$. При этом линии времени автоматически являются геодезическими и, следовательно, $A = 1$ всюду в области существования решения. Кроме того, формальные степенные ряды по переменной t с коэффициентами, вычисленными из уравнений Эйнштейна, будут искомыми ковариантными рядами. Прямая проверка показывает, что ковариантные ряды, вычисленные по явным формулам из работы [14], имеют тот же самый вид. Мы считаем этот результат весьма важным, поскольку он является прямой проверкой общих формул в частном случае.

Рассмотрим подробно естественную постановку задачи Коши и детали вычислительной схемы. Эволюционные уравнения (14) и (7), разрешенные относительно вторых производных по времени, в выбранной калибровке принимают вид

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{C'^2}{B^2 C^2} - \frac{\dot{C}^2}{C^2} - \frac{1}{C^2} + \dot{\phi}^2 - \frac{\phi'^2}{B^2} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{1}{BC} \left(\frac{C'}{B} \right)' - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \dot{\phi}^2 + \frac{\phi'^2}{B^2} = 0, \quad (16)$$

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{B} \left(\frac{\phi'}{B} \right)' + \dot{\phi} \left(\frac{\dot{B}}{B} + 2 \frac{\dot{C}}{C} \right) - 2 \frac{\phi' C'}{B^2 C} + V'_\phi = 0, \quad (17)$$

где точка и штрих обозначают производные по t и r соответственно. Шесть начальных условий должны быть заданы для трех неизвестных функций и их первых производных по времени:

$$\begin{aligned} B(0, r) = b_0(r), \quad \dot{B}(0, r) = b_1(r), \quad C(0, r) = c_0(r), \quad \dot{C}(0, r) = c_1(r) \\ \phi(0, r) = \phi_0(r), \quad \dot{\phi}(0, r) = \phi_1(r) \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения связи (3) и (6) для системы (15) – (17) имеют вид

$$\frac{2}{BC} \left(\frac{C'}{B} \right)' - 2 \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{C'^2}{B^2 C^2} - \frac{\dot{C}^2}{C^2} - \frac{1}{C^2} + \dot{\phi}^2 + \frac{\phi'^2}{B^2} + 2V = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\dot{C}'}{C} - \frac{\dot{B}C'}{BC} + \dot{\phi}\phi' = 0 \quad (20)$$

и не содержат вторых производных по времени, что существенно в дальнейшем.

Подстановка формальных рядов

$$B = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots, \quad C = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots, \quad \phi = \phi_0 + \phi_1 t + \phi_2 t^2 + \dots, \quad (21)$$

в эволюционные уравнения (15) – (17) приводит к расцепленной алгебраической системе уравнений для коэффициентов рядов. Коэффициенты при степенях $n \geq 2$ выражаются через начальные условия (19). Например, для безмассового скалярного поля ($V(\phi) = 0$) первые члены разложений (21) принимают вид

$$B = b_0 + b_1 t + \frac{1}{2} \left(\frac{b_0}{c_0^2} (c_1^2 + 1) - \frac{c_0''^2}{b_0 c_0^2} + \frac{\phi_0''^2}{b_0} - b_0 \phi_1^2 \right) t^2 + \dots, \quad (22)$$

$$C = c_0 + c_1 t + \frac{1}{2} \left(\frac{b_0' c_0'}{b_0^3} - \frac{c_0''}{b_0^2} + \frac{b_1 c_1}{b_0} - \frac{c_0 \phi_0'^2}{b_0^2} - c_0 \phi_1^2 \right) t^2 + \dots, \quad (23)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 t + \frac{1}{2} \left(2 \frac{c_0' \phi_0'}{b_0^2 c_0} - \frac{b_0' \phi_0'}{b_0^3} + \frac{\phi_0''}{b_0^2} - \frac{b_1 \phi_1}{b_0} - 2 \frac{c_1 \phi_1}{c_0} \right) t^2 + \dots \quad (24)$$

Эти ряды должны обращать в тождества уравнения связи (19) и (20). В практических вычислениях это означает следующее: разложения (22) – (24) с точностью до членов порядка t^n подставим в уравнения связи и разложим левые части этих уравнений в ряды Тейлора по переменной t в точке $t = 0$; в каждом из рядов первые $n - 1$ членов должны быть равны нулю. Для выполнения данного условия, как в точной, так и в приближенной формулировке, необходимо и достаточно выполнение уравнений связи на гиперповерхности $t = 0$. В общем случае вопрос о разрешимости уравнений связи и выборе независимых начальных условий оказывается очень сложным [15, 1, 19], но в нашей постановке он допускает полное аналитическое исследование с помощью методов, развитых для поиска стационарных решений [12, 20].

Два уравнения связи накладывают ограничения на произвольный выбор начальных условий, поэтому из шести начальных условий (19) независимыми являются четыре. Кроме того, нам необходимо наложить второе калибровочное условие на начальной гиперповерхности, выбрав монотонно возрастающую функцию $C(0, r)$. Таким образом, в естественной постановке задачи Коши в общем случае содержательными в геометрическом смысле, т. е. в смысле независимости результатов от произвола в выборе координат, являются только три начальных условия. Для безмассового скалярного поля их число можно эффективно уменьшить до двух посредством редукции системы (3) – (7) с новыми независимыми переменными, которые являются функциями метрики, поля и их первых производных [1, 5, 3], однако при этом возникает проблема контроля асимптотических условий.

Для изучения эволюции регулярных начальных конфигураций гравитирующего скалярного поля удобно выбрать стандартное калибровочное условие $C(0, r) \equiv c_0(r) = r$. Тогда уравнения связи на начальной гиперповерхности очевидными преобразованиями приводятся к виду

$$\left(\frac{1}{b_0^2}\right)' + \left(\frac{1}{r} + r\phi_0'^2\right)\frac{1}{b_0^2} = 2c_1\frac{b_1}{b_0} + \frac{1+c_1}{r} - r\phi_1^2 - 2rV(\phi_0), \quad \frac{b_1}{b_0} = c_1' + r\phi_0\phi_1. \quad (25)$$

Исключим b_1/b_0 из правой части первого уравнения. Решение полученного уравнения, ограниченное на бесконечности, дается формулой

$$\frac{1}{b_0^2} = \frac{1}{e^F} \left[1 + \frac{1}{r} \int_r^\infty (1 - g e^F) dr \right], \quad (26)$$

где

$$g(r) = 1 + (rc_1^2)' + r^2 (2c_1\phi_0\phi_1 - \phi_1^2 - 2rV(\phi_0)), \quad F(r) = - \int_r^\infty \phi_0'^2 r dr. \quad (27)$$

Все возможные начальные условия исчерпываются перебором только трех независимых начальных условий $\phi_0(r)$, $\phi_1(r)$, $c_1(r)$, которые должны достаточно быстро, например, как $O(1/r^2)$, убывать при $r \rightarrow \infty$. Уточнение асимптотики начальных условий зависит от конкретного вида потенциала. Далее всюду мы полагаем $\phi = 0$ основным вакуумным состоянием поля и считаем выполненным условие $V(\phi) = O(\phi^2)$ при $\phi \rightarrow 0$. Начальные условия $b_0(r)$ и $b_1(r)$, находим по формуле (26) и второму уравнению (25) соответственно, причем $b_0 \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$.

3. Численные модели коллапса

Мы используем инвариантный метод качественной характеристики геометрии пространства-времени и индикации появления горизонта в процессе эволюции, предложенный в работе [12]. Метод основан на вычислении характеристической функции $f(t, r) = - \langle dC, dC \rangle \equiv C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2$, отличающаяся знаком от скалярного квадрата 1-формы dC , которая в каждой точке дуальна вектору нормали к гиперповерхности $C(t, r, \theta, \varphi) = \text{const}$. Функция $C(t, r)$ является инвариантной относительно любых преобразований вида $(t, r) \mapsto (t', r')$, не затрагивающих угловых координат, поэтому с четырёхмерной точки зрения 1-форма dC и характеристическая функция f также являются инвариантами. Гиперповерхность, определенная уравнением $f = 0$, является горизонтом (при дополнительных условиях – горизонтом событий), поскольку в каждой ее точке 1-форма dC изотропна.

Появление в конгруэнции геодезических фокальных точек, ограничивающих область существования нормальной системы координат вследствие их вырождения, контролируется посредством решения уравнения Якоби (девиации геодезических) $\nabla_{e_0}^2 \mathbf{x} - R(e_0, \mathbf{x})e_0 = 0$, где $\mathbf{x} = \xi(t, r)e_1$ – радиальный вектор девиации соседних геодезических. В нашей калибровке $\nabla_{e_0} e_1 = 0$, $e_0 = \partial_t$ и $R_{0101} = \ddot{B}/B$, поэтому задача Коши для уравнения Якоби примет вид

$$\ddot{\xi} - \xi \ddot{B}/B = 0, \quad \xi(0, r) = 1, \quad \dot{\xi}(0, r) = 0, \quad (28)$$

а условие $\xi(t^*, r) = 0$ означает появление фокальной точки и непродолжимость нормальной системы координат в окрестности геодезической, отмеченной постоянными координатами r, θ, φ , для моментов времени $t > t^*$ при $t^* > 0$, или $t < t^*$ при $t^* < 0$.

Для расчетов применяется несколько этапов многошаговой вычислительной схемы с аппроксимацией решения рядами (22) – (24) в моменты времени $0 < t_1 < t_2 \dots$, реализованной в пакете символьных вычислений *Maple10* с точностью до членов порядка t^{16} . На каждом этапе разложений новые начальные данные определяются на новой гиперповерхности $t = t_k$, полученной максимальным локально-кусочным продолжением вдоль геодезических. Сходимость рядов и устойчивость вычислительной схемы контролируется посредством апостериорных оценок, включая, в частности, оценку точности выполнения уравнений связи на новой начальной гиперповерхности.

Мы исследовали ряд моделей сферически-симметричного гравитационного коллапса безмассовых и нелинейных скалярных полей, с естественными начальными условиями $\phi_0(r), \phi_1(r), c_1(r)$, которые убывают как $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$ и, кроме того, $\phi_1(r), c_1(r)$ убывают как $O(r^2)$ при $r \rightarrow 0$, а $\phi_0(r)$ ограничена. Полученные результаты позволяют сделать следующие качественные выводы, которые, по-видимому, справедливы для всех допустимых типов потенциалов и естественных начальных данных.

1. Эволюция гравитирующей конфигурации с естественными начальными условиями приводит либо к образованию горизонта событий, либо к рассеянию первоначального возмущения на пространственной бесконечности. Любое однопараметрическое семейство естественных начальных условий либо одинаково эволюционирует для всех значений параметра, либо разделяется по типу эволюции некоторым критическим значением параметра. Соответствующее критическое решение имеет вид промежуточного аттрактора, в том смысле, что гравитирующая конфигурация длительное время находится в состоянии, близком к образованию горизонта, а затем коллапсирует или рассеивается, причем неопределенность вызвана погреш-

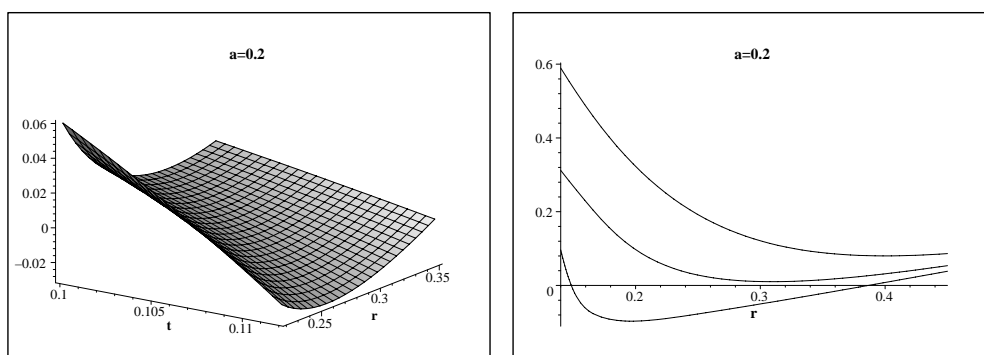


Рис. 1: Типичная картина гравитационного коллапса. Слева: график характеристической функции $f(t, r)$ в области образования горизонта для однопараметрического семейства начальных данных (29) при значении параметра $a = 0.2$. Второй шаг вычислений. Справа: сечения графика $f(t, r)$ (сверху вниз) в моменты времени $t = 0.100, t = 0.105, t = 0.110$ соответственно.

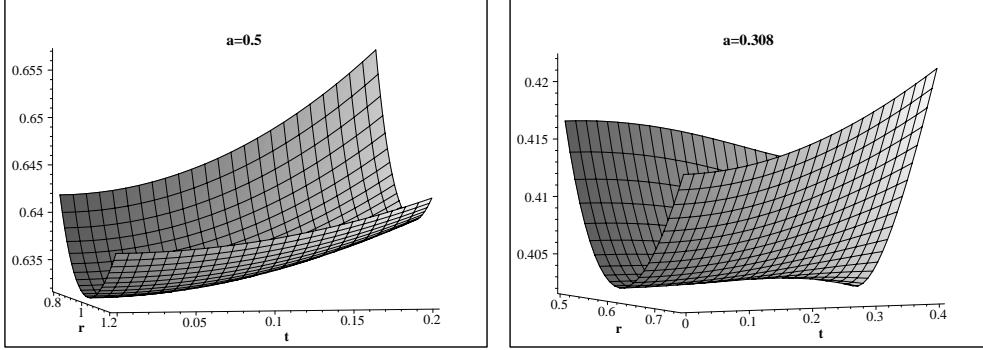


Рис. 2: Графики характеристических функций $f(t, r)$ при значениях параметра $a = 0.5$ и $a = 0.308$. Слева: рассеяние первоначального возмущения скалярного поля; для достаточно больших значений t функция $f(t, r)$ близка к постоянному значению 1 для всех $0 < r < \infty$ (плоское пространство-время). Справа: критический гравитационный коллапс (промежуточный аттрактор).

ностью вычислений.

2. В процессе коллапса вначале образуется экстремальный (вырожденный) горизонт в некоторой точке (t_h, r_h) , характеризующейся условием $f(t_h, r_h) = 0$. Всюду в полосе $0 < t < t_h$, $0 \leq r < \infty$ характеристическая функция $f(t, r)$ непрерывна, положительна и имеет асимптотику $f(t, 0) = f(t, \infty) = 1$, что соответствует регулярному решению без горизонта. При $t > t_h$ горизонт становится двойным, т. е. $f(t, r_1(t)) = 0$, $f(t, r_2(t)) = 0$, причем радиусы горизонтов удовлетворяют условию $0 < r_1(t) < r_2(t)$. По крайней мере в некотором интервале (t_h, t_1) , где вычисления все еще остаются корректными, функции $f(t, r_1(t)) = 0$ и $f(t, r_2(t)) = 0$ соответственно монотонно убывают и возрастают.

На рис. 1–2 приведены результаты численных расчетов для однопараметрического семейства начальных данных

$$c_0 = r, \quad c_1 = 0, \quad \phi_0 = 0, \quad \phi_1 = \frac{\sqrt{2a} e^{-a/r}}{r^2}, \quad b_0 = \left(1 - \frac{e^{-2a/r}}{r}\right)^{-1/2}, \quad b_1 = 0, \quad (29)$$

которые легко проверяются и иллюстрируют образование горизонта, рассеяние первоначального возмущения и критическое решение для безмассового ($V(\phi) = 0$) скалярного поля. Из формул (22) – (24) и (29) следует, что $B^2 = 1 - 1/r + o(1/r)$ при $r \rightarrow 0$, поэтому решения семейства для всех значений параметра a обладают шварцшильдовой массой, равной 0.5 (т. е. G/c^2 в обычных единицах).

Заключение

Мы рассмотрели естественную постановку задачи Коши для уравнений Эйнштейна и применили метод ковариантных рядов в нормальных координатах для ее решения в случае гравитирующих скалярных полей с регулярными начальными данными. Основным результатом является получение детальной картины образования двух горизонтов, которая существенно дополняет результаты, полученные

другими методами. Однако, мы не можем отождествить внешний и внутренний горизонты с горизонтом событий и горизонтом Коши соответственно до тех пор, пока не будет известна, хотя бы качественно, глобальная геометрия пространства-времени. По той же причине детали образования сингулярности, характеризующейся бесконечно большими отрицательными значениями характеристической функции вблизи центра, пока остаются за рамками возможностей собственно метода ковариантных рядов. Полученные результаты также подтверждают существование критических решений, содержащих промежуточный аттрактор в смысле теории динамических систем, хотя такие их свойства, как дискретная автомодельность и закон скейлинга для массы черной дыры [4, 5], не рассматривались в данной работе. В то же время, не менее важным результатом является апробация метода ковариантных рядов, проверка его эффективности, а также недостатков и преимуществ по сравнению с конечно-разностными методами, поскольку перспективы дальнейшего исследования коллапса гравитирующих полей связаны с совместным использованием различных численных методов.

Список литературы

- [1] Christodoulou D. Global existence of generalised solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar equations in the large// Commun. Math. Phys., 1986. V. 106, p. 587–621.
- [2] Choptuik M.W. Critical behavior in gravitational collapse//Prog. Theor. Phys. Suppl., 1999. V. 136, p. 353–365.
- [3] Hamadré R.S., Stewart J.M. The spherically symmetric collapse of a massless scalar field// Class. Quantum Grav. 1996. V. 13, p. 497–512 (arXiv: gr-qc/9506044).
- [4] Gundlach C. Critical phenomena in gravitational collapse//Phys. Rep., 2003. V. 376, p. 339–405 (arXiv: gr-qc/0210101).
- [5] Choptuik M.W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field//Phys. Rev. Lett., 1993. V. 70, p. 9–12.
- [6] Choptuik M.W. The (Unstable) Threshold of Black Hole Formation// Proc. 15th Int. Conf. Gen. Relativ. Grav.(GR-15), Pune, India, 1997. P. 67–85 (arXiv: gr-qc/9803075).
- [7] Christodoulou D. A mathematical theory of gravitational collapse//Commun. Math. Phys. 1987. V. 109, p. 613–647.
- [8] Thornburg J. Event and Apparent Horizon Finders for 3+1 Numerical Relativity//Liv. Rev. Relativity, 2007. V. 10, 67 p. (www.livingreviews.org)
- [9] Jaramillo J.L., Kroon J.A.V., Gourgoulhon E. From Geometry to Numerics: interdisciplinary aspects in mathematical and numerical relativity//Workshop «From Geometry to Numerics». Paris, 20-24 November, 2006. (arXiv: gr-qc/0712.2332).

- [10] Фишер И.З. Поле скалярного мезона с учетом гравитационных эффектов// ЖЭТФ, 1948. Т. 18, с. 636 – 640 (arXiv: gr-qc/9911008).
- [11] Bronnikov K.A. Scalar-tensor theory and scalar charge// Acta. Phys. Pol., 1973. V. B4. P. 251 – 266.
- [12] В.В. Никонов, А.Н. Цирулев, Ю.В. Чемарина. Асимптотически-плоские решения уравнений эйнштейна для гравитирующего сферически-симметричного скалярного поля// Вестник ТвГУ, сер. Прикладная математика, 2007. №5(33), с. 11 – 20.
- [13] Christodoulou D. Examples of naked singularity formation in the gravitational collapse of a scalar field//Ann. of Math., 1994. V. 140, p. 607-653.
- [14] Цирулев А.Н. Аналитическое продолжение тензорных полей ковариантными рядами Тейлора//Теор. матем. физика, 1995. Т.102, с. 337 - 344.
- [15] Choquet-Bruhat Y., Geroch R. Global aspects of the Cauchy problem in general relativity//Commun. Math. Phys., 1969. V. 14, p. 329–335.
- [16] Rendall A.D. Reduction of the characteristic initial value problem to the Cauchy problem and its applications to the Einstein equations// Proc. R. Soc. A, London, 1990. V. 427, p. 221–239.
- [17] Szilragyi B., Winicour J. Well-posed initial-boundary evolution in general relativity// Phys.Rev. D, 2003. V. 68, 041501.
- [18] Tsurulev A.N. Curvature decomposition and the Einstein-Yang-Mills equations//Particles and Nuclei Lett., JINR, 2004. V. 1, p. 99 – 102.
- [19] Choquet-Bruhat Y., Isenberg J., Pollack D. The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds// Class. Quantum Grav., 2007. V. 24, p. 809–828.
- [20] Nikonov V.V., Tchemarina Ju. V, Tsurulev A.N. A two-parameter family of exact asymptotically flat solutions to the Einstein-scalar field equations//Class. Quantum Grav., 2008. V. 25, 138001.