УДК 519.2

МНОГОМЕРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ С ЗАВИСИМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ[1]

Иванова Н.Л.*, Дьячков Р.А.*, Хохлов Ю.С., Румянцева О.И.****
*ТвГУ, кафедра математической статистики и системного анализа
**РУДН, кафедра теории вероятностей и математической статистики
***МГУ, кафедра математической статистики

Поступила в редакцию 06.10.2008, после переработки 24.10.2008.

Рассматривается специальный тип введения зависимости, которая порождается сверткой «перекрывающихся» компонент. Этот подход является основой для построения многомерной модели коллективного риска с зависимыми компонентами у процесса появления исков и вектора величин выплат. Исследуются некоторые свойства предложенной модели, в частности, вероятность разорения. Предлагается вариант многомерного гамма распределения с зависимыми компонентами; для него вычислено условное математическое ожидание для хвоста распределения. Вводится многомерное обобщение рекурсивной процедуры Пэнджера для сложного распределения Пуассона.

The special type of dependency, generated by convolution procedure with «overlapping» components is considered. It is a basis of multivariate collective risk model with dependent components of claim arrival process and dependent claim amount distribution. We investigate some properties of offered model, in particular ruin probability. Also we consider the special form of multivariate dependent Gamma distribution and calculate their tail conditional expectation, multivariate generalization of Panjer recursive procedure for compound Poisson distribution is introduced.

Ключевые слова: коллективная модель риска, многомерный процесс Пуассона, многомерное гамма распределение, условное математическое ожидание для хвоста распределения, рекурсия Пэнджера.
Keywords: Collective risk model, multivariate Poisson process, multivariate Gamma distribution, tail conditional expectation, Panger recursion.

Введение

Многие вероятностные модели в прикладных исследованиях являются многомерными, а их компоненты оказываются зависимыми по существу. Мы можем наблюдать это на примере задач из экономики, социологии, психологии, биологии, медицины и многих других. Часто экономисты объясняют эту зависимость как результат влияния одного или нескольких общих факторов. Именно эта идея

[1]Работа поддержана РФФИ, проекты №08-01-00563 и №06-01-00626.

является основной в факторном анализе, который зародился при рассмотрении психологических проблем. Другим примером является рыночная модель Шарпа в теории оптимального портфеля, где в качестве общего фактора используется так называемый рыночный индекс. С технической точки зрения удобно, чтобы эти общие факторы были независимы между собой, что приводит нас к следующей общей конструкции.

Пусть мы имеем n независимых случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$, которые рассматриваются как объясняющие переменные (факторы). Интересующие нас наблюдаемые переменные имеют следующее представление:

$$X_k = f_k(Y_1, \ldots, Y_n), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Часто в прикладных задачах функции f_k выбираются линейными.

Далее в этой работе мы предлагаем некоторую специальную процедуру реализации этой общей идеи и иллюстрируем плодотворность такого подхода несколькими конкретными примерами ее применения.

1. Сверточный метод введения зависимости

Начнем с введения некоторой специальной системы обозначений, которая будет удобной при построении наших моделей. Рассмотрим многомерный индекс $\mathtt{i} = (i_1, \ldots, i_m)$, где $i_k = 0 \vee 1$; I обозначает множество всех значений индекса $\mathtt{i}$. Далее выделим подмножество множества I: $I_{k_1,\ldots,k_p} = \{\mathtt{i} \in I: \ i_{k_1} = \cdots = i_{k_p} = 1\}$, где $1 \le k_1 < \ldots < k_p \le m$, $1 \le p \le m$. Пусть $\{X^{\mathtt{i}}, \ \mathtt{i} \in I\}$ есть множество независимых случайных величин. Определим новый случайный вектор по правилу:

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m) = \left(\sum_{\mathtt{i} \in I_1} X^{\mathtt{i}}, \ \sum_{\mathtt{i} \in I_2} X^{\mathtt{i}}, \ \ldots, \ \sum_{\mathtt{i} \in I_m} X^{\mathtt{i}} \right). \tag{1}$$

Очевидно, что компоненты $X_k, \ k = 1, \ldots, m$ вектора $\mathbf{X}$ зависимы, так как множества I_k пересекаются. Таким образом, структура индекса $\mathtt{i}$ показывает, в какие компонеты нового вектора вносит вклад случайная переменная $X^{\mathtt{i}}$.

Далее приводятся несколько примеров применения этой конструкции.

2. Многомерная модель коллективного риска

Напомним определение одномерной модели коллективного риска Андерсона–Крамера. В этой модели величина резерва страховой компании имеет следующий вид:

$$U(t) = u + c \cdot t - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j = u + c \cdot t - S(t) \ ,$$

где

1) u — величина начального капитала страховой компании;

2) c — скорость поступления премий;

3) $\{N(t),\ t \geq 0\}$ — случайный процесс, описывающий динамику числа появившихся исков;

4) $\{X_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.), которые представляют величины поступивших исков;

5) случайный процесс $\{N(t),\ t \geq 0\}$ является независимым от последовательности $\{X_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$.

В классической модели коллективного риска предполагается, что $N(t)$ есть однородный процесс Пуассона с параметром λ.

Существенной чертой этой модели является то, что рассматривается так называемый *однородный* портфель исков, т. е. портфель, содержащий иски только одного типа. Более точно это означает, что $\{X_j\}$ имеют одно и то же распределение. На самом деле страховая компания заключает договора страхования, имеющие отношение к различным типам страхования.

При построении многомерного аналога коллективной модели риска мы должны дать описание трех объектов:

1) модель процесса поступления зависимых исков;

2) модель величины зависимых исков;

3) механизм распределения величины иска между контрактами разного типа.

Далее приводится краткое описание этих моделей. Более подробную информацию можно найти в работе [6].

Начинаем описание нашей модели с определения процесса $\mathcal{N}(t)$ динамики поступления исков разного типа.

Пусть для каждого индекса $\mathtt{i}$ задан случайный процесс $N^{(\mathtt{i})}(t),\ t \geq 0$, равный числу страховых случаев до момента t, в которых выплаты по контрактам имели структуру, соответствующую индексу $\mathtt{i}$. Для различных $\mathtt{i}$ величины $N^{(\mathtt{i})}(t)$ предполагаются независимыми.

Тогда (векторный) считающий процесс определяется по правилу:

$$\mathcal{N}(t) = (N_1(t), \ldots, N_m(t)) = \left(\sum_{\mathtt{i} \in I_1} N^{(\mathtt{i})}(t),\ \sum_{\mathtt{i} \in I_2} N^{(\mathtt{i})}(t),\ \ldots,\ \sum_{\mathtt{i} \in I_m} N^{(\mathtt{i})}(t) \right). \quad (2)$$

Здесь каждая координата $N_k(t)$ показывает количество исков типа k, появившихся до момента времени t. Координаты вектора $\mathcal{N}(t)$ являются зависимыми. Например, для двумерного случая ($m = 2$) мы имеем

$$\mathcal{N}(t) = (N^{(10)}(t) + N^{(11)}(t),\ N^{(01)}(t) + N^{(11)}).$$

Понятно, что процессы $N_1(t)$ и $N_2(t)$ являются зависимыми в силу того, что в каждом из них присутствует в качестве слагаемого один и тот же (вызывающий пересечение) процесс $N^{(11)}(t)$.

Аналогичная модель для $\mathcal{N}(t)$, совпадающая с нашей для $m = 2$, была предложена Р. Верник в работе [14]. Там же был приведен практический пример, который оправдывает разумность такого определения. Но для $m > 2$ наша модель является более общей. Модель, аналогичная нашей, была использована в работе [7]. Многие идеи можно обнаружить при внимательном чтении уже в работе [8].

Для удобства работы с такой моделью разумно предположить, что законы распределения величин $N^{(\mathtt{i})}(t)$ обладают свойством замкнутости относительно операции свертки, т. е. сумма двух независимых величин имеет распределение из того же класса, что и оба слагаемых. Примерами таких распределений являются (классическое) распределение Пуассона, обобщенное распределение Пуассона, отрицательное биномиальное распределение (в частности, геометрическое).

Наиболее часто используется распределение Пуассона. В этом случае наша модель допускает другое более удобное для актуарных приложений представление. Пусть $N^{(\mathtt{i})}(t)$, $t \geq 0$, $\mathtt{i} \in I$ есть независимые для разных $\mathtt{i}$ процессы Пуассона с параметрами $\lambda^{(\mathtt{i})} \geq 0$. Обозначим суммарную интенсивность

$$\lambda = \sum_{\mathtt{i} \in I} \lambda^{(\mathtt{i})} \tag{3}$$

и предположим, что $\lambda > 0$. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_j,\ j \geq 1\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями во множестве индексов I, распределение которых задается по правилу

$$P(\varepsilon_j = \mathtt{i}) = \frac{\lambda^{(\mathtt{i})}}{\lambda}. \tag{4}$$

Пусть

$$N(t) = \sum_{\mathtt{i} \in I} N^{(\mathtt{i})}(t) \tag{5}$$

есть полное число исков до момента времени t. Ясно, что $N(t),\ t \geq 0$, есть однородный процесс Пуассона с параметром λ. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *При сформулированных выше условиях модель (векторного) считающего процесса $\mathcal{N}(t)$ может быть записана в следующем виде*

$$\mathcal{N}(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \varepsilon_j. \tag{6}$$

Эта теорема была впервые сформулирована нами в работе [5]. Доказательство легко получается методом производящих функций. Основным его моментом является свойство просеивания процесса Пуассона (см. [11], стр. 320–321).

Предложенная модель является достаточно гибкой. Выбирая множество параметров $(\lambda^{(\mathtt{i})},\ \mathtt{i} \in I)$ соответствующим образом, мы получаем достаточно богатое множество моделей с различной структурой зависимости. В частности, если $\lambda^{(\mathtt{i})} > 0$ для $\mathtt{i} = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ и $(1, \ldots, 1)$ и $\lambda^{(\mathtt{i})} = 0$ в противном случае, мы получаем модель Р. Верник.

Другим аргументом в пользу этой модели является следующий результат, доказанный в нашей работе [4].

Теорема 2. *Пусть случайный вектор $\mathcal{N} = (N_1, \ldots, N_m)$ и каждый его подвектор имеют распределения из класса натуральных экспонентных семейств распределений. Если каждая компонента N_k имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_k \geq 0$, то существует семейство $(N^{(\mathtt{i})},\ \mathtt{i} \in I)$ независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона с параметрами $(\lambda^{(\mathtt{i})},\ \mathtt{i} \in I)$, такое, что*

$$N_k = \sum_{\mathtt{i} \in I_k} N^{(\mathtt{i})}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Теперь мы должны предложить модели величины исков и схему образования агрегированного иска. Для каждого индекса $\mathtt{i}$ определим определим последовательность $\{X_j^{(\mathtt{i})}\}$ независимых одинаково распределенных m-мерных векторов. Эти величины описывают случайные величины исков по полисам, выплаты по которым имеют структуру, соответствующую индексу $\mathtt{i}$. Это означает, что если координата i_k индекса $\mathtt{i}$ равна 0, то соответствующая координата случайного вектора $X_j^{(\mathtt{i})}$ равна нулю п.н. Если $i_k = 1$, то k-я координата $X_j^{(\mathtt{i},k)}$ вектора $X_j^{(\mathtt{i})}$ описывает выплаты по контракту k-го типа для полисов со структурой выплат $\mathtt{i}$. В общем случае координаты вектора $X_j^{(\mathtt{i})}$ величины выплат являются зависимыми. Последовательности, соответствующие разным значениям индекса $\mathtt{i}$, предполагаются независимыми.

Перейдем к определению модели *агрегированного* иска. При этом нужно соблюдать некоторую осторожность, чтобы не суммировать одни и те же выплаты несколько раз. Пусть для фиксированного $\mathtt{i} \in I$ определены случайный процесс $N^{(\mathtt{i})}(t),\ t \geq 0$, последовательность $(X_j^{(\mathtt{i})},\ j \geq 1)$ и последовательность $(\varepsilon_j,\ j \geq 1)$, описанные выше.

Определим векторный процесс агрегированного иска по формуле

$$\mathcal{S}(t) = (S_1(t), \ldots, S_m(t)) = \sum_{j=1}^{N(t)} \sum_{\mathtt{i} \in I} I(\varepsilon_j = \mathtt{i}) X_j^{(\mathtt{i})} = \sum_{\mathtt{i} \in I} \sum_{j=1}^{N^{(\mathtt{i})}(t)} I(\varepsilon_j = \mathtt{i}) X_j^{(\mathtt{i})}, \tag{8}$$

где $I(A)$ обозначает индикатор события A. Несложно видеть, что отдельная компонента $S_k(t)$ этого процесса может быть представлена в виде

$$S_k(t) = \sum_{j=1}^{N_k(t)} \sum_{\mathtt{i} \in I_k} I(\varepsilon_j = \mathtt{i}) \cdot X_j^{(\mathtt{i},k)}, \tag{9}$$

где

$$N_k(t) = \sum_{\mathtt{i} \in I_k} N^{(\mathtt{i})}(t).$$

Если обозначить

$$X_j^k := \sum_{\mathtt{i} \in I_k} I(\varepsilon_j = \mathtt{i}) \cdot X_j^{(\mathtt{i},k)},$$

то

$$S_k(t) = \sum_{j=1}^{N_k(t)} X_j^k.$$

Подробное описание свойств этой модели и доказательства сформулированных результатов можно найти в работе [6].

3. Многомерные аналоги рекурсии Пэнджера

Если мы хотим применять описанную выше модель при анализе реальных задач, нам необходимы эффективные методы вычисления распределений случайных векторов, из которых составлена эта модель. Для этих целей в одномерном случае Г. Пэнджером в работе [10] была предложена рекурсивная процедура специального вида, ее различные обобщения рассмотрены в работах [3], [13]. Ниже мы предлагаем многомерный аналог этой процедуры.

Сначала рассмотрим случайный вектор $\mathcal{N}(t)$, где компоненты N_k имеют распределения Пуассона. Справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть случайный вектор* $\mathcal{N} = (N_1, \ldots, N_m)$ *определен по правилу* (2), *обозначим* $\mathtt{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ *и* $P(\mathcal{N} = \mathtt{n}) = p(\mathtt{n})$. *Тогда имеет место следующее рекурсивное свойство:*

$$p\,(\mathtt{n}) = \frac{1}{n_j} \sum\nolimits_{\mathtt{i} \in I_j} \lambda^{\mathtt{i}} p\,(\mathtt{n} - \mathtt{i})\ , n_j \geq 1, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

$$p\,(0, ..., 0) = \exp\Big\{ - \sum\nolimits_{\mathtt{i} \in I} \lambda^{\mathtt{i}} \Big\},$$

$$p\,(0, ..., 0, n_j, 0, ..., 0) = \frac{\lambda^{(0\ldots01^j0\ldots0)}}{n_j}\, p\,(0, ..., 0, n_j - 1, 0, ..., 0).$$

Аналогичный результат можно получить для многомерного процесса агрегированного риска.

Теорема 4. *Пусть многомерный считающий процесс* $\mathcal{N}(t)$ *определен согласно* (2), *по нему построен суммарный процесс по правилу* (5) *с интенсивностью* λ *из* (3). *Для оценки плотности* $g(x)$ *вида*

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{\mathtt{n}} p_{\mathtt{n}} f^{*\mathtt{n}}(x), & \sum_{k=1}^m x_k > 0 \\ p_0, & \sum_{k=1}^m x_k = 0 \end{cases},$$

многомерного распределения агрегированного иска $\mathcal{S}$, *введенного соотношением* (8), *где* $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $p_{\mathtt{n}} = P(\mathcal{N} = \mathtt{n})$, $f(x)$ *— плотность величины одного слагаемого вида* $\sum\limits_{\mathtt{i} \in I} I(\varepsilon_j = \mathtt{i}) \cdot X_j^{\mathtt{i}}$, $f^{*\mathtt{n}}(x)$ *— ее* $\mathtt{n}$*-я сверточная степень,* $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $y_k < x_k$, $k = 1, \ldots, m$, *может быть применено следующее рекурсивное правило*

$$g(x) = \lambda\, e^{-\lambda}\, f(x) + \frac{\lambda}{x_k} \int_0^{x_m} \ldots \int_0^{x_1} y_k\, f(y)\, g(x - y)\, dy_1\, \ldots\, dy_m,$$

$k = 1, \ldots, m$, $g(\mathbf{0}) = p_0 = e^{-\lambda}$.

4. Вероятность разорения

Одной из наиболее популярных задач в актуарной математике является задача об оценке вероятности разорения. В многомерной модели само понятие разорения не имеет однозначного смысла и требует некоторого пояснения. Под разорением мы будем понимать такую ситуацию, когда хотя бы одно из подразделений страховой организации не сможет исполнить свои обязательства, т. е. не сможет выплатить компенсацию за ущерб, который был вызван страховым случаем. Это может случиться тогда, когда капитал по одному или нескольким направлениям станет отрицательным. Для страховщика важно, чтобы каждое направление деятельности не было убыточным и не существовало за счет других, поскольку наиболее эффективная и конкурентоспособная компания строит свою деятельность таким образом, чтобы ни одна из отраслей не работала за счет другой. Поэтому важно, чтобы капитал по каждому из направлений страхования оставался положительным. Это и будет характеризовать надежность и качество работы страховой компании.

Определим процесс динамики *многомерного* резерва компании $\mathcal{U}(t)$ в момент времени t по правилу:

$$\mathcal{U}(t) = (U_1(t), \ldots, U_m(t)) = \mathtt{u} + \mathtt{c} \cdot t - \mathcal{S}(t),$$

где $\mathtt{u} = (u_1, \ldots, u_m), \mathtt{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in R^m$, $c_k > 0$; также введем процесс *полного* резерва $U(t)$ в момент времени t:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{m} U_k(t);$$

и *нижний* процесс резерва $\underline{U}(t)$

$$\underline{U}(t) = \inf_k U_k(t), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Теперь мы определяем *момент разорения* как такой момент времени t, когда впервые хотя бы один из остатков принял отрицательное значение, т. е.

$$T = \inf_{t \geq 0} \left(\underline{U}(t) < 0\right). \tag{11}$$

Наиболее важной характеристикой для нас является *вероятность разорения*, т. е. вероятность того, что момент разорения в конечном итоге наступит:

$$\psi(u) = P(T < \infty). \tag{12}$$

Следующая теорема, которая является многомерным аналогом результата Г. Гербера [2], служит основой для получения оценок вероятности разорения в многомерной модели коллективного риска.

Теорема 5. *В многомерной модели коллективного риска для вероятности разорения справедлива формула*

$$\psi(\mathtt{u}) = \frac{e^{-\mathtt{Ru}}}{E\left(e^{-\mathtt{R}u(T)} \middle| \, T < \infty\right)}, \tag{13}$$

где $\mathtt{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ — *начальный капитал страховщика; вектор* $\mathtt{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ *есть решение с положительными компонентами уравнения*

$$\lambda + \mathtt{c} \cdot \mathtt{r} = \lambda \cdot M_X(\mathtt{r}), \tag{14}$$

где λ характеризует интенсивность поступления исков; $\mathtt{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ *— вектор, описывающий скорость поступления премий по каждому из направлений;* $M_X(\mathtt{r})$ *— производящая функция моментов случайного вектора исков* X.

Для получения конкретных оценок вероятности разорения необходимо оценить знаменатель. Это удалось сделать для случая, когда вектор величины исков имеет распределение Маршалла–Олкина. Для упрощения обозначений мы рассмотрим только двумерный случай. В общем случае результат формулируется аналогично.

Зададим независимые величины $X^{(10)}$, $X^{(01)}$, $X^{(11)}$, где $X^{(10)}$ имеет одномерное показательное распределение с параметром β_1, $X^{(01)}$ имеет одномерное показательное распределение с параметром β_2, $X^{(11)} = (X_1^{(11)}, X_2^{(11)})$ имеет двумерное показательное распределение Маршала–Олкина с параметрами β_{11}, β_{22} и β_{12}, причем $\beta_1 = \beta_{11} + \beta_{12}$, $\beta_2 = \beta_{22} + \beta_{12}$.

В описанной ситуации для вероятности разорения можно получить следующую оценку:

$$\psi(\mathtt{u}) \le \frac{\lambda \cdot \exp\{-\mathtt{R} \cdot \mathtt{u}\}}{M_{X^{(11)}}(\mathtt{R}) \cdot \lambda^{(11)}} \ ,$$

где $M_{X^{(11)}}$ есть производящая функция моментов вектора $X^{(11)}$.

Доказательство этих результатов можно найти в работе [12].

5. Справедливое распределение капитала

В некоторых случаях вероятность разорения не представляет особенного интереса в силу своей малости, как это было отмечено в работе Г. Гербера [2]. В подобной ситуации более интересен не момент разорения, а время, когда полный резерв компании достигает заданного уровня. Для многомерной модели интересно знать как справедливо разделить полный капитал, накопленный к данному моменту, между разными направлениями деятельности. Обычно предлагается делать это пропорционально математическому ожиданию каждой компоненты.

Уточним задачу. Определим

$$T_x = \inf(t > 0 \colon\ U(t) \ge x).$$

В рамках описанной выше модели можно показать, что

$$E(U_k(T_x)) = \sum_{\mathtt{i} \in I_k} E(U^{\mathtt{i}}(T_x)) = x \cdot \frac{c_k - \lambda_k \cdot \mu_k}{c - \lambda \cdot \mu},$$

где $c_k = \sum\limits_{\mathtt{i} \in I_k} c^{\mathtt{i}}$, $c = \sum\limits_{\mathtt{i} \in I} c^{\mathtt{i}}$, $\lambda_k = \sum\limits_{\mathtt{i} \in I_k} \lambda^{\mathtt{i}}$, $\lambda = \sum\limits_{\mathtt{i} \in I} \lambda^{\mathtt{i}}$, $\mu_k = \sum\limits_{\mathtt{i} \in I_k} \mu^{\mathtt{i}} \cdot \frac{\lambda^{\mathtt{i}}}{\lambda_k}$, $\mu^{\mathtt{i}} = E(X^{\mathtt{i},k})$, $\mu = \sum\limits_{\mathtt{i} \in I} \mu^{\mathtt{i}} \cdot \frac{\lambda^{\mathtt{i}}}{\lambda}$.

6. Многомерное гамма распределение

В финансовой и актуарной математике часто необходимо строить модели случайных величин, которые принимают неотрицательные значения. В таких случаях очень популярным является одномерное гамма распределение. В тех случаях, когда мы имеем дело со случайным вектором, компоненты которого неотрицательны (например, при моделировании портфеля ценных бумаг) хотелось бы иметь аналог многомерного гамма распределения с зависимыми компонентами. Некоторый вариант определения такого распределения был предложен в работе [9]. Недавно Э. Фурман и З. Ландсман в работе [1] рассмотрели задачу о разложении риска по компонентам портфеля с таким многомерным совместным распределением. В этом разделе мы даем более общее определение многомерного гамма распределения и получаем аналоги результатов Фурмана и Ландсмана.

Пусть $\{Y^{\mathtt{i}},\ \mathtt{i} \in A \subset I\}$ есть множество независимых гамма распределенных случайных величин с параметрами формы $\alpha = \alpha^{(\mathtt{i})}$ и параметрами масштаба $\beta = 1$. Обозначим $A_k = \{\mathtt{i} \in A\colon\ i_k = 1\}$. Следуя схеме, описанной в первом разделе нашей работы, определим случайный вектор с компонентами

$$X_k = \frac{1}{\beta_k} \sum_{\mathtt{i} \in A_k} Y^{\mathtt{i}}.$$

Случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ имеет зависимые компоненты, каждая из которых имеет гамма распределение с параметрами

$$\alpha = \alpha_k = \sum_{\mathtt{i} \in A_k} \alpha^{\mathtt{i}}, \quad \beta = \beta_k.$$

Распределение этого вектора будем называть *многомерным гамма распределением.* Распределение, предложенное в работе [9], является частным случаем нашего.

Будем писать $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, если случайная величина Y имеет гамма распределение с параметрами α и β. В работе [9] был доказан следующий полезный для нас результат.

Лемма 1. *Распределение суммы $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ независимых случайных величин таких, что $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta_i)$, имеет смешанное гамма распределение, где смешивание производится по параметру формы, т.е.*

$$S \sim \Gamma(\alpha + K, \beta_{\max}), \quad \text{где} \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \beta_{\max} = \max(\beta_1, \dots \beta_n)$$

причем неотрицательная целочисленная с.в. K имеет распределение $p_k = C\delta_k$, $k \geq 0$, где

$$C = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\beta_j}{\beta_{\max}}\right)^{\alpha_j}, \quad \Delta_j^i = \left(1 - \frac{\beta_j}{\beta_{\max}}\right)^i,$$

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Delta_j^i \delta_{k-j}, \quad k > 0.$$

Далее обсудим задачу оценки риска портфеля ценных бумаг. Для количественной оценки инвестиций были предложены различные характеристики. Если X есть возможные потери в некоторой финансовой ситуации, то для их количественной оценки часто используется величина

$$\mathrm{VaR}_q(X) := \inf(x|\, X > x).$$

Эта характеристика обладает многими хорошими свойствами, но, к сожалению, не является когерентной. Это означает, что можно найти две независимые ценные бумаги с возможными потерями X_1 и X_2, для которых имеет место следующее свойство:

$$\mathrm{VaR}_q(X_1 + X_2) > \ \mathrm{VaR}_q(X_1) + \mathrm{VaR}_q(X_2).$$

Это противоречит здравому смыслу: риск портфеля, составленного из этих двух бумаг, больше суммы рисков каждой из бумаг в отдельности. Поэтому в настоящее время предпочитают другую характеристику:

$$\mathrm{TCE}_x(X) := E(X|\, X > x), \tag{15}$$

которая называется *условным математическим ожиданием хвоста распределения*. Эта характеристика является когерентной. Именно ее мы и рассматриваем в этом разделе. Если $F_X(x) = P(X \le x)$ есть функция распределения с.в. X, а $\overline{F}(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ — ее хвост, то

$$\mathrm{TCE}_x(X) = \frac{1}{\overline{F}(x)} \int\limits_x^\infty x\, dF(x). \tag{16}$$

Рассмотрим некоторые вспомогательные результаты. Пусть мы имеем с.в. X с ф.р. $F(x)$. С.в. X^* называется *ассоциированной* со с.в. X, если она имеет ф.р.

$$F_{X^*}(x) := \frac{E(I(X \le x))}{E(X)} = \frac{1}{E(X)} \int\limits_0^x t\, dF(t), \tag{17}$$

где $I(A)$ — индикатор события A. Легко доказать следующий результат.

Лемма 2. *Если* $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, *то* $X^* \sim \Gamma(\alpha + 1, \beta)$.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — с.в. и $S = X_1 + \ldots X_n$. Определим

$$\mathrm{TCE}_x(X_k|\, S) := E(X_k|\, S > x)$$

— (условный) вклад координаты X_k в полный риск S портфеля. В работе [1] доказана следующая

Лемма 3. *Если* $X_1, \ldots, X_n$ *есть независимые с.в., то*

$$\mathrm{TCE}_x(X_k|\, S) = E(X_k)\, \frac{\overline{F}_{S - X_k + X_k^*}(x)}{\overline{F}_S(x)}. \tag{18}$$

Теперь мы готовы сформулировать наш основной результат. Он является новым, поэтому приводится с доказательством.

Теорема 6. *Пусть* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)^T$ *есть случайный вектор с многомерным гамма распределением, построенный из независимых с.в.* $\{Y^{\mathtt{i}},\ \mathtt{i} \in A\}$, $Y^{\mathtt{i}} \sim \Gamma(\alpha^{\mathtt{i}}, 1)$, *как это описано выше.*

Тогда $X_k \sim \Gamma(\sum_{\mathtt{i}\in A_k} \alpha^{\mathtt{i}}, \beta_k)$ *и вклад координаты* X_k *в полный риск портфеля можно вычислить по формуле*

$$\mathrm{TCE}_x(X_k|\, S) = \sum_{\mathtt{i}\in A_k} C^{\mathtt{i}} \alpha^{\mathtt{i}} \cdot \frac{\overline{F}_{S+Z\cdot\, C^{\mathtt{i}}}(s)}{\overline{F}_S(s)},$$

где

$$Z \sim \Gamma(1,1), \quad C^{\mathtt{i}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{i_k}{\beta_k}.$$

Доказательство. По определению имеем

$$X_k = \frac{1}{\beta_k} \sum_{\mathtt{i}\in A_k} Y^{\mathtt{i}}.$$

Тогда для суммы S справедливо

$$S = \sum_{k=1}^{m} X_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\beta_k} \sum_{\mathtt{i}\in A_k} Y^{\mathtt{i}} = \sum_{\mathtt{i}\in A} C^{\mathtt{i}} Y^{\mathtt{i}},$$

где $C^{\mathtt{i}} = \dfrac{1}{\beta_k} \sum_{k=1}^{m} i_k$. Используя леммы 2 и 3, получаем

$$\mathrm{TCE}_x(C^{\mathtt{i}} Y^{\mathtt{i}}|\, S) =$$

$$= E(C^{\mathtt{i}} Y^{\mathtt{i}}) \frac{\overline{F}_{S - C^{\mathtt{i}} Y^{\mathtt{i}} + (C^{\mathtt{i}} Y^{\mathtt{i}})^*}}{\overline{F}_S(x)} = E(C^{\mathtt{i}} Y^{\mathtt{i}}) \frac{\overline{F}_{S+C^{\mathtt{i}} Z}}{\overline{F}_S(x)} = C^{\mathtt{i}} \alpha^{\mathtt{i}} \frac{\overline{F}_{S+C^{\mathtt{i}} Z}}{\overline{F}_S(x)}.$$

Окончательно имеем

$$\mathrm{TCE}_x(X_k) = \sum_{\mathtt{i}\in A_k} \mathrm{TCE}_x(C^{\mathtt{i}} Y^{\mathtt{i}}|\, S) = \sum_{\mathtt{i}\in A_k} C^{\mathtt{i}} \alpha^{\mathtt{i}} \frac{\overline{F}_{S+C^{\mathtt{i}} Z}}{\overline{F}_S(x)}.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Furman E., Landsman Z. Risk capital decompozition for a multivariate dependent Gamma portfolio. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, Vol 37, issue 3, pp. 635–649.

[2] Gerber H. When does the surplus reach a given target? Insurance: Math. and Econom., 9, 115–119.

[3] Hesselager O. Recursions for certain bivariate counting distributions and their compound distributions. Astin Bulletin, No. 26, 35–52.

[4] Иванова Н.Л., Хохлов Ю.С. О восстановлении многомерного распределения по его компонентам. — Вестник МГУ, Серия 15. Вычисл. математика и кибернетика, 2001, вып. 1, с. 32–37.

[5] Ivanova Natalya L. and Khokhlov Yury S. The new variant of multivariate generalization of the generalized Poisson distribution. — In: Applied Stochastic Models and Information Processes, Petrozavodsk, September 8–13, 2002. — Abstracts, 66–68.

[6] Иванова Н.Л., Хохлов Ю.С. Многомерная модель коллективного риска. Вестник Моск. ун-та, Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн., 2005, 3, 22–30.

[7] Lindskog F. and McNeil A.J. Common Poisson Shock Models: Application to Insurance and Credit Risk Modeling. ASTIN Bulletin, 2003, **33**(2), 209–238.

[8] Marshall A.W. and Olkin I. A multivariate exponential distribution. Amer. Stat. Assoc. J., March 1967, p.p. 30–44.

[9] Mathai A.H. and Moschopoulos P.G. On a Multivariate Gamma. Journal of Multivariate Analysis, 1991, 39, 135–153.

[10] Panjer H.H. Recursive evaluation of a family of compound distributions. Astin Bulletin, 1981, No. 12, 22–26.

[11] Resnick S. Adventures in stochastic Processes. Boston: Birkhauser, 1992.

[12] Смирнов М.В., Хохлов Ю.С. Оценка вероятности разорения в многомерной модели коллективного риска. —- Вестник Тверского госуниверситета, сер. Прикладная математика, 2007, вып. 5, с. 45–53.

[13] Sundt B. On multivariate Panjer recursions. Astin Bulletin, 1999, Vol. 29, No. 1, pp. 29–45.

[14] Vernic R. A multivariate generalization of the generalized Poisson distribution. Astin Bulletin, 2000, V. 30, No. 1, pp. 57–67.