УДК 539.3

ДИСКРЕТНАЯ И ОБОБЩЕННО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МИКРОПОЛЯРНАЯ МОДЕЛИ ПЛОСКОЙ СТРУКТУРНОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Васильев А.А.[1]**, Мирошниченко А.Е.**[2]
[1]кафедра математического моделирования,
Тверской государственный университет, г. Тверь
(*Aleksey.Vasiliev@tversu.ru*)
[2]центр нелинейной физики, исследовательская школа физических
и инженерных наук, Австралийский национальный университет, г. Канберра

Поступила в редакцию 23.01.2009, после переработки 17.02.2009.

Построена однополевая микрополярная модель для анализа длинноволновых форм потери устойчивости решетки с прямоугольной ячейкой периодичности. Анализом в одномерном случае показано, что однополевая модель не описывает коротковолновые формы потери устойчивости. Показано, что как длинноволновые, так и коротковолновые формы потери устойчивости описывает двухполевая модель.

Single-field micropolar model for analysis of long wavelength form in plane loss of stability for lattice is derived. By using of an analysis in one-dimensional case, it is shown, that the single-field model does not describe losses of a stability with the short-wave form. It is shown, that losses of stability with long wavelength and short wave forms may be described by using two-field model.

Ключевые слова: решетка, устойчивость, многополевая микрополярная модель, коротковолновые решения.
Keywords: lattice, stability, multi-field micropolar model, long wavelength solutions.

Введение

Необходимость учета в рамках континуальной механики особых эффектов, обусловленных внутренней структурой, требует разработки обобщенных моделей. Физический подход к формулировке базовых идей для построения таких моделей состоит в анализе и дальнейшем обобщении исходных гипотез, принимаемых в классических моделях, или отказе от некоторых из них. Введение дополнительно к полю перемещений классической теории упругости поля вращений привело к микрополярным моделям (моделям Коссера) [1], введение для описания деформаций структурной системы многих взаимопроникающих взаимодействующих полей – к многополевым моделям [2, 3].

В статье строится обобщение однополевой длинноволновой модели Сана-Янга [4], учитывающее дополнительно внутренние нагрузки в соединяющих элементах системы. Учет таких дополнительных напряжений важен для обеспечения возможности моделирования потери устойчивости из-за внутренних напряжений механического, теплового, электромагнитного, химического происхождений в системе. Построена одномерная двухполевая микрополярная модель. Показано, что разработка таких моделей открывает путь для моделирования коротковолновых форм потери устойчивости, которые характерны для реальных систем и реализуются при поверхностной потере устойчивости слоя на достаточно жестком основании или при потере устойчивости прослоя в жесткой среде, однако не описываются в рамках однополевой теории.

1. Дискретная модель

Рассматривается решетка с размером сторон прямоугольных ячеек L_1, L_2 с внутренними напряжениями P_1, P_2 в соединяющих узлы элементах балочного типа.

При построении дискретной модели для соединяющего элемента системы учитываем потенциальную энергию продольной деформации и изгиба элементов, а также работу сил P при изменении длины элемента на величину ΔL:

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^L AE\left(u'_x\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^L EI\left(v''_{xx}\right)^2 dx, \\ E_P &= -P\Delta L, \quad \Delta L = L - \int\limits_0^L \sqrt{1-\left(v'_x\right)^2}dx \approx \int\limits_0^L \frac{1}{2}\left(v'_x\right)^2 dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Выражения (1) приведены в локальной системе координат с использованием стандартных обозначений: L - длина, A - площадь поперечного сечения, I - момент инерции, E - модуль Юнга балочного конечного элемента, $u\left(x\right)$, $v\left(x\right)$ - продольные и поперечные смещения в соединяющих элементах.

Для аппроксимации внутренних смещений в локальной системе координат используем обычно используемые в методе конечных элементов линейные для продольных и кубические для поперечных перемещений полиномиальные выражения, определяющие компоненты перемещений в элементе через соответствующие компоненты перемещений для узлов [5]

$$\begin{gathered} u\left(x\right) = u_0\left(1-\xi\right) + u_1\xi, \quad \xi = x/L, \\ v\left(x\right) = v_0 + \xi^2\left(3-2\xi\right)\left(v_1-v_0\right) + \xi\left(1-\xi\right)L\left[\left(1-\xi\right)\omega_0 - \xi\omega_1\right]. \end{gathered}$$

При такой аппроксимации в глобальной системе координат имеем выражения энергий

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{EA}{L}k_1^2 + \frac{4EI}{L}k_2 + \frac{12EI}{L^2}k_4 + \frac{12EI}{L^3}k_3^2\right\}, \\ E_P &= \frac{-P}{2}\left\{\frac{L}{15}\left(k_2+k_5\right) + \frac{1}{5}k_4 + \frac{6}{5L}k_3^2\right\}, \end{aligned} \tag{2}$$

в которых введены обозначения

$$\begin{gathered} k_1 = \left(u_0-u_1\right)\cos\varphi + \left(v_0-v_1\right)\sin\varphi, \quad k_2 = \left(\omega_0-\omega_1\right)^2 + 3\omega_0\omega_1, \\ k_3 = -\left(u_0-u_1\right)\sin\varphi + \left(v_0-v_1\right)\cos\varphi, \quad k_4 = \left(\omega_0+\omega_1\right)k_3, \\ k_5 = \left(\omega_0-\omega_1\right)^2, \end{gathered}$$

где u_n, v_n - перемещения, а ω_n - углы поворотов граничных узлов $n = 0$ и $n = 1$ соединяющего элемента, а φ - угол наклона элемента.

Полная энергия системы складывается из энергий всех элементов. Уравнения движения строятся с использованием уравнений Лагранжа.

2. Однополевая обобщенно-континуальная модель для исследования устойчивости решетки

Однополевая обобщенно-континуальная модель строится при предположении, что поля перемещений и вращений изменяются медленно. В этом случае, используя процедуру континуализации с использованием разложений обобщенных перемещений в ряды Тейлора с учетом членов не выше первого порядка, на основе ячейки периодичности из стержней с углами наклона $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ получаем выражение плотности энергии

$$\begin{aligned} E = \tfrac{1}{2}[a_1 u,_x^2 + a_2 v,_y^2 + a_3 (u,_y + \omega)^2 + a_4 (v,_x - \omega)^2 + a_5 \omega,_x^2 + a_6 \omega,_y^2 + \\ + a_7 v,_x^2 + a_8 u,_y^2], \end{aligned} \tag{3}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} a_1 = A_1 E_1/L_2, \quad a_2 = A_2 E_2/L_1, \quad a_7 = -P_1/L_2, \quad a_8 = -P_2/L_1, \\ a_3 = 12 E_2 I_2/L_1 L_2^2 - P_2/5L_1, \quad a_4 = 12 E_1 I_1/L_2 L_1^2 - P_1/5L_2, \\ a_5 = 12 E_1 I_1/L_2 - 2P_1 L_1^2/15L_2, \quad a_6 = 12 E_2 I_2/L_1 - 2P_2 L_2^2/15L_1. \end{gathered} \tag{4}$$

Введение аналогично [1, 4] макродеформаций, микродеформаций и градиентов вращений

$$\begin{gathered} e_{xx} = u,_x, \quad e_{yy} = v,_y, \quad e_{xy} = \tfrac{1}{2}(u,_y + v,_x), \\ \gamma_{xy} = v,_x - \omega, \quad \gamma_{yx} = u,_y + \omega, \quad \phi_x = \omega,_x, \quad \phi_y = \omega,_y \end{gathered} \tag{5}$$

приводит выражение плотности энергии (3) к виду

$$\begin{aligned} E = \tfrac{1}{2}[a_1 e_{xx}^2 + a_2 e_{yy}^2 + a_3 \gamma_{yx}^2 + a_4 \gamma_{xy}^2 + a_5 \phi_x^2 + a_6 \phi_y^2 + \\ + a_7 (\gamma_{xy} + \omega)^2 + a_8 (\gamma_{yx} - \omega)^2]. \end{aligned} \tag{6}$$

При отсутствии дополнительных сил ($P_n = 0,\ n = 1,\ 2$) построенная модель совпадает с микрополярной моделью Сана-Янга решетчатой балочной системы [4]. В качестве результата, который обуславливает пользу введения континуальной модели взамен дискретной, отметим, что при этом помимо нахождения континуального выражения энергии и введения обобщенных характеристик напряженно-деформированного состояния (5), (6) были найдены обобщенные константы системы и их выражения через характеристики структурных элементов (4). Переход от построенных на основе физических представлений дискретных уравнений к континуальной модели и затем переход с применением эффективных методов вычислительной математики к дискретной модели с искусственной дискретизацией с более грубой сеткой, включающей несколько структурных элементов среды, позволяет уменьшить размерность разрешающих систем уравнений и таким образом дает возможность строить эффективные вычислительные алгоритмы. Вариант вариационно-разностного метода и особенности его реализации для численного решения задач на основе функционала микрополярной упругости рассмотрены в статье [6].

3. Моделирование быстроизменяющихся полей: многополевая обобщенная модель

Как было отмечено однополевая модель (4)-(6) была построена и применима для анализа медленно изменяющихся длинноволновых полей. Однако моделирование быстро изменяющихся полей перемещений в структурных системах представляет интерес, поскольку поверхностные и внутренние потери устойчивости (коробление, расслоение), волновые процессы в тонких слоях, заключенных между жесткими поверхностями (прослоях), часто носят коротковолновый характер и часто именно коротковолновые искажения на уровне структурных ячеек приводят к разрушениям и должны учитываться при моделировании.

Дадим анализ возможности возникновения коротковолновых двухпериодических структур при потере устойчивости.

Уравнения движения n-го узла решетки с квадратной ячейкой периодичности ($L_1 = L_2 = L$) с одинаковыми сжимающими силами в соединяющих элементах ($P_1 = P_2 = P$) при предположении одномерной деформации и нелинейного сопротивления окружающей среды вертикальным смещениям ячеек прослоя имеют вид

$$\begin{array}{l} \rho v_{n,tt} = a\,(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1})/L^2 - b\,(\omega_{n+1} - \omega_{n-1})/2L - rv_n - sv_n^3, \\ \rho I \omega_{n,tt} = b\,(v_{n+1} - v_{n-1})/2L - c\,(\omega_{n+1} - 2\omega_n + \omega_{n-1}) - b\omega_n, \end{array} \tag{7}$$

где введены обозначения $a = 12EI/L - 6LP/5$, $b = 12EL/L - LP/5$, $c = 2EI/L + LP/30$, r и s - коэффициенты кубической нелинейности сил сопротивления [7, 8].

Ищем двухпериодические стационарные решения вида

$$v_{2m} = -v_{2m-1} = v, \quad \omega_{2m} = -\omega_{2m-1} = \omega. \tag{8}$$

Подставив соотношения (8) в уравнения для макроячейки (7), составленной из двух ячеек, получаем систему нелинейных уравнений, которая имеет решения

$$\left\{ v = +Z/\sqrt{s},\ \omega = 0 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ v = -Z/\sqrt{s},\ \omega = 0 \right\}, \tag{9}$$

где $Z = \sqrt{24PL/5 - rL^2 - 48EI/L}$. Значения нагрузок, при которых возможна реализация двухпериодических форм потери устойчивости, определяется выражением $P \geq \frac{5}{24L}\left(rL^2 + 48\frac{EI}{L}\right)$.

Однополевые континуальные уравнения, соответствующие выражению энергии (6) и уравнениям (7), в одномерном случае имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v_{tt} = a v_{xx} - b\omega_x - rv - sv^3, \\ \rho I \omega_{tt} = b v_x - cL^2 \omega_{xx} - b\omega. \end{array} \right. \tag{10}$$

Эти уравнения не имеют стационарных двухпериодических решений, соответствующих двупериодическим решениям (8), (9) и, следовательно, нахождение и моделирование соответствующих структурных переходов на основе уравнений (10), а значит и на основе построенной ранее двухмерной модели (4)-(6) не возможно. Покажем, что изучение коротковолновых решений возможно с использованием многополевых обобщенных моделей.

Для построения двухполевой модели вводим для обобщенных перемещений четных и нечетных узлов обозначения $\{v_{0,2n},\ \omega_{0,2n}\}$ и $\{v_{1,2n+1},\ \omega_{1,2n+1}\}$ с индексами 0 и 1. Выписав уравнения движения макроячейки, составленной из двух ячеек

$$
\begin{aligned}
&\rho\tfrac{\partial v_{0,2n}}{\partial t^2} = \tfrac{a}{L^2}\left(v_{1,2n+1} - 2v_{0,2n} + v_{1,2n-1}\right) - \tfrac{b}{2L}\left(\omega_{1,2n+1} - \omega_{1,2n-1}\right) - \\
&\qquad -rv_{0,2n} - sv_{0,2n}^3,\\
&\rho I\tfrac{\partial \omega_{0,2n}}{\partial t^2} = \tfrac{b}{2L}\left(v_{1,2n+1} - v_{1,2n-1}\right) - c\left(\omega_{1,2n+1} - 2\omega_{0,2n} + \omega_{1,2n-1}\right) - b\omega_{0,2n},\\
&\rho\tfrac{\partial v_{1,2n+1}}{\partial t^2} = \tfrac{a}{L^2}\left(v_{0,2n+2} - 2v_{1,2n+1} + v_{0,2n}\right) - \tfrac{b}{2L}\left(\omega_{0,2n+2} - \omega_{0,2n}\right) - \\
&\qquad -rv_{1,2n+1} - sv_{1,2n+1}^3,\\
&\rho I\tfrac{\partial \omega_{1,2n}}{\partial t^2} = \tfrac{b}{2L}\left(v_{0,2n+2} - v_{0,2n}\right) - c\left(\omega_{0,2n+2} - 2\omega_{1,2n+1} + \omega_{0,2n}\right) - b\omega_{1,2n+1},
\end{aligned}
$$

введя две вектор-функции полевых переменных, совпадающих в узлах с векторами обобщенных перемещений

$$
\begin{aligned}
&\{v_0(x),\ \omega_0(x)\}|_{x=2nL} = \{v_{0,2n},\ \omega_{0,2n}\},\\
&\{v_1(x),\ \omega_1(x)\}|_{x=(2n+1)L} = \{v_{1,2n+1},\ \omega_{1,2n+1}\},
\end{aligned}
$$

длинноволновым переходом получаем континуальные уравнения для соответствующих полей

$$
\begin{aligned}
&\rho v_{1,tt} = av_{0,xx} - 2a\left(v_0 - v_1\right)/L^2 - b\omega_{0,x} - rv_0 - sv_0^3 = 0,\\
&\rho I\omega_{0,tt} = bv_{1,x} - cL^2\omega_{0,xx} + 2\left(\omega_1 - \omega_0\right) - b\omega_1,\\
&\rho v_{1,tt} = av_{0,xx} - 2a\left(v_1 - v_0\right)/L^2 - b\omega_{1,x} - rv_1 - sv_1^3,\\
&\rho I\omega_{1,tt} = bv_{0,x} - cL^2\omega_{1,xx} + 2c\left(\omega_0 - \omega_1\right) - b\omega_0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Однополевую модель (10) можно получить из двухполевой (11) в частном случае совпадения полей $v_0(x) = v_1(x) \equiv v(x)$, $\omega_0(x) = \omega_1(x) \equiv \omega(x)$. Таким образом, двухполевая модель содержит однополевую. Однако в отличии от однополевой модели двухполевая открывает возможность найти и исследовать коротковолновые двухпериодические стационарные решения

$$
v_0(x) = -v_1(x) \equiv w(x), \quad \omega_0(x) = -\omega_1(x) \equiv \omega(x). \tag{12}
$$

Подставив соотношения (12) в уравнения для макроячейки (11), составленной из двух ячеек, получаем систему нелинейных уравнений, которая имеет решения

$$
\left\{\ v(x) = +Z/\sqrt{s},\ \omega(x) = 0\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\ v(x) = -Z/\sqrt{s},\ \omega(x) = 0\right\}, \tag{13}
$$

Значение Z и область значений нагрузок P, при которых возможна реализация двухпериодических форм потери устойчивости, такие же как у двухпериодических решений дискретной модели.

Заключение

В статье построена однополевая микрополярная модель устойчивости периодической решетки с учетом поворотов структурных элементов в узлах решетки и внутренних напряжений в соединениях. Для анализа модели рассмотрен частный случай одномерной потери устойчивости. Показано, что однополевая микрополярная модель (6), (7) не описывает коротковолновые двухпериодические формы потери устойчивости. Поэтому построена двухполевая модель, которая содержит в себе как частный случай однополевую микрополярную модель (7), однако в отличие от нее описывает также коротковолновые двухпериодические решения (8), характерные для потерь устойчивости поверхностного слоя на достаточно жестком основании и внутренней потери устойчивости слоя в достаточно жесткой среде. То есть двухполевая модель может служить базой для изучения, как длинноволновых процессов макроуровня, так и коротковолновых процессов структурного уровня и их взаимодействия. Построение решений солитонного типа аналогичных построенным в [7, 8] на основе упрощенной упруго-шарнирной модели, описывающих динамические переходы между построенными стационарными двухпериодическими решениями, а также построение двухполевой микрополярной модели в двухмерном случае представляются как отдельные задачи дальнейших исследований и публикаций, развивающих результаты настоящей статьи и статей [2, 3, 6, 7].

Рассмотренные вопросы, модели представляют интерес для моделирования решетчатых балочных конструкций, структурных материалов (биоматериалы, гранулированные среды, композиты, др.), для описания кинематики элементарных ячеек которых важными являются не только пространственные перемещения их элементов, но и их повороты.

Список литературы

[1] Eringen A.C., Microcontinuum Field Theories: Foundations and Solids, Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations // International Journal of Solids and Structures - 2005. Vol. 42, No 24-25 -P. 6245-6260.

[3] Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Ruzzene M. Multi-field model for Cosserat media // Journal of Mechanics of Materials and Structures - 2008. Vol. 3, No. 7. -P. 1365-1382.

[4] Sun C.T., Yang T.Y. A continuum approach toward dynamics of gridworks //ASME. J. Appl. Mech. 40. 1973. Pp. 186-192.

[5] Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с.

[6] Мирошниченко А.Е., Колдунов В.А., Васильев А.А. О численном моделировании структурных систем на основе вариационно-разностного метода для микрополярной упругости // Моделирование сложных систем. Вып. 2. Тверь: ТвГУ, 1999. С. 98-102.

[7] Dmitriev S.V., Shigenari T., Vasiliev A.A., Abe K. Dynamics of domain walls in an incommensurate phase near the lock-in transition: One-dimensional crystal model // Phys. Rev. B 55. 1997. № 13. Pp. 8155-8164.

[8] Shigenari T., Dmitriev S.V., Vasiliev A.A., Abe K. Domain wall solutions for EHM model of crystal // J. Phys. Soc. Jpn. 1999. № 1. Pp. 117-125.