УДК 519.214

О НЕРАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ОСТАТОЧНЫХ ЧАСТЕЙ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ БЕРГСТРЕМА-ЧЕБЫШЕВА

Сюлюкин А.В.
механико-математический факультет,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва
(*syulyukin@yandex.ru*)

Поступила в редакцию 12.01.2009, после переработки 25.02.2009.

Получена неравномерная оценка остаточной части короткого разложения Бергстрема-Чебышева для плотности нормированной суммы независимых одинокого распределенных случайных величин. Показано, что подобные оценки могут быть получены для асимптотических разложений Бергстрема-Чебышева произвольной длинны.

A nonuniform estimate of the remainder term of the one-term Bergstrom-Chebyshev asymptotic expansion for the density of the sum of independent identically distributed random variables is obtained. It is shown that such estimates can be obtained for the Bergstrom-Chebyshev expansions of arbitrary length.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность аппроксимации, неравномерные оценки.
Keywords: central limit theorem, asymptotic expansions, the accuracy of approximation, nonuniform estimates.

Введение

Пусть P – распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ с нулевым средним и единичной дисперсией, $P(x)$ – функция распределения меры P, $P_n(x)$ – функция распределения меры $P^{*n}(\sqrt{n}A)$, где $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона. Хорошо известна неравномерная оценка Л. В. Осипова остаточной части асимптотического разложения Эджворта-Крамера

$$\left|P_n(x) - \Phi(x) - \sum_{l=1}^{k-2} \frac{\Gamma_l(x)}{n^{\frac{l}{2}}}\right| \le C(k) \left\{ \frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}(1+|x|)^k} \int_{|y|\ge\sqrt{n}(1+|x|)} |y|^k dP(y) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n^{\frac{k-1}{2}}(1+|x|)^{k+1}} \int_{|y|<\sqrt{n}(1+|x|)} |y|^{k+1} dP(y) + \left(\sup_{|t|\ge\frac{1}{12\beta_3}} |f(t)| + \frac{1}{2n}\right)^n \frac{n^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(1+|x|)^{k+1}} \right\},$$

которая справедлива для $k \geq 3$ при некоторых ограничениях на распределение P (см. [1], стр. 197). Величина $C(k)$ в оценке зависит только от числа k, а численная мажоранта для $C(k)$ при подсчете получается слишком большой и обычно не указывается. Поэтому приведенная оценка мало пригодна для расчетов.

В настоящей работе мы получим явную неравномерную оценку для остаточной части короткого разложения Бергстрема-Чебышева для плотности суммы независимых одинокого распределенных случайных величин. Также мы покажем, как получать подобные оценки для асимптотических разложений Бергстрема-Чебышева произвольной длинны.

1. Основные результаты

Нам понадобятся следующие обозначения: $p_n(x)$ – плотность (если она существует), соответствующая распределению $P^{*n}(\sqrt{n}A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $Q(x) = P(x) - \Phi(x)$, $\phi(x)$ – плотность стандартного нормального закона, $\phi_D(x)$ – плотность нормального закона с нулевым средним и дисперсией D. Пусть $\beta_j(P), \beta_j(\Phi), j \in \mathbb{N}$ – j-е абсолютные моменты распределений P, Φ соответственно, $m_j = \max(\beta_j(P), \beta_j(\Phi))$, $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Delta_j &= \int_{-\infty}^{\infty} x^j dQ(x), j \in \mathbb{Z}_+,\\
|\Delta|_j &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^j |dQ(x)|, j \in \mathbb{Z}_+,\\
B_k^j &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^j e^{-\frac{t^2 k}{2n}} dt, \text{ где } k, n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Отметим, что величина $|\Delta|_j$ – это расстояние полной вариации с весом $|x|^j$. Числа B_k^j зависят и от n, но, для краткости мы эту зависимость указывать не будем.

Предположим, что для характеристической функция $f(t)$ распределения P выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^\nu dt < \infty, \tag{1}$$

для некоторого $\nu > 0$. Пусть функция $\mu(t), e^{\frac{-t^2}{2}} \leq \mu(t) \leq 1$, и число $T > 0$ таковы, что

$$\mu(t) \geq |f(t)| \text{ для всех } |t| \leq T. \tag{2}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
B_{n-k}^{j,\mu,T} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^j \mu^{n-k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \text{ где } j \in \mathbb{Z}_+, k, n \in \mathbb{N}, n > k,\\
\alpha(T) &= \max_{t \geq T}\Big(|f(t)|, e^{-\frac{t^2}{2}}\Big).
\end{aligned}$$

Отметим, что при выполнении условия (1) существует непрерывная плотность $p_n(x)$ при всех $n \geq \nu$, кроме того, $\alpha(T) < 1$ для любого $T > 0$. Также отметим, что для распределения P с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным четвертым моментом пару μ, T всегда можно подобрать так, что $B_{n-k}^{j,\mu,T} \to B_n^j$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного k (см. [2]).

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Если четвертый момент распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен и выполнены условия (1), (2), то для $n > 6 + \nu$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение*

$$p_n(x) = \phi(x) - \frac{\Delta_3}{3!\sqrt{n}} \phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + R_2,$$

где для любого x, не равного нулю,

$$|R_2| \leq \frac{|\Delta|_4}{n|x|^4} \left(\frac{1}{24} B_{n-1}^8 + B_{n-1}^6 + 6B_{n-1}^4 + 7B_{n-1}^2 + B_{n-1}^0 \right) +$$
$$+ \frac{|\Delta|_3^2}{n|x|^4} \left(\frac{1}{72} B_{n-6}^{10,\mu,T} + \frac{5}{12} B_{n-5}^{8,\mu,T} + 12 B_{n-4}^{6,\mu,T} + 17 B_{n-3}^{4,\mu,T} + 5 B_{n-2}^{2,\mu,T} \right) +$$
$$+ \frac{|\Delta|_3}{n|x|^4} \left(\frac{|\Delta|_3 m_3 B_{n-4}^{7,\mu,T}}{18\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_3 m_3 B_{n-3}^{5,\mu,T}}{3\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_4 B_{n-2}^{3,\mu,T}}{6\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_3 m_4 B_{n-3}^{6,\mu,T}}{72n} \right) +$$
$$+ \frac{310 m_4}{\pi |x|^4} n^{\frac{9}{2}} \alpha^{n-6-\nu}(T) \int_T^\infty \max{}^\nu \left(|f(t)|, e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt.$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $f(t)$ – характеристическая функция распределения вероятностей P с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным j-м, $j = 3, 4, \ldots,$ моментом. Пусть $\Theta_j(t)$ – функция, определяемая из соотношения*

$$f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{(it)^3 \Delta_3}{3!} + \cdots + \frac{(it)^{j-1} \Delta_{j-1}}{(j-1)!} + \Theta_j(t),$$

тогда для производных $\left(\Theta_j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^{(k)}, k \in \mathbb{Z}_+$, верны оценки

$$\left| \left(\Theta_j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^{(k)} \right| \leq \frac{|t|^{j-k} |\Delta|_j}{(j-k)! n^{\frac{j}{2}}}, k = 0, 1, \ldots, j-1,$$
$$\left| \left(\Theta_j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^{(k)} \right| \leq \frac{|\Delta|_k}{n^{\frac{k}{2}}}, k \geq j.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right)^{(k)} = \left(1 + \frac{(it)^3 \Delta_3}{3! n^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{(it)^{j-1} \Delta_{j-1}}{(j-1)! n^{\frac{j-1}{2}}} + \Theta_j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^{(k)}.$$

Отсюда, если $k \geq j$, то

$$\left(\Theta_j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^{(k)} = \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right)^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{ix}{\sqrt{n}} \right)^k e^{\frac{itx}{\sqrt{n}}} dQ(x),$$

где $dQ = dP - d\Phi$. Поэтому

$$\left|\left(\Theta_j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(k)}\right| \leq \frac{|\Delta|_k}{n^{\frac{k}{2}}}, k \geq j.$$

Если $k < j$, то

$$\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{ix}{\sqrt{n}}\right)^k e^{\frac{itx}{\sqrt{n}}} dQ(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{ix}{\sqrt{n}}\right)^k \left(1 + \frac{itx}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{itx}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \gamma(t,x,n)\frac{1}{(j-k)!}\left(\frac{itx}{\sqrt{n}}\right)^{j-k}\right) dQ =$$

$$= \frac{i^k \Delta_k}{n^{\frac{k}{2}}} + \ldots + \frac{i^{j-1}\Delta_{j-1}t^{j-k-1}}{n^{\frac{j-1}{2}}(j-k-1)!} + \gamma(t,x,n)\frac{i^j|\Delta|_j t^{j-k}}{n^{\frac{j}{2}}(j-k)!},$$

где $\gamma(t,x,n)$–комплекснозначная функция, по модулю не превосходящая единицы.

С другой стороны

$$\left(1 + \frac{(it)^3\Delta_3}{3!n^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{(it)^{j-1}\Delta_{j-1}}{(j-1)!n^{\frac{j-1}{2}}} + \Theta_j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(k)} =$$

$$= \frac{i^k\Delta_k}{n^{\frac{k}{2}}} + \ldots + \frac{i^{j-1}\Delta_{j-1}t^{j-k-1}}{n^{\frac{j-1}{2}}(j-k-1)!} + \left(\Theta_j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(k)}.$$

Поэтому

$$\left|\left(\Theta_j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(k)}\right| \leq \frac{|t|^{j-k}|\Delta|_j}{(j-k)!n^{\frac{j}{2}}}, k = 0, 1, \ldots, j-1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если для характеристической функции распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией выполнено условие* (1), *то для $n \geq \nu + 2$ верно равенство*

$$p_n(x) = \phi(x) - \frac{\Delta_3}{3!n^{\frac{1}{2}}}\phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + R_2,$$

где

$$R_2 = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{\frac{-t^2(n-1)}{2n}} \Theta_4\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt + R_2^B,$$

$$R_2^B = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\sum_{j=0}^{n-2} C^1_{n-j-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{(n-j-2)t^2}{2n}} f^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^2 dt.$$

Функция $\Theta_4\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ *определена в лемме* 1.

Доказательство. Требуемое утверждение легко получается, если воспользоваться интегральными представлениями остаточных частей для разложений Бергстрема-Чебышева из [3], а затем эти представления выписать в терминах преобразования Фурье.

Доказательство теоремы. Обозначим

$$I_1 = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t^2(n-1)}{2n}} \Theta_4\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

Тогда, интегрируя по частям, легко получить, что

$$|I_1| \le \frac{n}{2\pi|x|^4}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left(e^{-\frac{t^2(n-1)}{2n}}\Theta_4\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(4)} dt\right|.$$

Выпишем первые пять многочленов Чебышева-Эрмита

$$1, x, x^2-1, x^3-3x, x^4-6x^2+3.$$

Далее, используя лемму 1 и указанные многочлены, получим оценку

$$|I_1| \le \frac{|\Delta|_4}{2\pi|x|^4 n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2(n-1)}{2n}} \times$$
$$\times\left((t^4+6t^2+3)\frac{t^4}{4!} + 4(|t|^3+3|t|)\frac{t^3}{3!} + 6(t^2+1)\frac{t^2}{2!} + 4t^2+1\right) dt \le$$
$$\le \frac{|\Delta|_4}{n|x|^4}\left(\frac{1}{24}B_{n-1}^8 + B_{n-1}^6 + 6B_{n-1}^4 + 7B_{n-1}^2 + B_{n-1}^0\right). \tag{3}$$

Обозначим $f = f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, $f^{(j)} = f^{(j)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, $j \in \mathbb{N}$, тогда верны равенства

$$\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)' = \frac{n-2}{\sqrt{n}} f^{n-3} f',$$

$$\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'' = \frac{1}{n}\left((n-2)(n-3)f^{n-4}f'^2 + (n-2)f^{n-3}f''\right),$$

$$\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''' = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big((n-2)(n-3)(n-4)f^{n-5}f'^3 +$$
$$+3(n-2)(n-3)f^{n-4}f'f'' + (n-2)f^{n-3}f'''\Big),$$

$$\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(4)} = \frac{1}{n^2}\Big((n-2)(n-3)(n-4)(n-5)f^{n-6}f'^4 +$$
$$+6(n-2)(n-3)(n-4)f^{n-5}f'^2f'' + 3(n-2)(n-3)f^{n-4}f''^2 +$$
$$+4(n-2)(n-3)f^{n-4}f'f''' + (n-2)f^{n-3}f^{(4)}\Big).$$

Так как $\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le \mu\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \mu, |t| \le \sqrt{n}T$, $|f'| = |\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{i\frac{t}{\sqrt{n}}x}P(dx)| \le \frac{t\beta_2(P)}{\sqrt{n}} \le \frac{t}{\sqrt{n}}$, $|f''| \le \beta_2(P) \le 1$, $|f'''| \le \beta_3(P) \le m_3$, $|f^{(4)}| \le m_4$, то для $|t| \le \sqrt{n}T$ справедливы оценки[1]

$$\left|f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le \mu^{n-2},$$

$$\left|\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'\right| \le \mu^{n-3}t,$$

$$\left|\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''\right| \le \mu^{n-4}t^2 + \mu^{n-3},$$

$$\left|\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'''\right| \le \mu^{n-5}t^3 + 3\mu^{n-4}t + \frac{1}{\sqrt{n}}\mu^{n-3}m_3,$$

$$\left|\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(4)}\right| \le \mu^{n-6}t^4 + 6\mu^{n-5}t^2 + 3\mu^{n-4} + \frac{4m_3}{\sqrt{n}}\mu^{n-4}t + \frac{m_4}{n}\mu^{n-3}.$$

Далее, верны неравенства

$$\left|f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le |f|^{n-2} \le |f|^{n-6},$$

$$\left|\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'\right| \le \sqrt{n}|f|^{n-3} \le \sqrt{n}|f|^{n-6},$$

$$\left|\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''\right| \le n|f|^{n-4} + |f|^{n-3} \le 2n|f|^{n-4} \le 2n|f|^{n-6}m_4,$$

$$\left|\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'''\right| \le n^{\frac{3}{2}}|f|^{n-5} + 3\sqrt{n}|f|^{n-4} + n^{-\frac{1}{2}}|f|^{n-3}m_3 \le 5n^{\frac{3}{2}}|f|^{n-6}m_4,$$

$$\left|\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(4)}\right| \le 15n^2|f|^{n-6}m_4.$$

Обозначим $g = g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}$, $g^{(j)} = g^{(j)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, $j \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что

$$\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)' = \frac{2}{\sqrt{n}}gg',$$

$$\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'' = \frac{1}{n}\left(2g'^2 + 2gg''\right),$$

$$\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''' = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\left(6g'g'' + 2gg'''\right),$$

$$\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(4)} = \frac{1}{n^2}\left(6g''^2 + 8g'g''' + 2gg^{(4)}\right).$$

[1]Здесь и далее символом μ обозначим величину $\mu\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$.

Так как $g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \theta_3\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, то, используя вычисленные производные и лемму 1, получим следующие оценки

$$C_n^2\left|g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le C_n^2\frac{|\Delta|_3^2t^6}{(3!)^2n^3} \le \frac{|\Delta|_3^2t^6}{72n},$$

$$C_n^2\left|\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'\right| \le 2C_n^2\frac{|\Delta|_3^2|t|^5}{2!3!n^3} \le \frac{|\Delta|_3^2|t|^5}{12n},$$

$$C_n^2\left|\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''\right| \le C_n^2\left(\frac{2|\Delta|_3^2t^4}{(2!)^2n^3} + \frac{2|\Delta|_3^2t^4}{3!n^3}\right) \le \frac{5|\Delta|_3^2t^4}{3n},$$

$$C_n^2\left|\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'''\right| \le C_n^2\left(\frac{6|\Delta|_3^2|t|^3}{2!n^3} + \frac{2|\Delta|_3^2|t|^3}{3!n^3}\right) \le \frac{5|\Delta|_3^2|t|^3}{3n},$$

$$C_n^2\left|\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(4)}\right| \le C_n^2\left(\frac{6|\Delta|_3^2t^2}{n^3} + \frac{8|\Delta|_3^2t^2}{2!n^3} + \frac{2|\Delta|_3|\Delta|_4|t|^3}{3!n^{\frac{7}{2}}}\right) \le$$

$$\le \frac{5|\Delta|_3^2t^2}{n} + \frac{|\Delta|_3|\Delta|_4|t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}}.$$

Заметим, что $g^j(t) \le 2m_j, j \in \mathbb{Z}_+$, поэтому справедливы следующие неравенства

$$\left|g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le 4,$$

$$\left|\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'\right| \le \frac{2^3}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{n}},$$

$$\left|\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)''\right| \le \frac{1}{n}(2^3+2^3) = \frac{16}{n},$$

$$\left|\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)'''\right| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(6\cdot 2^2 + 2^3m_3) \le \frac{32m_4}{n^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left|\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(4)}\right| \le \frac{1}{n^2}(24+32m_3+8m_4) \le \frac{72m_4}{n^2}.$$

Обозначим

$$I_2 = \frac{C_n^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^2 dt.$$

Если $\beta_j(P) < \infty, j \in \mathbb{N}$, то, по теореме Римана-Лебега, $f^{(j)}(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$. Отсюда, интегрируя по частям, легко видеть, что

$$I_2 \le \frac{C_n^2}{2\pi|x|^4}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^2\right)^{(4)} dt\right| \le$$

$$\le \frac{C_n^2}{2\pi|x|^4}\left(\left|\int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}\right| + \left|\int_{\mathbb{R}\setminus[-T\sqrt{n},T\sqrt{n}]}\right|\right) = I_2^1 + I_2^2.$$

Используя оценки для

$$\left(g^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(j)} = \left(\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^2\right)^{(j)}, \left(f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{(j)}, j \in \overline{1,4},$$

легко показать, что

$$I_2^1 = \frac{C_n^2}{2\pi|x|^4}\left|\int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi|x|^4}\int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}\left\{\mu^{n-2}\cdot\left(\frac{5|\Delta|_3^2t^2}{n} + \frac{|\Delta|_3|\Delta|_4|t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\right) + \right.$$
$$+4\cdot\mu^{n-3}t\cdot\frac{5|\Delta|_3^2|t|^3}{3n} + 6\cdot\left(\mu^{n-4}t^2 + \mu^{n-3}\right)\cdot\frac{5|\Delta|_3^2t^4}{3n} +$$
$$+4\cdot\left(\mu^{n-5}t^3 + 3\mu^{n-4}t + \frac{1}{\sqrt{n}}\mu^{n-3}m_3\right)\cdot\frac{|\Delta|_3^2|t|^5}{12n} +$$
$$\left. + \left(\mu^{n-6}t^4 + 6\mu^{n-5}t^2 + 3\mu^{n-4} + \frac{4m_3}{\sqrt{n}}\mu^{n-4}t + \frac{m_4}{n}\mu^{n-3}\right)\cdot\frac{|\Delta|_3^2t^6}{72n}\right\}dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|I_2^1| \leq \frac{|\Delta|_3^2}{n|x|^4}\left(\frac{1}{72}B_{n-6}^{10,\mu,T} + \frac{5}{12}B_{n-5}^{8,\mu,T} + 12B_{n-4}^{6,\mu,T} + 17B_{n-3}^{4,\mu,T} + 5B_{n-2}^{2,\mu,T}\right) +$$
$$+\frac{|\Delta|_3}{n|x|^4}\left(\frac{|\Delta|_3m_3B_{n-4}^{7,\mu,T}}{18\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_3m_3B_{n-3}^{5,\mu,T}}{3\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_4B_{n-2}^{3,\mu,T}}{6\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_3m_4B_{n-3}^{6,\mu,T}}{72n}\right). \quad (4)$$

Оценим величину I_2^2. Верно неравенство

$$|I_2^2| = \frac{C_n^2}{2\pi|x|^4}\left|\int_{\mathbb{R}\setminus[-T\sqrt{n},T\sqrt{n}]}\right| \leq$$

$$\leq \frac{C_n^2}{2\pi|x|^4}\int_{\mathbb{R}\setminus[-T\sqrt{n},T\sqrt{n}]}\left\{1\cdot 4\cdot 15n^2|f|^{n-6}m_4 + 4\cdot\frac{8}{\sqrt{n}}\cdot 5n^{\frac{3}{2}}|f|^{n-6}m_4 + \right.$$
$$\left. +6\cdot\frac{16}{n}\cdot 2n|f|^{n-6}m_4 + 4\cdot\frac{32m_4}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt{n}|f|^{n-6} + \frac{72m_4}{n^2}|f|^{n-6}\right\}dt.$$

Поэтому, заменяя в последнем выражении $|f|^{n-6}$ на $\max^{n-6}\left(|f(t)|, e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$ легко получить, что

$$|I_2^2| \leq \frac{310m_4}{\pi|x|^4}n^{\frac{9}{2}}\alpha^{n-6-\nu}(T)\int_T^\infty \max{}^{\nu}\left(|f(t)|, e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt. \quad (5)$$

Заметим, что оценка для I_2, которая есть сумма оценок для I_2^1, I_2^2 оценивает и R_2^B из леммы 2. Действительно, если в выражении для R_2^B вместо

$$\sum_{j=0}^{n-2} C_{n-j-1}^1 e^{-\frac{(n-j-2)t^2}{2n}} f^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \quad (6)$$

подставить величину $C_n^2 f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, то мы получим I_2, а поскольку при оценке производных функции $f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ использовались мажоранты, являющиеся одновременно мажорантами для $e^{-\frac{t^2}{2n}}$, полученные нами оценки для производных функции $C_n^2 f^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ являются оценками и для производных функции (6).

Складывая (3), (4), (5) получаем оценку остаточной части короткого разложения Бергстрема-Чебышева. Теорема доказана.

Скажем о том, как получать неравномерные оценки для разложения Бергстрема-Чебышева с большим количеством членов в главной части, чем в доказанной теореме. Для пояснений нам понадобится следующее утверждение, которое является аналогом леммы 2.

Лемма 3. *Если для характеристической функции распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией выполнено условие* (1)*, то для $n > \nu + 3$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение*

$$p_n(x) = \phi(x) - \frac{\Delta_3}{3!\sqrt{n}}\phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + \frac{\Delta_4}{4!n}\phi^{(4)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + C_n^2\frac{\Delta_3^2}{(3!)^2n^3}\phi^{(3)}_{1-\frac{2}{n}}(x) + R_3, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}R_3 = \tfrac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{\frac{-t^2(n-1)}{2n}}\Theta_5\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)dt+\\ +\frac{C_n^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{\frac{-t^2(n-2)}{2n}}\frac{(it)^3\Delta_3}{3!}\Theta_4\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt+\\ +\frac{C_n^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{\frac{-t^2(n-2)}{2n}}\Theta_3\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\Theta_4\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt + R_3^B,\\ R_3^B = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-3} C_{n-j-1}^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-\frac{(n-j-2)t^2}{2n}}f^j\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(f\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^3 dt.\end{gathered} \tag{8}$$

Функции $\Theta_j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), j = 3, 4, \ldots,$ определены в лемме 1.

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2, поэтому мы это доказательство опустим.

Заключение

Чтобы получить неравномерную оценку для разложения Бергстрема-Чебышева (7), достаточно оценить каждое из слагаемых остаточной части (8). Легко видеть, что оценки для слагаемых из (8) можно получить теми же методами, с помощью которых доказывалась теорема.

Автор благодарит В.В.Сенатова за постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

[2] Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009.

[3] Сюлюкин А.В. Об асимптотических разложениях Бергстрема-Чебышева. Теория вероятностей и ее применения, том 54, №1, 2009.