УДК 517.94:519.6

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПЛОСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ

Эйалло К.О.
кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 03.11.2008, после переработки 12.11.2008.

Исследуется задача об установившемся течении двумерного потока вязкой несжимаемой жидкости с частично свободной поверхностью. В основе исследования лежит нахождение функции тока для второй краевой задачи для системы Стокса. Функция тока вычисляется методом конечных элементов.

The problem of a stationary two-dimensional flow of a viscous incompressible fluid with a partially free boundary is investigated. The investigation is based on the searching of a stream function to the second boundary value problem for the Stokes system. A stream function is calculated by a finite element method.

Ключевые слова: система Стокса, плоское установившееся течение, свободная граница, функция тока, метод конечных элементов.
Keywords: Stokes system, plane stationary flow, free boundary, stream function, finite element method.

1. Введение

Задачи о течении жидкости с частично или полностью свободной границей составляют значительную часть современной математической гидродинамики. В 1970-80-х годах В.В. Пухначевым и В.А. Солонниковым была доказана разрешимость задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. В отличие от многих математических результатов предложенный ими метод доказательства разрешимости оказался конструктивным. В настоящей статье предлагается способ численного нахождения решения задачи, основанный на методе В.В. Пухначева и В.А. Солонникова. Основной шаг в реализации этого метода для плоского течения – решение некоторой краевой задачи для бигармонического уравнения для функции тока. В статье выведено интегральное тождество для этой задачи и описан способ нахождения численного решения задачи методом Галеркина.

Укажем распределения материала статьи. Во втором параграфе дана постановка задачи со свободной границей и изложен метод последовательных приближений для ее решения. В третьем параграфе исследуется вспомогательная задача для функции тока в области с фиксированной границей. Выводится интегральное тождество для этой задачи. Четвертый параграф посвящен построению схемы метода Галеркина для численного решения вспомогательной задачи.

2. Постановка задачи со свободной границей для системы Стокса

Рассматривается стационарное движение жидкости в плоской области Ω, ограниченной линиями Γ_1 и Γ_2.

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega,$$
$$\Gamma_1 = \{x_2 = 0, 0 < x_1 < l\} \cup \{x_1 = 0, 0 < x_2 < \varphi(0)\} \cup \{x_1 = l, 0 < x_2 < \varphi(l)\},$$
$$\Gamma_2 = \{0 \leq x_1 \leq l, x_2 = \varphi(x_1)\}.$$

Область Ω изображена на рис. 1.

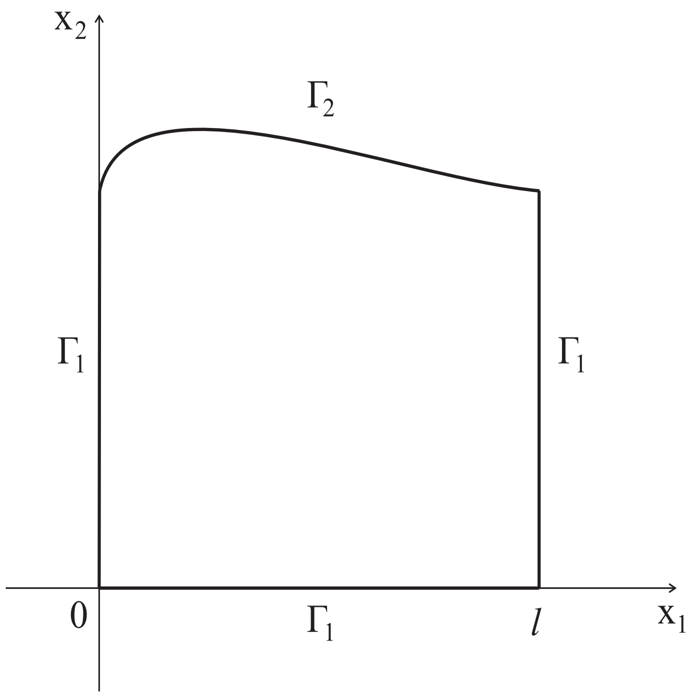

Рис. 1

Γ_1 обозначает фиксированную часть границы области Ω, а Γ_2 обозначает ее свободную часть, определяемую функцией φ. φ это искомая гладкая функция, принимающая положительные значения. Движение жидкости характеризуется вектор функцией скорости $\bar{v}(x_1, x_2) = (v_1, v_2)$ и скалярной функцией давления $p\,(x_1, x_2)$. Определению подлежит тройка функций $(\bar{v}, p, \varphi)$. Функции $(\bar{v}, p)$ удовлетворяют системе Стокса

$$-\nu\Delta\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad \operatorname{div}\bar{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1}$$

и краевым условиям на $\partial\Omega$

$$\bar{v}\,|_{\Gamma_1} = 0, \tag{2}$$

$$\bar{v} \cdot \bar{n}\,|_{\Gamma_2} = 0, \tag{3}$$

$$T(\bar{v}, p)\bar{n} = -\sigma K \bar{n} \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{4}$$

Здесь $\bar{f}(x)$ – заданная вектор-функция, $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к линии Γ_2, $\sigma = const > 0$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\nu = const > 0$ – кинематический коэффициент вязкости, К – кривизна линии Γ_2, $T(\bar{v}, p)$ – тензор напряжений с компонентами

$$T_{ij} = \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - p\,\delta_{ij}, \tag{5}$$

$$T(\bar{v}, p)\bar{n} = \left\{ \sum_{j=1}^{2} T_{ij} n_j \right\}_{i=1}^{2}$$

$$\bar{v} \cdot \bar{n} = \sum_{i=1}^{2} v_i n_i.$$

$$\bar{n} = (n_1, n_2), \quad n_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}}, \quad n_2 = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}},$$

$$K = \frac{\varphi''}{(1 + (\varphi')^2)^{3/2}}.$$

Обозначим через $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ единичный вектор, касательный к линии Γ_2,

$$\tau_1 = \frac{-\varphi'}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}}.$$

Задачу (1), (2), (3), (4) будем решать, используя метод, предложенный В.В.Пухначевым в [1]. Согласно этому методу решение $(\bar{v}, p, \varphi)$ указанной задачи ищется методом последовательных приближений.

Пусть известно k-ое приближение $(\bar{v}^{\,k}, p^k, \varphi^k)$. В фиксированной области Ω^k с границей $\Gamma^k = \Gamma_1^k \cup \Gamma_2^k$, где

$$\Gamma_1^k = \{x_2 = 0, 0 < x_1 < l\} \cup \{x_1 = 0, 0 < x_2 < \varphi^k(0)\} \cup \{x_1 = l, 0 < x_2 < \varphi^k(l)\}$$
$$\Gamma_2^k = \{0 \le x_1 \le l,\ x_2 = \varphi^k(x_1)\},$$

рассмотрим задачу относительно функций $\bar{v}^{\,k+1}, p^{k+1}$

$$\begin{gathered} -\nu \Delta \bar{v}^{\,k+1} + \nabla p^{k+1} = \bar{f}, \quad \operatorname{div} \bar{v}^{\,k+1} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^k, \\ \bar{v}^{\,k+1}\,|_{\Gamma_1^k} = 0, \quad \bar{v}^{\,k+1} \cdot \bar{n}^{\,k}\,|_{\Gamma_2^k} = 0, \\ T(\bar{v}^{\,k+1}, p^{k+1})\bar{n}^k \cdot \bar{\tau}^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2^k. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь вектора $\bar{n}^k$ и $\bar{\tau}^k$ нормальный и касательный векторы к кривой Γ_2^k соответственно. По найденным $\bar{v}^{\,k+1}$ и p^{k+1} вычисляем кривизну K новой кривой Γ_2^{k+1}

$$K = \frac{-1}{\sigma} T(\bar{v}^{\,k+1}, p^{k+1})\bar{n}^k \cdot \bar{n}^k \Big|_{\Gamma_2^k}. \tag{7}$$

Теперь мы построим новую кривую

$$\Gamma_2^{k+1} = \{0 \le x_1 \le l, x_2 = \varphi^{k+1}(x_1)\},$$

кривизна которой равна найденной функции K. Кривизна K и функция φ^{k+1}, определяющая кривую Γ_2^{k+1}, связаны уравнением

$$K = \frac{(\varphi^{k+1})''}{[1 + ((\varphi^{k+1})')^2]^{3/2}} = \frac{d}{dx_1} \frac{(\varphi^{k+1})'}{[1 + ((\varphi^{k+1})')^2]^{1/2}}.$$

Поэтому функцию φ^{k+1} находим как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx_1} \frac{(\varphi^{k+1})'}{[1 + ((\varphi^{k+1})')^2]^{1/2}} = K(x_1). \tag{8}$$

Мы предполагаем что угол между свободной границей Γ_2 и вертикальной частью фиксированной границы $\{x_1 = 0\}$ равен $\frac{\pi}{2}$. Это означает, что

$$(\varphi^{k+1})'(0) = 0. \tag{9}$$

Мы будем предполагать также, что объем жидкости фиксирован, и, следовательно, функция φ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^l \varphi(x_1) dx_1 = V, \tag{10}$$

где V – заданное положительное число.

Тогда из формулы (8) получим уравнение

$$\frac{d}{dx_1} \frac{\varphi'(t)}{[1 + (\varphi'(t))^2]^{1/2}} = K(t).$$

Проинтегрируем это уравнение по интервалу $(0, x_1)$, воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница и учтем условие (9).

$$\int\limits_0^{x_1} \frac{d}{dt} \left[\frac{\varphi'(t)}{[1 + (\varphi'(t))^2]^{1/2}} \right] dt = \int\limits_0^{x_1} K(t) dt,$$

$$\frac{\varphi'(x_1)}{[1 + (\varphi'(x_1))^2]^{1/2}} - \frac{\varphi'(0)}{[1 + (\varphi'(0))^2]^{1/2}} = \int\limits_0^{x_1} K(t) dt,$$

$$\frac{\varphi'(x_1)}{[1 + (\varphi'(x_1))^2]^{1/2}} = \int\limits_0^{x_1} K(t) dt, \quad \frac{(\varphi')^2}{1 + (\varphi')^2} = \left[\int\limits_0^{x_1} K(t) dt \right]^2,$$

$$(\varphi')^2 = \left(1 + (\varphi')^2\right) \left[\int\limits_0^{x_1} K(t) dt \right]^2,$$

$$(\varphi')^2 \left[1 - \left[\int\limits_0^{x_1} K(t) dt \right]^2 \right] = \left[\int\limits_0^{x_1} K(t) dt \right]^2.$$

Введем обозначение

$$\left[\int_0^{x_1} K(t)dt\right]^2 = A(x_1).$$

Тогда

$$(\varphi')^2 = \frac{A(x_1)}{[1 - A(x_1)]}, \quad \varphi'(z) = \frac{1}{[1 - A(z)]^{1/2}} \int_0^z K(t)dt.$$

Интегрируя по z пределах $(0, x_1)$, получим

$$\int_0^{x_1} \varphi'(z)dz = \int_0^{x_1} \frac{1}{[1 - A(z)]} \int_0^t K(t)dt\, dz,$$

$$\varphi(x_1) - \varphi(0) = \int_0^{x_1} \frac{1}{[1 - A(z)]} \int_0^t K(t)dt\, dz.$$

Проинтегрируем теперь полученное равенство по x_1 по интервалу $(0, l)$. Это приведет нас к равенству

$$\int_0^l \varphi(x_1)dx_1 - \varphi(0)\, l = \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{1}{[1 - A(z)]^{1/2}} \int_0^z K(t)dt\, dz\, dx_1.$$

Введем еще обозначение

$$\int_0^l \int_0^{x_1} \frac{1}{[1 - A(z)]^{1/2}} \int_0^z K(t)dt\, dz\, dx_1 = U.$$

Теперь из условия (10) получим

$$\varphi(0)\, l = V - U, \quad \varphi(0) = \frac{1}{l}\left[V - U\right].$$

Тогда решение уравнения (8) имеет вид

$$\varphi^{k+1}(x_1) = \frac{1}{l}\left[V - U\right] + \int_0^{x_1} \frac{1}{[1 - A(z)]} \int_0^t K(t)dt\, dz.$$

Тем самым найдено очередное приближение

$$(\bar{v}^{\,k+1}, p^{\,k+1}, \varphi^{\,k+1}).$$

В [1] доказано, что последовательность $(\bar{v}^{\,k}, p^{\,k}, \varphi^{\,k})$ сходится к решению задачи (1), (2), (3), (4).

3. Решение вспомогательной задачи в области с фиксированной границей

Запишем задачу (6), опуская индексы.

$$-\nu\Delta\bar{v}+\nabla p=\bar{f},\quad \operatorname{div}\bar{v}=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{11}$$

$$\bar{v}\mid_{\Gamma_1}=0, \tag{12}$$

$$\bar{v}\cdot\bar{n}\mid_{\Gamma_2}=0, \tag{13}$$

$$T(\bar{v},p)\bar{n}\cdot\bar{\tau}=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{14}$$

Напомним, что вектора $\bar{n}$ и $\bar{\tau}$ это нормальный и касательный векторы к кривой Γ_2 соответственно.

Перепишем задачу (11), (12), (13), (14) с помощью функции тока. Введем новую искомую скалярную функцию $\psi(x_1,x_2)$ так, что

$$v_1=\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\quad v_2=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \tag{15}$$

Тогда

$$\operatorname{div}\bar{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_1}=0.$$

Таким образом уравнение

$$\operatorname{div}\bar{v}=0$$

выполняется автоматически. Первое из уравнений (11) запишется в виде

$$-\nu\Delta\bar{v}_1+\frac{\partial p}{\partial x_1}=f_1, \tag{16}$$

$$-\nu\Delta\bar{v}_2+\frac{\partial p}{\partial x_2}=f_2. \tag{17}$$

Продифференцируем (16) по x_2, (17) по x_1 и возьмем разность. Получим

$$-\nu\Delta\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x_1\partial x_2}+\nu\Delta\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial^2 p}{\partial x_2\partial x_1}=\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \tag{18}$$

или

$$-\nu\Delta\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\equiv g. \tag{19}$$

Перепишем левую часть последнего уравнения, используя равенства (15). Получим

$$-\nu\Delta^2\psi=g. \tag{20}$$

Запишем теперь в терминах функции тока краевые условия (12), (13). Условие (12) примет вид

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2},-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$

что дает

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_1,0)=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(0,x_2)=0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(l,x_2)=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1,0)=0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(0,x_2)=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(l,x_2)=0. \end{aligned} \tag{21}$$

Условие (13) примет вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}n_1-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}n_2=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{22}$$

Кроме того, в [1] показано, что

$$\Delta\psi=2K\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{23}$$

Итак, функция ψ удовлетворяет уравнению (20) и краевым условиям (21), (22), (23). Запишем теперь интегральное тождество для этой задачи . Умножим обе части (20) на пробную функцию $\eta(x)$ и проинтегрируем по Ω. Получим

$$\int_\Omega g\eta dx=-\nu\int_\Omega \Delta^2\psi\eta dx. \tag{24}$$

Проведем в правой части последнего равенства интегрирование по частям, что даст

$$\begin{gathered} \int_\Omega g\eta dx=-\nu\int_\Omega\left[\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x_2^2}\right]\eta dx=\nu\int_\Omega\left[\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\right]dx-\\ -\nu\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1}\eta n_1+\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2}\eta n_2\right]d\Gamma=-\nu\int_\Omega\Delta\psi\Delta\eta dx+\\ +\nu\int_{\partial\Omega}\left[\Delta\psi\frac{\partial\eta}{\partial x_1}n_1+\Delta\psi\frac{\partial\eta}{\partial x_2}n_2\right]d\Gamma-\nu\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1}\eta n_1+\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2}\eta n_2\right]d\Gamma. \end{gathered} \tag{25}$$

Потребуем, чтобы

$$\eta\,|_{\Gamma_1}=0, \tag{26}$$

$$\nabla\eta\,|_{\Gamma_1}=0. \tag{27}$$

Тогда тождество (25) приобретает вид

$$\int_\Omega g\eta dx=-\nu\int_\Omega\Delta\psi\Delta\eta dx+\nu\int_{\Gamma_2}\left[\Delta\psi\frac{\partial\eta}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial n}(\Delta\psi)\eta\right]d\Gamma. \tag{28}$$

С учетом условия (23) получим

$$\int_\Omega g\eta dx = -\nu\int_\Omega \Delta\psi\Delta\eta dx + \nu\int_{\Gamma_2}\left[2K\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial\eta}{\partial n} - 2\frac{\partial}{\partial n}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\eta\right]d\Gamma. \tag{29}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\eta + K\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial\eta}{\partial n}, \tag{30}$$

то

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\eta = \frac{\partial}{\partial n}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right) - K\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial\eta}{\partial n}. \tag{31}$$

Тогда интегральное тождество принимает вид

$$\int_\Omega g\eta dx = -\nu\int_\Omega \Delta\psi\Delta\eta dx + 2\nu\int_{\Gamma_2}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right) + 2K\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial\eta}{\partial n}\right]d\Gamma. \tag{32}$$

Рассмотрим отдельно криволинейный интеграл в правой части (32). Кривая Γ_2 задана уравнением

$$x_2 = \varphi(x_1), \quad 0 \le x_1 \le l.$$

Тогда

$$\int_{\Gamma_2} f(x_1,x_2)d\Gamma = \int_0^l f(x_1,\varphi(x_1))\sqrt{1+(\varphi')^2(x_1)}dx_1.$$

Учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\varphi'}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$K = \frac{\varphi''}{[1+(\varphi')^2]^{3/2}} = \frac{d}{dx_1}\frac{\varphi'}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}.$$

Поэтому имеем

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial n}(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta)d\Gamma = -\int_0^l \frac{\varphi'}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right)\sqrt{1+(\varphi')^2}dx_1+$$

$$+\int_0^l \frac{1}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right)\sqrt{1+(\varphi')^2}dx_1 =$$

$$-\int_0^l \varphi'\frac{\partial}{\partial x_1}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right)dx_1 + \int_0^l \frac{\partial}{\partial x_2}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right)dx_1 =$$

$$= -\int_0^l \varphi'\frac{\partial}{\partial x_1}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right)dx_1 + \int_0^l K\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right)dx_1 =$$

$$-\int_0^l \varphi'\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{K\varphi'}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\eta + \frac{K}{[1+(\varphi')^2]^2)^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\eta\right]dx_1+$$

$$+\int_0^l K\frac{\partial}{\partial x_2}\left[-\frac{\varphi'}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\eta + \frac{1}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\eta\right]dx_1 =$$

$$\int_0^l \frac{K}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\left[-\varphi''\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\eta + \varphi''\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\eta\right]dx_1+$$

$$+\int_0^l \frac{K}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\left[-\varphi'\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\eta\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\eta\right)\right]dx_1. \tag{33}$$

Аналогично получим

$$\int\limits_{\Gamma_2} K\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial\eta}{\partial n}d\Gamma = \int\limits_0^l K\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial\eta}{\partial n}[1+(\varphi')^2]^{1/2}dx_1 =$$

$$\int\limits_0^l K\left[-\frac{\varphi'}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{1}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right]\times$$

$$\left[-\frac{\varphi'}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \frac{1}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\right]\left[1+(\varphi')^2\right]^{1/2}d\,x_1 =$$

$$\int\limits_0^l \frac{K}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\left[-\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right]\left[-\varphi'\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \frac{\partial\eta}{\partial x_2}\right]d\,x_1 \tag{34}$$

Исходя из формул (33) и (34), перепишем теперь криволинейный интеграл в правой части (32).

$$\int_{\Gamma_2}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial n}\eta\right)+2K\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial\eta}{\partial n}\right]d\Gamma=$$

$$\int_0^l\frac{K}{[1+(\varphi,')^2]^{1/2}}\left[\varphi''\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\eta-\varphi''\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\eta\right]d\,x_1+$$

$$\int_0^l\frac{K}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\left[\varphi'\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\eta\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\eta\right)\right]dx_1+$$

$$\int\limits_0^l\frac{2K}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\left[-\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right]\left[-\varphi'\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\right]d\,x_1=$$

$$\int_0^l\frac{K}{[1+(\varphi,')^2]^{1/2}}\left[\varphi''\varphi'\eta\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\varphi''\eta\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\varphi'\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right]d\,x_1+$$

$$\int_0^l\frac{K}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\left[-\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_2}^2}+\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+2\varphi'^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\right]d\,x_1+$$

$$\int_0^l\frac{K}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\left[-2\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}-2\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\right]d\,x_1=$$

$$\int_0^l\frac{K}{[1+(\varphi,')^2]^{1/2}}\left[\varphi''\varphi'\eta\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\varphi''\eta\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\varphi'\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right]d\,x_1+$$

$$\int_0^l\frac{K}{[1+(\varphi')^2]^{1/2}}\left[-\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_2}^2}-\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+\right.$$

$$\left.+2\varphi'^{\,2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}-2\varphi'\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\right]d\,x_1$$

$$\equiv I(\varphi,\psi,\eta). \tag{35}$$

Исходя из (32) и (35), заключаем, что решение задачи (20), (21),(22), (23) – функция тока ψ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega g\eta dx=-\nu\int_\Omega\Delta\psi\Delta\eta dx+2\nu I(\varphi,\psi,\eta) \tag{36}$$

для всякой функции η, принадлежащей пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяющей краевым условиям (26) и (27). Отметим при этом, что функция ψ линейно входит в интегральное тождество (36).

Основываясь на интегральном тождестве, мы определим скалярную функцию тока $\psi(x_1,x_2)$ методом конечных элементов. По формулам (15) найдем компоненты вектора скорости $\bar{v}$. Для нахождения давления p воспользуемся следующим приемом. Запишем первое из уравнений системы (1) в скалярной форме

$$-\nu\Delta v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = f_1 \tag{37}$$

$$-\nu\Delta v_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = f_2 \tag{38}$$

Продифференцируем (37) по x_1, а (38) по x_2. Эта операция приводит к равенствам

$$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x_1} = \nu\Delta\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x_2} = \nu\Delta\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

Складывая эти два уравнения, получим уравнение Пуассона для функции p в области Ω

$$\Delta p = \nu\Delta\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} =$$

$$= \nu\,\Delta(\operatorname{div}\bar{v}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \operatorname{div}\bar{f}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\operatorname{div}\bar{v} = 0$. Таким образом уравнение Пуассона для функции p в области Ω имеет вид

$$\Delta p = \operatorname{div}\bar{f}. \tag{39}$$

Рассматривая теперь уравнения (37) и (38) на границе Γ, умножим (37) на n_1, (38) на n_2 и сложим результаты. Напомним, что n_1 и n_2 компоненты единичного вектора внешней нормали к границе Γ. Поэтому

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2}n_2\right]_\Gamma = \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_\Gamma$$

и мы получаем краевое условие для функции p

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_\Gamma &= [\nu\Delta v_1 n_1 + f_1 n_1 + \nu\Delta v_2 n_2 + f_2 n_2]_\Gamma = \\ &= \left[\nu(\Delta v_1 n_1 + \Delta v_2 n_2) + \bar{f}\cdot\bar{n}\right]_\Gamma.\end{aligned} \tag{40}$$

(39), (40) есть задача Неймана для функции p в области Ω. Найдя решение этой задачи, мы сможем вычислить очередное приближение для кривизны функции φ по формуле (7).

Нетрудно убедиться, что необходимое условие разрешимости задачи Неймана (39), (40) выполнено. Действительно, из формулы Гаусса следует, что

$$\int_\Gamma \left[\nu(\Delta v_1 n_1 + \Delta v_2 n_2) + \bar{f}\cdot\bar{n}\right]\,d\Gamma = \int_\Omega \left[\nu\Delta(\operatorname{div}\bar{v}) + \operatorname{div}\bar{f}\,\right]dx = \int_\Omega \operatorname{div}\bar{f}\,dx.$$

4. Решение вспомогательной задачи методом конечных элементов

Численное решение задачи (11) - (14) мы будем искать методом Галеркина. Определим узлы в области $\Omega \cup \Gamma_2 = \{0 < x_1 < l, 0 < x_2 \leq \varphi(x_1)\}$. Для этого выберем натуральное число $m_1 \geq 2$ и положим

$$h_1 = \frac{l}{m_1 + 1}.$$

h_1 это шаг по горизонтальной оси x_1. Пусть

$$l_2 > \max_{0 \leq x_1 \leq l} \varphi(x_1).$$

Выберем теперь натуральное число $m_2 \geq 3$ и положим

$$h_2 = \frac{l_2}{m_2 + 1}.$$

h_2 это шаг по вертикальной оси x_2. Точки

$$x_k = (x_{1k}, x_{2k}), \quad \text{где} \quad x_{1k} = ih_1, \quad x_{2k} = jh_2, \quad i = 1, ...m_1, \quad j = 1, ...m_2,$$

для которых $x_{2k} \leq \varphi(x_{1k})$ назовем узлами. Из определения узлов следует, что все узлы лежат в области $\Omega \cup \Gamma_2$. Узел x_k назовем внутренним узлом, если

$$\varphi(x_1) > x_{2k} + h_2, \quad \text{для} \quad x_1 \in [x_{1k} - h_1, x_{1k} + h_1].$$

Множество номеров k внутренних узлов обозначим через P. Узел x_k назовем приграничным узлом, если на отрезке $[x_{1k} - h_1, x_{1k} + h_1]$ существует хотя бы одно значение переменной x_1, для которого

$$\varphi(x_1) \leq x_{2k} + h_2.$$

Множество номеров k приграничных узлов обозначим через BK. Каждому узлу x_k сопоставим прямоугольник

$$\Omega_k = \{x_{1k} - h_1 \leq x_1 \leq x_{1k} + h_1, x_{2k} - h_2 \leq x_2 \leq x_{2k} + h_2\}.$$

Очевидно,что

$$\Omega \cup \Gamma_2 \subset \bigcup_k \Omega_k$$

Обозначим через N общее количество узлов. Узел с номером k имеет координаты (x_{1k}, x_{2k}). Каждому узлу сопоставим базисную функцию

$$\eta_k(x_1, x_2) = \eta_{1k}(x_1)\eta_{2k}(x_2), \tag{41}$$

где

$$\eta_{1k}(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq x_{1k} - h_1 \\ 1 - \dfrac{2}{h_1^2}(x_1 - x_{1k})^2 + \dfrac{1}{h_1^4}(x_1 - x_{1k})^4, & x_{1k} - h_1 \leq x_1 \leq x_{1k} + h_1 \\ 0, & x_1 \geq x_{1k} + h_1 \end{cases},$$

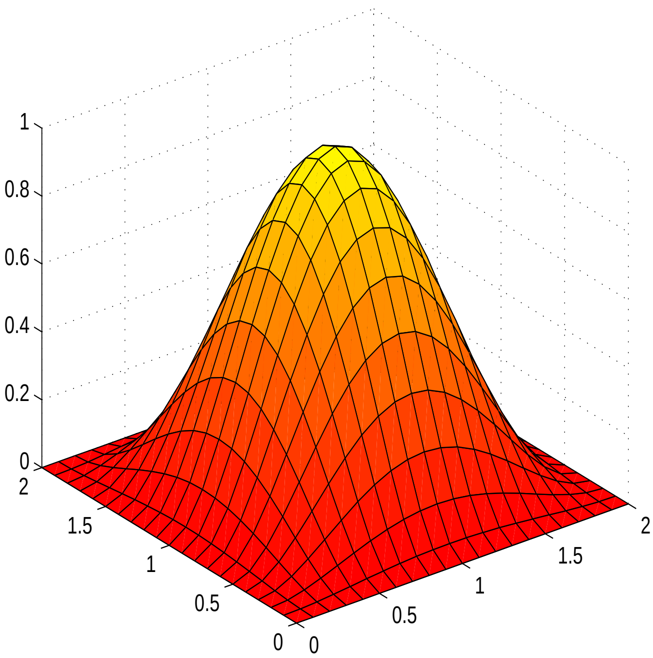

Рис. 2

$$\eta_{2k}(x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 \le x_{2k} - h_2 \\ 1 - \dfrac{2}{h_2^2}(x_2 - x_{2k})^2 + \dfrac{1}{h_2^4}(x_2 - x_{2k})^4, & x_{2k} - h_2 \le x_2 \le x_{2k} + h_2 \\ 0, & x_2 \ge x_{2k} + h_2 \end{cases}.$$

График функции η_k изображен на рис. 2. Функции η_k и их первые производные по обеим переменным обращаются в ноль на контуре прямоугольника Ω_k. Поэтому $\eta_k \in W_2^2(\Omega)$. Совокупность множества Ω_k и функции η_k называется конечным элементом с номером k.

Отметим два важных обстоятельства: 1) $\Omega \subset \bigcup\limits_k \Omega_k$, 2) в каждой точке области Ω хотя бы одна из функций η_k отлична от нуля.

Будем искать приближение к решению ψ задачи (20), (21),(22), (23) в виде линейной комбинации базисных функций η_k

$$\psi^N(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \eta_k(x_1, x_2). \tag{42}$$

Подставим функцию ψ^N в интегральное тождество (36) вместо функции ψ. При этом в качестве пробных функций возьмем функции η_k, $k = 1, 2, ..., N$. Такой выбор пробных функций допустим, так как функции η_k удовлетворяют условиям (26) и (27).

$$-\nu \int_\Omega \Delta\psi^N \Delta\eta_k dx + 2\nu I(\varphi, \psi^N, \eta_k) = \int_\Omega g\eta_k dx \tag{43}$$

Функционал $I(\varphi, \psi^N, \eta_k)$ определен в формуле (35). Как отмечалось ранее, функция ψ^N входит в интегральное тождество (43) линейно. Поэтому для коэффициентов α_k линейной комбинации (42) мы получим линейную алгебраическую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int_\Omega \Delta\eta_k(x_1, x_2)\Delta\eta_j(x_1, x_2)dx - 2\sum_{q\in BK} \alpha_q\, I(\varphi, \eta_q, \eta_j) =$$
$$= -\frac{1}{\nu}\int_\Omega g\eta_j dx, \quad j = 1, ..., N. \tag{44}$$

Каждая из функций η_k отлична от нуля только на множестве Ω_k. Поэтому систему (44) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int\limits_{\Omega_k\cap\Omega_j} \Delta\eta_k\Delta\eta_j\, dx - 2\sum_{q\in BK} \alpha_q\, I(\varphi, \eta_q, \eta_j) =$$
$$= -\frac{1}{\nu}\int_{\Omega_j} g\eta_j dx, \quad j = 1, ..., N. \tag{45}$$

Отметим при этом, что

$$I(\varphi, \eta_q, \eta_j) = 0 \quad \text{при } j \in P,$$

так как функционал I содержит только интегрирование по кривой Γ_2. Матрица системы (45) содержит большое количество нулей в силу того, что только для сравнительно небольшого набора индексов k, j множество $\Omega_k \cap \Omega_j$ не пусто. Решая систему (45) методом Гаусса, найдем коэффициенты α_k, а затем по формуле (42) вычислим функцию ψ^N. Сходимость последовательности ψ^N к решению задачи (20), (21), (22), (23) в норме пространства $W_2^2(\Omega)$ установлена в [3].

Заключение

В статье рассмотрена задача о плоском установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости с частично свободной поверхностью. В качестве модели движения выбрана стационарная система Стокса. Предложен метод численного нахождения решения этой задачи. Построена последовательность функций, сходящаяся к решению задачи. Предложенный способ нахождения численного решения представляет собой конечноэлементный вариант метода Галеркина.

Список литературы

[1] В.В.Пухначев. Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнений Навье-Стокса. Журнал прикл. механики и техн. физики, 1972, N 3, с. 91 – 102.

[2] В.В.Пухначев. Движение вязкой жидкости со свободными границами. Новосибирский университет, Новосибирск, 1989. 96 с.

[3] V.Girault, P.-A.Raviart. Finite element methods for the Navier-Stokes equations. Springer, Berlin, 1979.