УДК 519.2

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РАЗЛОЖЕНИЮ ПЛОТНОСТЕЙ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ[1]

Архипов С.В.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 03.11.2008, после переработки 12.11.2008.

Известные разложения функций плотности одномерных устойчивых распределений записываются в терминах обобщенных функций. Предложенный подход допускает распространение на многомерный случай.

Well-known density functions of onedimensional stable distributions are written in terms of generalized functions. The approach offered allows multivariate generalization.

Ключевые слова: разложения функций плотности устойчивых распределений, обобщенные функции.
Keywords: the density functions expansions of stable distribution, generalized functions.

Введение

Одномерные устойчивые распределения (у.р.) представляют собой хорошо изученный класс вероятностных распределений. Одно из определений этого класса выглядит следующим образом.

Определение 1. *Случайная величина (с.в.) $X \in R$ называется устойчивой, если для любых ее независимых копий X_1 и X_2 и $\forall a_1, a_2 > 0$ существуют такие $a > 0$ и $b \in R$, что*

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \stackrel{\mathrm{d}}{=} aX + b.$$

Если $b = 0$, то с.в. X называется *строго устойчивой* (с.у.).

Поскольку функции плотности (ф.п.) одномерных у.р. выписываются явно только в нескольких случаях, то для исследований важно иметь их различные представления, в том числе и разложения в ряд. С.у. с.в. определяются следующими параметрами: характеристическим показателем $\alpha \in (0, 2]$ и величиной массы спектральной меры $C_1 \geq 0$ и $C_2 \geq 0$ в точках $x = +1$ и $x = -1$ соответственно. Случаи целого α требуют отдельного рассмотрения и поэтому ниже использоваться не будут.

Основой для изучения у.р. служит характеристическая функция (х.ф.). Известно около десятка различных форм параметризации х.ф. у.р., в которых для

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ. Грант №06-01-00626.

описания используются параметры масштаба, асимметрии и сдвига. В данной работе будут рассмотрены с.у. распределения с х.ф., основанной на первичных параметрах (см. [1])

$$\mathfrak{g}(t) = \begin{cases} \exp\left\{-C_1(-it)^\alpha - C_2(it)^\alpha\right\}, & 0 < \alpha < 1, \\ \exp\left\{C_1(-it)^\alpha + C_2(it)^\alpha\right\}, & 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Для известных разложений в ряд ф.п. с.у.р. получены аналоги в терминах обобщенных функций (о.ф.). Некоторые сведения из теории о.ф. можно найти в параграфе 1. Рассмотрим сначала случай односторонней спектральной меры. Сформулируем основной результат работы:

Теорема 1. *Пусть $C_1 > 0, C_2 = 0$. Тогда функция плотности устойчивого распределения $g(x)$, рассматриваемая как обобщенная функция над основным пространством Φ Лизоркина, допускает следующие представления*

$$g = \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_1^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{x_+^{-\alpha k-1}}{\Gamma(-\alpha k)}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

$$g = \delta + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{C_1^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{x_+^{-\alpha k-1}}{\Gamma(-\alpha k)} + R_m^+, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{2}$$

Аналогично для $C_1 = 0, C_2 > 0$

$$g = \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_2^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{x_-^{-\alpha k-1}}{\Gamma(-\alpha k)}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

$$g = \delta + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{C_2^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{x_-^{-\alpha k-1}}{\Gamma(-\alpha k)} + R_m^-, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{4}$$

где δ — дельта-функция, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $R_m^\pm$ — о.ф., соответствующие остаткам.

Следствие 1. *В силу того, что регуляризованные функции $x_+^{-\alpha k-1}$ и $x_-^{-\alpha k-1}$ совпадают с обычными функциями везде, кроме точки $x = 0$, то разложения (1)–(4) можно рассматривать как объект классического анализа. Например, для $C_1 > 0, C_2 = 0$ и $x > 0$ имеем*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_1^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{x^{-\alpha k-1}}{\Gamma(-\alpha k)}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{5}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{C_1^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{x^{-\alpha k-1}}{\Gamma(-\alpha k)} + R_m(x), \quad 1 < \alpha < 2. \tag{6}$$

Замечание 1. *Полученные в [4] разложения ф.п. у.р. (2.4.8) при $\rho = 1$ и (2.5.3) при $\beta = 1$ в точности совпадают соответственно с (5) и (6), если в них положить $C_1 = 1$.*

1. Некоторые сведения из теории обобщенных функций

Определение 2. *Обобщенной функцией называется линейный и непрерывный функционал, взятый над некоторым пространством основных функций*

$$f : \varphi \to (f, \varphi).$$

В качестве основного пространства выберем так называемое пространство S бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$:

$$S = \{\varphi : \varphi(x) \in R, \quad x^k \cdot D^j \varphi(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \quad \forall k, j \geq 0\}.$$

О.ф., построенная по функции $f(x)$, называется *регулярной* или *функционалом типа функции*. В этом случае

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Так как (см. [3], гл.II, §1.5) для каждого основного пространства, содержащего все финитные бесконечно дифференцируемые функции, значения регулярного функционала (f, φ) на основных функциях из этого пространства однозначно с точностью до значений на множестве меры ноль определяют функцию $f(x)$, то можно говорить о совпадении $f(x)$ с f. Примером нерегулярного (сингулярного) функционала в R является δ-функция Дирака

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in S.$$

Важным вопросом в теории о.ф. является проблема регуляризации локально неинтегрируемых функций или проблема регуляризации расходящихся интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

с неинтегрируемыми особенностями в отдельных точках. Предположим наличие одной особой точки x_0. В результате регуляризации функции $f(x)$ мы получаем функционал f, который совпадает в указанном выше смысле с функцией $f(x)$ всюду вне точки x_0 (см.[2], § 1.7).

В дальнейшем будем использовать функции со степенными особенностями в нуле, которые подробно рассмотрены в [2], гл.I. Рассмотрим функции

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad x_-^\lambda = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ |x|^\lambda, & x < 0. \end{cases}$$

Отвечающие x_+^λ и x_-^λ обобщенные функции при $-k-1 < \lambda < -k$ строятся по правилу

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - ... - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0))dx,$$

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} x^\lambda (\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - ... - \frac{(-1)^{k-1}x^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0))dx.$$

Там же в [2] показано, что о.ф. x_+^λ и x_-^λ при $\lambda = -1, -2, ...$ имеют простые полюсы. Для их устранения производят нормировку гамма-функциями $\Gamma(\lambda)$, имеющими полюсы первого порядка в тех же точках. В итоге удобно работать с функционалами, являющимися целыми функциями от λ:

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \tag{7}$$

Ниже нам предстоит использовать преобразование Фурье о.ф. Оно определяется равенством ([2], гл.II)

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in S,$$

где

$$F[\varphi](t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\varphi(x)dx$$

есть классическое преобразование Фурье. Обратная операция F^{-1} находится по формуле

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi}F[f(-t)], \quad f \in S',$$

где S'–пространство о.ф. над S. Отметим, что $F^{-1}[1] = \delta$.

Преобразования Фурье о.ф. (7) вычислены в [2], §2.2 и представляются в виде

$$F\Big[\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(t+i0)^{-\lambda-1}, \quad F\Big[\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(t-i0)^{-\lambda-1}, \tag{8}$$

где $(t \pm i0)^\lambda = t_+ + e^{\pm i\lambda\pi}t_-^\lambda$.

Одной из основных операций в теории о.ф. является свертка. Для о.ф. $x_+^{\lambda-1}$ и $x_-^{\lambda-1}$ она определяется следующим образом. Рассматривают сначала $0 < \lambda, \nu < 1$. Тогда для обычных степенных функций $x_+^{\lambda-1}$ и $x_+^{\nu-1}$ вычисляют свертку

$$\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = \int\limits_0^x \frac{z^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{(x-z)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}dz = \frac{x_+^{\lambda+\nu-1}}{\Gamma(\lambda+\nu)}, \tag{9}$$

для остальных λ, ν формула, рассматриваемая уже для о.ф., справедлива в силу принципа аналитического продолжения. Аналогично получается следующее соотношение (λ, ν–любые):

$$\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_-^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = \frac{x_-^{\lambda+\nu-1}}{\Gamma(\lambda+\nu)}. \tag{10}$$

Для того, чтобы получить для о.ф. известное в анализе соотношение о преобразовании Фурье свертки интегрируемых функций, необходимо перейти к классу Ψ, состоящему из функций пространства S, обращающихся при $x = 0$ в ноль вместе со всеми производными:

$$\Psi = \{\psi : \psi \in S, \quad \psi^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...\}.$$

Пространство Φ Лизоркина (см.[4]) вводится как двойственное к Ψ:

$$\Phi = \{\varphi : \varphi \in S, \quad F[\varphi] \in \Psi\}.$$

Можно показать, что пространство Φ содержит функции из S, которые ортогональны всем многочленам:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad \varphi(x) \in S.$$

Кроме того нам понадобится понятие мультипликатора, тесно связанное со сверткой о.ф.

Определение 3. *Функция $q(t)$ называется мультипликатором в пространстве Ψ, если для любой $\psi \in \Psi$: $q(t) \cdot \psi(t) \in \Psi$ и из $\psi_k \to 0$ следует $q(t) \cdot \psi_k(t) \to 0$ по топологии Ψ.*

Определение 4. *Операция в пространстве о.ф. Ψ', определяемая формулой*

$$(f \cdot q, \psi) = (f, q \cdot \psi),$$

называется умножением на функцию $q(t)$, а $q(t)$ — мультипликатором в Ψ'.

Применение о.ф. для описания плотностей у.р. приведет нас к степенным функциям с отрицательным показателем. Перепишем соотношения (8) для этого случая ($\alpha > 0$):

$$F\Big[C_1 \frac{x_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\Big] = C_1 e^{-\frac{\pi\alpha i}{2}} (t + i0)^\alpha =$$
$$= C_1 (e^{-\frac{\pi\alpha i}{2}} t_+^\alpha + e^{\frac{\pi\alpha i}{2}} t_-^\alpha) = C_1 |t|^\alpha e^{-\frac{\pi\alpha i}{2} sign(t)} = C_1 (-it)^\alpha. \quad (11)$$

Аналогично

$$F\Big[C_2 \frac{x_-^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\Big] = C_2 |t|^\alpha e^{\frac{\pi\alpha i}{2} sign(t)} = C_2 (it)^\alpha. \quad (12)$$

В работе Лизоркина [5] показано, что функционалы в правых частях (11) и (12) являются мультипликаторами в пространстве Ψ' и поэтому имеет место теорема Гельфанда–Шилова о свертке, которая применительно к функциям (7) утверждает, что

$$F\Big[C_1 \frac{x_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} * C_1 \frac{x_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\Big] = C_1^2 (-it)^\alpha \cdot (-it)^\alpha,$$
$$F\Big[C_2 \frac{x_-^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} * C_2 \frac{x_-^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\Big] = C_2^2 (it)^\alpha \cdot (it)^\alpha,$$

или в общем случае, переходя к обратному преобразованию Фурье, получим

$$F^{-1}[C_1^k(-it)^{\alpha k}] = \Big(C_1 \frac{x_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\Big)^{*k}, \tag{13}$$

$$F^{-1}[C_2^k(it)^{\alpha k}] = \Big(C_2 \frac{x_-^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\Big)^{*k}, \tag{14}$$

где $*k$ — k-степень свертки о.ф.

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$, $C_1 > 0$, $C_2 = 0$. Запишем формулу обращения х.ф.

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-C_1(-it)^\alpha} dt.$$

Разложим вторую экспоненту по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, т.е.

$$e^{-C_1(-it)^\alpha} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k C_1^k}{\Gamma(k+1)} (-it)^{\alpha k} + \frac{(-1)^m C_1^m}{\Gamma(m+1)} (-it)^{\alpha m} e^{-C_1 \theta (-it)^\alpha}, \quad |\theta| < 1.$$

Соответствующее представление $g(x)$ с помощью о. ф. над пространством Лизоркина Φ имеет вид

$$g = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-C_1(-it)^\alpha} dt \varphi(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k C_1^k}{\Gamma(k+1)} (-it)^{\alpha k} dt \varphi(x) dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{(-1)^m C_1^m}{\Gamma(m+1)} (-it)^{\alpha m} e^{-C_1 \theta (-it)^\alpha} dt \varphi(x) dx =$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k C_1^k}{\Gamma(k+1)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-it)^{\alpha k} \psi(-t) dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_m^+(x) \varphi(x) dx$$

или, введя соответствующую остатку $R_m^+(x)$ о.ф. R_m^+, перепишем равенство:

$$g = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} F^{-1}[C_1^k(-it)^{\alpha k}] + R_m^+.$$

Воспользовавшись соотношением (13), получим

$$g = \delta + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k C_1^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \Big(\frac{x_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\Big)^{*k} + R_m^+.$$

Преобразуем свертку с помощью равенства (10). В итоге о.ф., соответствующая ф.п. с.у.р. будет представлена в виде

$$g = \delta + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k C_1^k}{\Gamma(k+1)} \frac{x_+^{-\alpha k-1}}{\Gamma(-\alpha k)} + R_m^+.$$

Исследуем поведение остатка $R_m^+(x)$. Предположим, что $x > 0$. Тогда

$$R_m^+(x) = \frac{(-1)^m C_1^m}{2\pi\Gamma(m+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}(-it)^{\alpha m} e^{-C_1\theta(-it)^\alpha} dt =$$
$$= \frac{(-1)^m C_1^m}{\pi\Gamma(m+1)} Re \int_0^{+\infty} e^{-itx}(-it)^{\alpha m} e^{-C_1\theta(-it)^\alpha} dt.$$

Заменим интегрирование по положительной полуоси интегрированием по лучу

$$t \cdot e^{i\varphi_0}, \quad 0 \le t < \infty, \quad max\left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right\} < \varphi_0 < 0$$

(что возможно в силу теоремы Коши) и произведем замену переменной $u = te^{-i\varphi_0}x$. Тогда интеграл преобразуется к виду

$$R_m^+(x) = \frac{(-1)^m C_1^m}{\pi\Gamma(m+1)x^{\alpha m+1}} Re \quad e^{i(\varphi_0 - (\frac{\pi}{2}-\varphi_0)\alpha m)}\cdot$$
$$\cdot \int_0^{+\infty} e^{usin\varphi_0 - iucos\varphi_0} u^{\alpha m} e^{-C_1\theta(\frac{u}{x})^\alpha exp(-i(\frac{\pi}{2}-\varphi_0)\alpha)} du.$$

Значит остаточный член допускает оценку

$$\left|R_m^+(x)\right| \le \frac{C_1^m}{\pi\Gamma(m+1)x^{\alpha m+1}} \int_0^{+\infty} e^{usin\varphi_0} u^{\alpha m} e^{-C_1\theta(\frac{u}{x})^\alpha cos(\frac{\pi}{2}-\varphi_0)\alpha} du \le$$
$$\le \frac{C_1^m}{\pi\Gamma(m+1)x^{\alpha m+1}} \int_0^{+\infty} e^{usin\varphi_0} u^{\alpha m} du \le \frac{C_1^m}{\pi x^{\alpha m+1}} \frac{1}{(-sin\varphi_0)^{\alpha m+1}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha m+1)}{\Gamma(m+1)}.$$

Применив формулу Стирлинга для определения асимптотики отношения гамма-функций, получим

$$\frac{\Gamma(\alpha m+1)}{\Gamma(m+1)} \sim \alpha^{\alpha m+0.5} e^{(1-\alpha)m} m^{-(1-\alpha)m},$$

откуда следует, что $R_m^+(x) \to 0$ при $m \to \infty$ и значит $R_m^+ \to 0$, т.е. ряд о.ф. сходится.

В случае $1 < \alpha < 2$ члены ряда

$$\frac{C_1^k}{\Gamma(k+1)} \frac{x_+^{-\alpha k-1}}{\Gamma(-\alpha k)}$$

не стремятся к нулю при $k \to \infty$. Это утверждение можно получить, применив формулу для отрицательного аргумента гамма-функции и формулу Стирлинга. Проведя преобразования, аналогичные случаю $\alpha \in (0,1)$, можно вывести оценку остатка при $x \to +\infty$

$$R_m^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\frac{C_1^m}{\Gamma(m+1)}(-it)^{\alpha m}e^{C_1\theta(-it)^\alpha}dt = O(\frac{1}{x^{\alpha m+1}}).$$

Это означает, что соответствующий ряд для $g(x)$ является асимптотическим.

Вывод формул (3)-(4) производится аналогично.

Заключение

Предложенный подход позволяет вывести разложения ф.п. у.р. в многомерном случае в терминах о.ф. Благодаря этому можно получить информацию о носителе ф.п. и о ее поведении по каждому направлению.

Список литературы

[1] Архипов С.В. Замечания к представлению характеристических функций устойчивых распределений // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2002. С. 97-100.

[2] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Т.1, М.: ГИФМЛ, 1959.

[3] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. Т.2. М.: ГИФМЛ, 1958.

[4] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.

[5] Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E^n)$. Теоремы вложения.: Матем. сб., 1963, т. 60, №3. М.: Наука.