УДК 519.837

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ МАКСИМИННОЙ СТРАТЕГИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИГРОКА С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША В МНОГОШАГОВОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ИГРЕ N ЛИЦ СО СТРАТЕГИЯМИ-СИНТЕЗАМИ И КОНЕЧНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ИГРОКОВ

Сушкин В.В.
кафедра компьютерной безопасности и математических методов управления
(*Vjacheslav.Sushkin@tversu.ru*)

Поступила в редакцию 16.02.2009, после переработки 18.02.2009.

Исследуется многошаговая позиционная игра n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами управляющих воздействий игроков. Получено необходимое и достаточное условие для максиминной стратегии произвольного игрока, функция выигрыша которого является терминальной.

Multi-step positional game of n persons with strategies-syntheses, $n \geqslant 2$, and finite sets of controlling actions of players is investigated. Necessary and sufficient condition for maximin strategy of arbitrary player, whose win function is terminal, has been gotten.

Ключевые слова: игра, игрок, стратегия, ситуация, функция выигрыша, гарантированный выигрыш, максиминная стратегия, многошаговая позиционная игра, шаг, позиция, траектория, управление, начальное множество, терминальное множество, стратегия-синтез, терминальная функция, терминальная функция выигрыша.
Keywords: game, player, strategy, situation, win function, guaranteed win, maximin strategy, multi-step positional game, step, position, trajectory, control, initial set, terminal set, strategy-synthesis, terminal function, terminal win function.

Введение

Для исследуемой в работе многошаговой позиционной игры [1] n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами управляющих воздействий игроков получено необходимое и достаточное условие для максиминной стратегии произвольного игрока, функция выигрыша которого является терминальной. Многошаговая позиционная игра со стратегиями-синтезами является частным случаем бескоалиционной игры [2]. Определение бескоалиционной игры в работе приводится во втором пункте. В этом же пункте вводятся понятия и обозначения, непосредственно связанные с бескоалиционной игрой. Описание многошаговой позиционной игры со стратегиями-синтезами приводится в следующем (третьем) пункте. А в первом пункте вводится ряд обозначений, имеющих более общий характер по сравнению с обозначениями, непосредственно связанными с бескоалиционной игрой и игрой многошаговой позиционной со стратегиями-синтезами. В последнем (пятом) пункте представлены полученные результаты. Необходимые для их доказательства утверждения (из работы [3]) приводятся четвёртом пункте.

1. Некоторые понятия и обозначения

Пусть M – множество. Введём ряд обозначений, связанных с M:

$\mathbf{M}(M)$ – множество подмножеств множества M,

$\mathbf{M}_{+}(M)$ – множество непустых подмножеств множества M,

$\mathbf{M}_{1}(M)$ – множество одноэлементных подмножеств множества M.

Пусть M – множество, а a – элемент некоторого множества A, сам каким-либо множеством не являющийся. Запись $M \setminus a$ будем использовать для обозначения разности $M \setminus \{a\}$.

Пусть даны множества $M_i, i = \overline{i_1, i_2}$, где i_1 и i_2 – это целые числа, удовлетворяющие условию $i_1 \leqslant i_2$. Запись $M_{i_1} \times \ldots \times M_{i_2}$ в случае, если $i_1 = i_2$, будет представлять собой обозначение множества M_{i_1}.

Символ $\mathbf{R}$ в работе является обозначением множества действительных чисел, а символ $\overline{\mathbf{R}}$ – обозначением объединения $\mathbf{R}$ и множества $\{-\infty, \infty\}$.

Пусть M – некоторое подмножество множества $\overline{\mathbf{R}}$. Символом $\inf M$ будем обозначать число $r \in \overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее условию

$$(\forall a \in \overline{\mathbf{R}}, ((a \in M) \Rightarrow (r \leqslant a)))\wedge$$
$$\wedge\,(\forall \tilde{r} \in \overline{\mathbf{R}},$$
$$((\forall \tilde{a} \in \overline{\mathbf{R}}, ((\tilde{a} \in M) \Rightarrow (\tilde{r} \leqslant \tilde{a}))) \Rightarrow (\tilde{r} \leqslant r))).$$

а символом $\sup M$ – число $r \in \overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее такому условию

$$(\forall a \in \overline{\mathbf{R}}, ((a \in M) \Rightarrow (a \leqslant r)))\wedge$$
$$\wedge\,(\forall \tilde{r} \in \overline{\mathbf{R}},$$
$$((\forall \tilde{a} \in \overline{\mathbf{R}}, ((\tilde{a} \in M) \Rightarrow (\tilde{a} \leqslant \tilde{r}))) \Rightarrow (r \leqslant \tilde{r}))).$$

2. Бескоалиционная игра n лиц. Определение. Основные понятия, связанные с игрой

Бескоалиционной игрой n лиц, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, принято называть набор

$$\Gamma = \langle I, V(1), \ldots, V(n), J(1), \ldots, J(n)\rangle,$$

в котором

I – это множество $\{1, \ldots, n\}$, называемое множеством номеров игроков,

$V(i), i \in I$, – непустое множество, называемое множеством стратегий i-го игрока,

$J(i), i \in I$, – отображение с областью определения $V(1) \times \ldots \times V(n)$ и множеством значений в $\mathbf{R}$, называемое функцией выигрыша i-го игрока.

Множество $V(1) \times \ldots \times V(n)$ принято называть множеством ситуаций.

Элементы

a) множества номеров игроков,

b) множества стратегий i-го игрока, $i \in I$, и

c) множества ситуаций

называются соответственно:

a) номерами игроков,

b) стратегиями i-го игрока и

c) ситуациями.

Предположим, рассматривается произвольная бескоалиционная игра n лиц, $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Так же, как и в определении бескоалиционной игры,

множество номеров игроков будем обозначать символом I,

множество стратегий i-го игрока, $i \in I$, – символом $V(i)$, и

функцию выигрыша i-го игрока, $i \in I$, – символом $J(i)$.

Для обозначения множества ситуаций будем использовать букву V.

Стратегии i-го игрока будем обозначать символом $v(i)$, ситуации – символом v.

Положим, что $n \geqslant 2$.

Введём множества $V(J), J \in \{I \setminus i | i \in I\}$.

$$V(I \setminus i) = \begin{cases} V(i+1) \times \ldots \times V(n), \text{если } i = 1, \\ V(1) \times \ldots \times V(i-1) \times V(i+1) \times \ldots \times V(n), \text{если } (i \neq 1) \wedge (i \neq n), \\ V(1) \times \ldots \times V(i-1), \text{если } i = n, \end{cases}$$

$i \in I$.

Для обозначения элемента множества $V(J), J \in \{I \setminus i | i \in I\}$, будем использовать символ $v(J)$.

Пусть v – произвольный элемент множества V, а i – произвольный элемент множества I. В качестве обозначения элемента v будем также использовать следующую запись

$$v(i); v(I \setminus i).$$

Символом $G(i), i \in I$, будем обозначать отображение с областью определения $V(i)$ и множеством значений в $\overline{\mathbf{R}}$, которое (имеется в виду отображение) произвольному элементу $v(i) \in V(i)$ ставит в соответствие значение, равное

$$\inf_{v(I \setminus i) \in V(I \setminus i)} J(i)(v(i); v(I \setminus i)).$$

Данное отображение принято называть гарантированным выигрышем i-го игрока.

Символом $G^*(i), i \in I$, будем обозначать значение

$$\sup_{v(i) \in V(i)} G(i)(v(i)).$$

Стратегия $v(i)$ i-го игрока называется максиминной, если выполнено равенство

$$G(i)(v(i)) = G^*(i).$$

Множество максиминных стратегий i-го игрока, $i \in I$, будем обозначать символом $V^\circ(i)$.

3. Описание многошаговой позиционной игры со стратегиями-синтезами

Многошаговая позиционная игра n лиц со стратегиями-синтезами, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, представляет собой бескоалиционную игру n лиц, множества стратегий и функции выигрыша которой определяются следующим образом.

Заданным является число $k'_\circ \in \{1, 2, \ldots\}$. Целые числа от 0 до $k'_\circ$, называемые номерами моментов времени, составляют множество $K_\circ$, называемое соответственно: множеством номеров моментов времени.

Для каждого $k \in K_\circ$ заданным является непустое множество $\mathbf{X}_k$, называемое пространством позиций, соответствующих моменту k. Элементы этого множества (соответствующим образом называемые) будем обозначать символом x_k.

Для каждой пары $(i, k) \in I \times (K_\circ \setminus k'_\circ)$ заданным является непустое множество $\mathbf{U}_k(i)$, называемое пространством управляющих воздействий на шаге $k+1$. Элементы указанного множества (соответствующим образом называемые) будем обозначать символом $u_k(i)$.

Пусть k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$. Символом $\mathbf{U}_k$ будем обозначать множество $\mathbf{U}_k(1) \times \ldots \times \mathbf{U}_k(n)$. Для обозначения элементов данного множества будем использовать символ u_k.

Для каждого $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$ заданным является отображение

$$F_k : \mathbf{X}_k \times \mathbf{U}_k \to \mathbf{X}_{k+1},$$

называемое составляющей оператора перехода, соответствующей шагу $k+1$. Оператором перехода принято называть последовательность $\{F_k\}_{k=0}^{k'_\circ - 1}$.

Пусть i – произвольный элемент множества I, k_1 – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$, k_2 – произвольный элемент множества $\{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\}$. Символом $\mathbf{U}(k_1, k_2)(i)$ будем обозначать множество $\mathbf{U}_{k_1}(i) \times \ldots \times \mathbf{U}_{k_2}(i)$. Для обозначения элемента данного множества будем использовать символ $u(k_1, k_2)(i)$.

Пусть i - произвольный элемент множества I, а k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$. Символом $\mathbf{U}[k](i)$ будем обозначать множество

$$\bigcup_{k_2 \in \{k, \ldots, k'_\circ - 1\}} \mathbf{U}(k, k_2)(i).$$

Для обозначения элемента данного множества будем использовать символ $u[k](i)$.

Пусть i – произвольный элемент множества I. Символом $\mathbf{U}(i)$ будем обозначать множество $\mathbf{U}[0](i)$. Элементы данного множества будем называть управлениями i-го игрока и обозначать символом $u(i)$.

Элементы множеств $\mathbf{U}[k](i), i \in I, k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, будем называть усечёнными управлениями i-го игрока. Очевидно, любое управление i-го игрока, $i \in I$, является усечённым управлением этого игрока.

Пусть $i \in I, k_1 \in K_\circ \setminus k'_\circ, k_2 \in \{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\}$, и пусть $u(k_1, k_2)(i) \in \mathbf{U}(k_1, k_2)(i)$, пусть также $k \in \{k_1, \ldots, k_2\}$. Величину $u_k(i)$ будем называть компонентой усечённого управления $u(k_1, k_2)(i)$, соответствующей k-му моменту времени (или (другой вариант) моменту с номером k), величину $u_{k_2}(i)$ будем также называть последней компонентой усечённого управления $u(k_1, k_2)(i)$.

Пусть k_1 – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$, а k_2 – произвольный элемент множества $\{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\}$. Символом $\mathbf{U}(k_1, k_2)$ будем обозначать множество $\mathbf{U}(k_1, k_2)(1) \times \ldots \times \mathbf{U}(k_1, k_2)(n)$. Для обозначения элемента данного множества будем использовать символ $u(k_1, k_2)$.

Пусть k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$. Символом $\mathbf{U}[k]$ будем обозначать множество

$$\mathop{\cup}_{k_2 \in \{k, \ldots, k'_\circ - 1\}} \mathbf{U}(k, k_2).$$

Для обозначения элемента данного множества будем использовать символ $u[k]$.

Символом $\mathbf{U}$ будем обозначать множество $\mathbf{U}[0]$. Для обозначения элементов этого множества будем использовать символ u.

Пусть k_1 – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$, k_2 – произвольный элемент множества $\{k_1 + 1, \ldots, k'_\circ\}$. Символом $\mathbf{X}(k_1, k_2)$ будем обозначать множество $\mathbf{X}_{k_1} \times \ldots \times \mathbf{X}_{k_2}$. Для обозначения элемента данного множества будем использовать символ $x(k_1, k_2)$.

Пусть k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$. Символом $\mathbf{X}[k]$ будем обозначать множество

$$\mathop{\cup}_{k_2 \in \{k+1, \ldots, k'_\circ\}} \mathbf{X}(k, k_2).$$

Для обозначения элемента данного множества будем использовать символ $x[k]$.

Символом $\mathbf{X}$ будем обозначать множество $\mathbf{X}[0]$. Элементы этого множества будем называть траекториями и обозначать символом x.

Элементы множеств $\mathbf{X}[k], k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, будем называть усечёнными траекториями. Очевидно, множество траекторий является подмножеством множества усечённых траекторий.

Пусть k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$. Символом $k_2^u[k]$ будем обозначать отображение с областью определения $\mathbf{U}[k]$ и множеством значений в множестве $\{k, \ldots, k'_\circ - 1\}$, которое (имеется в виду отображение) произвольному элементу $u[k] \in \mathbf{U}[k]$ ставит в соответствие число $k_2 \in \{k, \ldots, k'_\circ - 1\}$ такое, что последняя компонента каждого из усечённых управлений $u[k](i), i \in I$, является компонентой (данного усечённого управления), соответствующей моменту с номером k_2.

Пусть k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$. Символом $F[k]$ будем обозначать отображение с областью определения $\mathbf{X}_k \times \mathbf{U}[k]$ и множеством значений в $\mathbf{X}[k]$, которое (имеется в виду отображение) произвольной паре $(x_k, u[k]) \in \mathbf{X}_k \times \mathbf{U}[k]$ ставит в соответствие усечённую траекторию $\tilde{x}(k, k_2^u[k](u[k]) + 1)$, определяемую с помощью соотношений

$$\tilde{x}_k = x_k,$$
$$\tilde{x}_{l+1} = F_l(\tilde{x}_l, u_l), l = \overline{k, k_2^u[k](u[k])}.$$

Отображение $F[0]$ будем обозначать символом F.

Для каждой пары $(i,k) \in I \times (K_\circ \setminus k'_\circ)$ заданным является отображение $F_k^\circ(i) : \mathbf{X}_k \times \mathbf{U}_k \to \mathbf{R}$, а для каждой пары $(i,k) \in I \times (K_\circ \setminus 0)$ – отображение $\Phi_k(i) : \mathbf{X}_k \to \mathbf{R}$, последнее (имеется в виду отображение $\Phi_k(i)$) принято называть терминальной функцией i-го игрока, соответствующей k-му моменту времени (или (другой вариант) моменту с номером k).

Пусть i – произвольный элемент множества I, k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$. Символом $J^u[k](i)$ будем обозначать отображение с областью определения $\mathbf{X}_k \times \mathbf{U}[k]$ и множеством значений в $\mathbf{R}$, которое (имеется в виду отображение) произвольной паре $(x_k, u[k]) \in \mathbf{X}_k \times \mathbf{U}[k]$ ставит в соответствие значение суммы

$$\sum_{l=k}^{k_2} F_l^\circ(i)(\tilde{x}_l, u_l) + \Phi_{k_2+1}(i)(\tilde{x}_{k_2+1}),$$

где $k_2 = k_2^u[k](u[k])$, а $(\tilde{x}_k, \ldots, \tilde{x}_{k_2+1}) = F[k](x_k, u[k])$.

Пусть i – произвольный элемент множества I. Символом $J^u(i)$ будем обозначать отображение $J^u[0](i)$.

Заданным является множество $X_0 \in \mathbf{M}_1(\mathbf{X}_0)$, называемое начальным множеством. Элемент этого множества будем называть начальной позицией и обозначать символом x_0^η.

Для каждого $k \in K_\circ$ заданным является множество $X'_k \in \mathbf{M}(\mathbf{X}_k)$, называемое терминальным множеством, соответствующим k-му моменту времени (или (другой вариант) моменту с номером k), при этом $X'_0 = \varnothing$, а $X'_{k'_\circ} = \mathbf{X}_{k'_\circ}$.

Для каждого набора

$$(i, k, x_k) \in \bigcup_{(\tilde{i}, \tilde{k}) \in I \times (K_\circ \setminus k'_\circ)} (\{\tilde{i}\} \times \{\tilde{k}\} \times \mathbf{X}_{\tilde{k}})$$

заданным является множество $U_k(i)(x_k) \in \mathbf{M}_+(\mathbf{U}_k(i))$, называемое множеством управляющих воздействий i-го игрока на шаге $k+1$, соответствующих позиции x_k.

Пусть k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$, а x_k – произвольный элемент множества $\mathbf{X}_k$. Символом $U_k(x_k)$ будем обозначать множество $U_k(1)(x_k) \times \ldots \times U_k(n)(x_k)$.

Символами $X_k, k \in K_\circ \setminus 0$, будем обозначать множества, определяемые с помощью следующих соотношений

$$X_{k+1} = \{x_{k+1} \in \mathbf{X}_{k+1} | \exists x_k \in \mathbf{X}_k,$$
$$((x_k \in X_k \setminus X'_k) \wedge (\exists u_k \in U_k(x_k), x_{k+1} = F_k(x_k, u_k)))\},$$
$$k \in K_\circ \setminus k'_\circ.$$

Множество $X_k, k \in K_\circ \setminus 0$, принято называть множеством достижимости, соответствующим k-му моменту времени (или (другой вариант) моменту с номером k).

Нетрудно убедиться в справедливости следующих условий

$$1) X_{k'_\circ} \setminus X'_{k'_\circ} = \varnothing,$$
$$2) k'_\circ \in \{k \in K_\circ | X_k \setminus X'_k = \varnothing\},$$
$$3) \{k \in K_\circ | X_k \setminus X'_k = \varnothing\} \neq \varnothing.$$

Нетрудно также убедиться в том, что множество $\{k \in K_\circ | X_k \setminus X'_k = \varnothing\}$ конечно.

Символом k' будем обозначать значение

$$min\{k \in K_\circ | X_k \setminus X'_k = \varnothing\}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости того, что $1 \leqslant k' \leqslant k'_\circ$.

Символом K будем обозначать множество $\{0, 1, \ldots, k'\}$.

Нетрудно убедиться в справедливости условий

$$1)\ (\forall k \in K \setminus k', X_k \setminus X'_k \neq \varnothing) \wedge (\forall k \in \{k', \ldots, k'_\circ\}, X_k \setminus X'_k = \varnothing),$$
$$2)\ (\forall k \in K, X_k \neq \varnothing) \wedge (\forall k \in K_\circ, ((k > k') \Rightarrow (X_k = \varnothing))).$$

Пусть i – произвольный элемент множества I, а k – произвольный элемент множества $K \setminus k'$.

Символом $V_k(i)$ будем обозначать множество всевозможных отображений $\gamma : X_k \setminus X'_k \to \mathbf{U}_k(i)$, для каждого из которых справедливо следующее

$$\forall x_k \in X_k \setminus X'_k, \gamma(x_k) \in U_k(i)(x_k).$$

Для обозначения элементов множества $V_k(i)$ будем использовать символ $v_k(i)$.

Символом $V[k](i)$ будем обозначать множество $V_k(i) \times \ldots \times V_{k'-1}(i)$. Для обозначения элементов этого множества будем использовать символ $v[k](i)$.

В определяемой игре множество стратегий i-го игрока, $i \in I$, совпадает с множеством $V[0](i)$.

Пусть k – произвольный элемент множества $K \setminus k'$.

Символом V_k будем обозначать множество $V_k(1) \times \ldots \times V_k(n)$. Для обозначения элемента данного множества будем использовать символ v_k.

Символом $V[k]$ будем обозначать множество $V[k](1) \times \ldots \times V[k](n)$. Для обозначения элемента этого множества будем использовать символ $v[k]$.

Нетрудно убедиться в том, что $V = V[0]$.

Пусть k_1 – произвольный элемент множества $K \setminus k'$, k_2 – произвольный элемент множества $\{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\}$, а x_{k_1} – произвольный элемент множества $X_{k_1} \setminus X'_{k_1}$. Символом $U(k_1, k_2)\{x_{k_1}\}$ будем обозначать множество всевозможных элементов $u(k_1, k_2) \in \mathbf{U}(k_1, k_2)$, для каждого из которых справедливо следующее: набор $\tilde{x}(k_1, k_2 + 1)$ из $\mathbf{X}(k_1, k_2 + 1)$, равный $F[k_1](x_{k_1}, u(k_1, k_2))$, удовлетворяет условию

$$(\forall k \in \{k_1, \ldots k_2\}, (u_k \in U_k(\tilde{x}_k)) \wedge (\tilde{x}_k \notin X'_k)) \wedge (\tilde{x}_{k_2+1} \in X'_{k_2+1}).$$

Пусть $k_1 \in K \setminus k', k_2 \in \{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\}, x_{k_1} \in X_{k_1} \setminus X'_{k_1}$, и пусть $u(k_1, k_2) \in U(k_1, k_2)\{x_{k_1}\}$. Нетрудно убедиться в том, что набор $\tilde{x}(k_1, k_2 + 1)$ из $\mathbf{X}(k_1, k_2 + 1)$, равный $F[k_1](x_{k_1}, u(k_1, k_2))$, удовлетворяет следующему

$$\forall k \in \{k_1, \ldots, k_2 + 1\}, \tilde{x}_k \in X_k.$$

Нетрудно также убедиться в истинности соотношения

$$\forall k_1 \in K \setminus k', \forall x_{k_1} \in X_{k_1} \setminus X'_{k_1}, \forall k_2 \in \{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\},$$
$$((k_2 > k' - 1) \Rightarrow (U(k_1, k_2)\{x_{k_1}\} = \varnothing)).$$

Пусть k – произвольный элемент множества $K \setminus k'$, а x_k – произвольный элемент множества $X_k \setminus X'_k$. Символом $U[k]\{x_k\}$ будем обозначать множество всевозможных элементов $u[k] \in \mathbf{U}[k]$, для каждого из которых справедливо следующее: набор $\tilde{x}(k, k_3)$ из $\mathbf{X}(k, k_3)$ (здесь k_3 – это значение суммы $k_2^u[k](u[k]) + 1$), равный $F[k](x_k, u[k])$, удовлетворяет условию

$$(\forall l \in \{k, \ldots, k_3 - 1\}, (u_l \in U_l(\tilde{x}_l)) \wedge (\tilde{x}_l \notin X'_l)) \wedge (\tilde{x}_{k_3} \in X'_{k_3}).$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего

$$\forall k \in K \setminus k', \forall x_k \in X_k \setminus X'_k,$$
$$U[k]\{x_k\} = \bigcup_{k_2 \in \{k, \ldots, k' - 1\}} U(k, k_2)\{x_k\}.$$

Пусть x_0 – это элемент множества X_0. Символом $U\{x_0\}$ будем обозначать множество $U[0]\{x_0\}$.

Пусть k – произвольный элемент множества $K \setminus k'$. Символом Π_k будем обозначать отображение с областью определения $(X_k \setminus X'_k) \times V_k$ и множеством значений в $\mathbf{U}_k$, которое (имеется в виду отображение) произвольной паре $(x_k, v_k) \in (X_k \setminus X'_k) \times V_k$ ставит в соответствие элемент $u_k \in U_k(x_k)$, определяемый следующим образом

$$u_k(i) = v_k(i)(x_k), i = \overline{1, n}.$$

Пусть k – произвольный элемент множества $K \setminus k'$. Символом $\Pi[k]$ будем обозначать отображение с областью определения $(X_k \setminus X'_k) \times V[k]$ и множеством значений в $\mathbf{U}[k]$, которое (имеется в виду отображение) произвольной паре $(x_k, v[k]) \in (X_k \setminus X'_k) \times V[k]$ ставит в соответствие такой элемент $u[k] \in U[k]\{x_k\}$, который вместе с набором $\tilde{x}(k, k_3)$ из $\mathbf{X}(k, k_3)$ (здесь k_3 – это значение суммы $k_2^u[k](u[k]) + 1$), равным $F[k](x_k, u[k])$, удовлетворяет следующему

$$\forall l \in \{k, \ldots, k_3 - 1\}, u_l \in \Pi_l(\tilde{x}_l, v_l);$$

нетрудно показать, что для данной пары $(x_k, v[k])$ указанный элемент $u[k]$ существует и единственен.

Символом Π будем обозначать отображение $\Pi[0]$.

Пусть i – произвольный элемент множества I, k – произвольный элемент множества $K \setminus k'$, x_k – произвольный элемент множества $X_k \setminus X'_k$. Символом $J[k, x_k](i)$ будем обозначать отображение с областью определения $V[k]$ и множеством значений в $\mathbf{R}$, которое (имеется в виду отображение) произвольному $v[k] \in V[k]$ ставит в соответствие значение $J^u[k](i)(x_k, \Pi[k](x_k, v[k]))$.

В определяемой игре функция выигрыша i-го игрока, $i \in I$, совпадает с функцией $J[0, x_0^\eta](i)$.

Функцию выигрыша i-го игрока, $i \in I$, принято называть терминальной функцией выигрыша, если выполнено следующее условие

$$\forall k \in K_\circ \setminus k'_\circ, \forall x_k \in \mathbf{X}_k, \forall u_k \in \mathbf{U}_k, F_k^\circ(i)(x_k, u_k) = 0.$$

4. Вспомогательные утверждения

В данном пункте для многошаговой позиционной игры n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами управляющих воздействий игроков представлен ряд утверждений из [3], необходимых для доказательства утверждений, сформулированных в следующем пункте.

Предположим, рассматривается произвольная многошаговая позиционная игра n лиц со стратегиями-синтезами, $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Допустим, i – произвольный элемент множества I, а $k \in \{k'\}$. Символом $V[k](i)$ будем обозначать множество $\{0\}$. Для обозначения элемента этого множества будем использовать символ $v[k](i)$.

Пусть $n \geqslant 2$.

Введём множества $V[k](J), J \in \{I \setminus i | i \in I\}, k \in K \setminus k'$.

$$V[k](I \setminus i) = \begin{cases} V[k](i+1) \times \ldots \times V[k](n), \text{если } i = 1, \\ V[k](1) \times \ldots \times V[k](i-1) \times V[k](i+1) \times \ldots \times V[k](n), \\ \text{если } (i \neq 1) \wedge (i \neq n), \\ V[k](1) \times \ldots \times V[k](i-1), \text{если } i = n, \end{cases}$$
$$i \in I, k \in K \setminus k'.$$

Для обозначения элемента множества $V[k](J), J \in \{I \setminus i | i \in I\}, k \in K \setminus k'$, будем использовать символ $v[k](J)$. Очевидно, что при любом $i \in I$ $V[0](I \setminus i) = V(I \setminus i)$.

Пусть k – произвольный элемент множества $K \setminus k'$, $v[k]$ – произвольный элемент множества $V[k]$, а i – произвольный элемент множества I. В качестве обозначения элемента $v[k]$, в том числе, будем использовать такую запись

$$v[k](i); v[k](I \setminus i).$$

Предположим теперь, что рассматривается произвольная многошаговая позиционная игра n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами $U_k(i)(x_k), i \in I, k \in K \setminus k', x_k \in \mathbf{X}_k$.

Нетрудно убедиться в том, что $V[k](I \setminus i), i \in I, k \in K \setminus k'$, являются непустыми и конечными.

Пусть i – произвольный элемент множества I, k – произвольный элемент множества K, x_k – произвольный элемент множества X_k. Символом $G[k, x_k](i)$ будем обозначать отображение с областью определения $V[k](i)$ и множеством значений в $\mathbf{R}$, которое (имеется в виду отображение) произвольному элементу $v[k](i) \in V[k](i)$ ставит в соответствие значение $\Phi_k(i)(x_k)$, если $k \in K \setminus 0$, а $x_k \in X_k \cap X'_k$, и значение

$$min J[k, x_k](i)(v[k](i); v[k](I \setminus i)),$$
$$v[k](I \setminus i) \in V[k](I \setminus i)$$

если $k \in K \setminus k'$, а $x_k \in X_k \setminus X'_k$. Нетрудно убедиться в том, что при любом $i \in I$ $G[0, x_0^\eta](i) = G(i)$.

Введём множества $U_k(J)(x_k), J \in \{I \setminus i | i \in I\}, k \in K_\circ \setminus k'_\circ, x_k \in \mathbf{X}_k$.

$$U_k(I \setminus i)(x_k) = \begin{cases} U_k(i+1)(x_k) \times \ldots \times U_k(n)(x_k), \text{если } i = 1, \\ U_k(1)(x_k) \times \ldots \times U_k(i-1)(x_k) \times U_k(i+1)(x_k) \times \ldots \times U_k(n)(x_k), \\ \text{если } (i \neq 1) \wedge (i \neq n), \\ U_k(1)(x_k) \times \ldots \times U_k(i-1)(x_k), \text{если } i = n, \end{cases}$$

$i \in I, k \in K_\circ \setminus k'_\circ, x_k \in \mathbf{X}_k$.

Для обозначения элемента множества $U_k(J)(x_k), J \in \{I \setminus i | i \in I\}$, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ, x_k \in \mathbf{X}_k$, будем использовать символ $u_k(J)$.

Пусть k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$, x_k – произвольный элемент множества $\mathbf{X}_k$, u_k – произвольный элемент множества $U_k(x_k)$, i – произвольный элемент множества I. В качестве обозначения элемента u_k будем, в том числе, использовать такую запись

$$u_k(i); u_k(I \setminus i).$$

Нетрудно показать, что множества $U_k(I \setminus i)(x_k), i \in I, k \in K \setminus k', x_k \in \mathbf{X}_k$, являются непустыми и конечными множествами.

Пусть i – произвольный элемент множества I. Введём отображения

$$\begin{aligned} &G_k(i) : X_k \to \mathbf{R}, k \in K, \text{и} \\ &G^u_k(i) : \underset{\tilde{x}_k \in X_k \setminus X'_k}{\cup} (\{\tilde{x}_k\} \times U_k(i)(\tilde{x}_k)) \to \mathbf{R}, k \in K \setminus k'. \end{aligned}$$

$$G_k(i)(x_k) = \Phi_k(i)(x_k), k \in \{l \in K \setminus 0 | X_l \cap X'_l \neq \varnothing\}, x_k \in X_k \cap X'_k,$$

$$\begin{cases} G^u_k(i)(x_k, u_k(i)) = \\ = \underset{u_k(I \setminus i) \in U_k(I \setminus i)(x_k)}{min}(F^\circ_k(i)(x_k, u_k(i); u_k(I \setminus i)) + G_{k+1}(i)(F_k(x_k, u_k(i); u_k(I \setminus i)))), \\ x_k \in X_k \setminus X'_k, u_k(i) \in U_k(i)(x_k), \\ G_k(i)(x_k) = \underset{u_k(i) \in U_k(i)(x_k)}{max} G^u_k(i)(x_k, u_k(i)), \\ x_k \in X_k \setminus X'_k, \end{cases}$$

$k = k' - 1, \ldots, 0.$

Утверждение 4.1.

$$\begin{aligned} &\forall i \in I, \forall k \in K \setminus k', \forall x_k \in X_k \setminus X'_k, \forall v[k](i) \in V[k](i), \\ &G[k, x_k](i)(v[k](i)) = \\ &= \underset{u_k(I \setminus i) \in U_k(I \setminus i)(x_k)}{min}(F^\circ_k(i)(x_k, v_k(i)(x_k); u_k(I \setminus i)) + \\ &+ G[k+1, F_k(x_k, v_k(i)(x_k); u_k(I \setminus i))](i)(v[k+1](i))). \end{aligned}$$

Утверждение 4.2.

$$\begin{aligned} &\forall i \in I, \forall k \in K \setminus k', \forall x_k \in X_k \setminus X'_k, \forall v[k](i) \in V[k](i), \\ &G[k, x_k](i)(v[k](i)) \leqslant G^u_k(i)(x_k, v_k(i)(x_k)). \end{aligned}$$

Утверждение 4.3.

$$\begin{aligned}&\forall i \in I,\\ &G^*(i) = G_0(i)(x_0^\eta).\end{aligned}$$

5. Полученные результаты

В настоящем пункте для многошаговой позиционной игры n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами управляющих воздействий игроков получено необходимое и достаточное условие для максиминной стратегии произвольного игрока, функция выигрыша которого является терминальной.

Итак, пусть рассматривается произвольная многошаговая позиционная игра n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами $U_k(i)(x_k), i \in I, k \in K \setminus k', x_k \in \mathbf{X}_k$.

Символом I' будем обозначать множество

$$\{i \in I | \forall k \in K_\circ \setminus k'_\circ, \forall x_k \in \mathbf{X}_k, \forall u_k \in \mathbf{U}_k, F_k^\circ(i)(x_k, u_k) = 0\}.$$

Положим, $I' \neq \varnothing$.

Пусть i – произвольный элемент множества I', k – произвольный элемент множества $K_\circ \setminus k'_\circ$, γ – произвольное отображение с областью Z определения, являющейся элементом множества $\mathbf{M}_+(\mathbf{X}_k)$, и множеством значений в $\mathbf{U}_k(i)$, удовлетворяющее такому условию

$$\forall z \in Z, \gamma(z) \in U_k(i)(z).$$

Определим множества $U_k(i)(x_k)\{\gamma\}, x_k \in \mathbf{X}_k$.

$$U_k(i)(x_k)\{\gamma\} = \begin{cases}\{\gamma(x_k)\}, \text{если } x_k \in Z,\\ U_k(i)(x_k), \text{если } x_k \in \mathbf{X}_k \setminus Z.\end{cases}$$

Пусть i – произвольный элемент множества I', а $v(i)$ – произвольный элемент множества $V(i)$. Определим множества $X_k\{i, v(i)\}, k \in K$.

$$\begin{aligned}&X_0\{i, v(i)\} = X_0,\\ &X_{k+1}\{i, v(i)\} = \{x_{k+1} \in \mathbf{X}_{k+1} | \exists x_k \in \mathbf{X}_k,\\ &((x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k) \wedge\\ &\wedge (\exists u_k(i) \in U_k(i)(x_k)\{v_k(i)\}, \exists u_k(I \setminus i) \in U_k(I \setminus i)(x_k),\\ &x_{k+1} = F_k(x_k, u_k(i); u_k(I \setminus i))))\},\\ &k = 0, \ldots, k' - 1.\end{aligned}$$

Утверждение 5.1.

$$\begin{aligned}&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i),\\ &((X_0\{i, v(i)\} = X_0) \wedge\\ &\wedge (\forall k \in K \setminus 0, X_k\{i, v(i)\} \subset X_k)).\end{aligned}$$

Утверждение 5.2.

$$\begin{aligned}&\forall i\in I',\forall v(i)\in V(i),\\&((X_0\{i,v(i)\}\setminus X_0'=X_0\setminus X_0')\wedge\\&\wedge(\forall k\in K\setminus 0,X_k\{i,v(i)\}\setminus X_k'\subset X_k\setminus X_k')).\end{aligned}$$

При доказательстве утверждений 5.1 и 5.2 используются определения множеств

1) $X_k\{i,v(i)\},k\in K,i\in I',v(i)\in V(i)$,

2) $X_k,k\in K$,

и

3) $U_k(i)(x_k)\{\ldots\},i\in I',k\in K_\circ\setminus k_\circ',x_k\in \mathbf{X}_k$, а также метод доказательства по индукции.

Пусть i – произвольный элемент множества I', а $v(i)$ – произвольный элемент множества $V(i)$. Очевидно, что $X_{k'}\{i,v(i)\}\setminus X_{k'}'=\varnothing$. Символом $k'\{i,v(i)\}$ будем обозначать

$$min\{k\in K|X_k\{i,v(i)\}\setminus X_k'=\varnothing\}.$$

Утверждение 5.3.

$$\begin{aligned}&\forall i\in I',\forall v(i)\in V(i),\\&k'\{i,v(i)\}\in K\setminus 0.\end{aligned}$$

При доказательстве утверждения 5.3 используются определения величин $k'\{i,v(i)\},i\in I',v(i)\in V(i)$, и множеств $X_0\{i,v(i)\},i\in I',v(i)\in V(i)$.

Утверждение 5.4.

$$\begin{aligned}&\forall i\in I',\forall v(i)\in V(i),\\&((\forall k\in\{0,\ldots,k'\{i,v(i)\}-1\},X_k\{i,v(i)\}\setminus X_k'\neq\varnothing)\wedge\\&\wedge(\forall k\in\{k'\{i,v(i)\},\ldots,k'\},X_k\{i,v(i)\}\setminus X_k'=\varnothing)).\end{aligned}$$

Утверждение 5.5.

$$\begin{aligned}&\forall i\in I',\forall v(i)\in V(i),\\&((\forall k\in\{0,\ldots,k'\{i,v(i)\}\},X_k\{i,v(i)\}\neq\varnothing)\wedge\\&\wedge(\forall k\in K,((k>k'\{i,v(i)\})\Rightarrow(X_k\{i,v(i)\}=\varnothing)))).\end{aligned}$$

При доказательстве утверждений 5.4 и 5.5 используются определения величин $k'\{i,v(i)\},i\in I',v(i)\in V(i)$, и множеств $X_k\{i,v(i)\},k\in K,i\in I',v(i)\in V(i)$, утверждение 5.3, а также метод доказательства по индукции.

Утверждение 5.6.

$$\begin{aligned}&\forall i\in I',\forall v(i)\in V(i),\forall k\in\{0,\ldots,k'\{i,v(i)\}-1\},\\&X_{k+1}\{i,v(i)\}=\{x_{k+1}\in\mathbf{X}_{k+1}|\exists x_k\in X_k\{i,v(i)\}\setminus X_k',\\&\exists u_k(I\setminus i)\in U_k(I\setminus i)(x_k),x_{k+1}=F_k(x_k,v_k(i)(x_k);u_k(I\setminus i))\}.\end{aligned}$$

При доказательстве утверждения 5.6 используются определения множеств

$$U_k(i)(x_k)\{\ldots\},i\in I',k\in K_\circ\setminus k_\circ',x_k\in\mathbf{X}_k,$$

и утверждения 5.2-5.4.

Утверждение 5.7.

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i),\\
&((G(i)(v(i)) = G[0, x_0^\eta](i)(v[0](i)))\wedge\\
&\wedge (\forall k \in \{1, \ldots, k'\{i, v(i)\}\}, \forall x_k \in X_k\{i, v(i)\},\\
&G(i)(v(i)) \leqslant G[k, x_k](i)(v[k](i)))).
\end{aligned}$$

При доказательстве утверждения 5.7 используются утверждения 4.1, 5.1-5.3, 5.5 и 5.6 и метод доказательства по индукции.

Утверждение 5.8.

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i), \forall k \in \{0, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\}, \forall x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X_k',\\
&G(i)(v(i)) \leqslant G_k^u(i)(x_k, v_k(i)(x_k)).
\end{aligned}$$

При доказательстве утверждения 5.8 используются утверждения 4.2, 5.2-5.4 и 5.7.

Утверждение 5.9.

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i),\\
&((v(i) \in V^\circ(i)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, k'\{i, v(i)\}\}, \forall x_k \in X_k\{i, v(i)\},\\
&((x_k \in X_k') \Rightarrow (G_0(i)(x_0^\eta) \leqslant \Phi_k(i)(x_k))))).
\end{aligned}$$

При доказательстве утверждения 5.9 используются утверждения 4.1, 4.3, 5.1-5.7 и метод доказательства по индукции.

Утверждение 5.10.

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i),\\
&((v(i) \in V^\circ(i)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow ((G_0(i)(x_0^\eta) = G_0^u(i)(x_0^\eta, v_0(i)(x_0^\eta)))\wedge\\
&\wedge (\forall k \in \{0, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\}, ((1 \leqslant k) \Rightarrow\\
&\Rightarrow (\forall x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X_k', G_0(i)(x_0^\eta) \leqslant G_k^u(i)(x_k, v_k(i)(x_k))))))).
\end{aligned}$$

При доказательстве утверждения 5.10 используются определения отображений $G_k(i), i \in I, k \in K$, и $G_k^u(i), i \in I, k \in K \setminus k'$, и утверждения 4.3, 5.1-5.3, 5.5, 5.6, 5.8 и 5.9.

Заключение

В работе для исследуемой игры получено необходимое и достаточное условие для максиминной стратегии произвольного игрока, функция выигрыша которого является терминальной. Согласно этому условию, для выяснения того, является ли та или иная стратегия рассматриваемого игрока максиминной, значение наибольшего гарантированного выигрыша игрока сравнивается со значениями ряда функций. Значение наибольшего гарантированного выигрыша, а также значения вышеупомянутых функций определяются в процессе реализации алгоритма, являющегося обобщением метода динамического программирования на случай исследуемой многошаговой позиционной игры.

Список литературы

[1] Лагунов В.Н., Сушкин В.В. Многошаговые позиционные игры n лиц. – Тверь, 1993. – 156 с.

[2] Воробьёв Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984. – 496 с.

[3] Сушкин В.В. Необходимое и достаточное условие для максиминной стратегии произвольного игрока с терминальной функцией выигрыша в многошаговой позиционной игре n лиц со стратегиями-синтезами и конечными множествами управляющих воздействий игроков / Тверск. гос. ун-т. – Тверь, 2005. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.01.05, № 45-В2005.