УДК 519.6

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННОГО НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Гордеев Р.Н.
Кафедра информационных технологий

Поступила в редакцию 01.12.2008, после переработки 09.12.2008.

Пусть R есть нечеткое отношение, заданное на конечном множестве X. Нечеткое подмножество A, определенное на X, называется *собственным нечетким множеством* или *ядром* нечеткого отношения R, если $R \circ A = A$ (где $\circ$ — max-min-произведение). В работе рассматриваются некоторые методы вычисления наибольшего собственного нечеткого множества для заданного нечеткого отношения и их применение в решении прикладных задач.

When R is a fuzzy relation between the elements of a finite set X, the fuzzy subsets A of X such that $R \circ A = A$ (max-min composition) are called eigen filzzy sets. In this paper we describe algorithms for the determination of the greatest eigen fuzzy set associated with a given fuzzy relation, thinking of practical applications.

Ключевые слова: нечеткая математика, возможностное математическое программирование, нечеткое отношение, собственное нечеткое множество.
Keywords: fuzzy mathematics, possibilistic mathematical programming, fuzzy relation, eigen fuzzy set.

1. Введение

Нет необходимости доказывать, что построение отношений и относительные оценки суждений занимают значимую роль в жизни человека и являются для него естественным свойством сознания. Однако, при переходе от нечетко обозначенной в сознании человека проблемы к математически строго сформулированной задаче возникают существенные трудности. Для решения подобных проблем все чаще применяется теория нечетких множеств, позволяющая сформулировать задачу на более близком суждению человека языке, а затем перейти к строго формализованной математической задаче [6, 7, 8, 14, 15].

В предыдущих работах мы уже рассматривали проблемы применения нечетких отношений в задачах возможностной оптимизации [1, 4, 3]. В настоящей работе мы рассмотрим применение нечетких отношений в задачах несколько другого плана. Фактически мы обсудим проблему нахождения инвариантов MAX-MIN композиции.

Путь нечеткое отношение R, заданное на множестве симптомов, обозначает воздействие некоторого лекарства на пациента при заданном способе лечения. Зададимся целью найти максимальную интенсивность каждого из симптомов, на которую R не оказывает никакого воздействия.

Если мы будем рассматривать R как некоторую систему, то предложенные нами алгоритмы должны будут обеспечить ей наибольшие входы. Однако, поскольку они равны выходам, то фактически мы найдем наибольшие инварианты системы.

Всюду далее мы будем полагать, что нечеткие множества и нечеткие отношения определены на конечных носителях.

2. Собственное нечеткое множество

Пусть R — нечеткое отношение, заданное на конечном множестве X, A — его нечеткое подмножество. Тогда MAX-MIN композиция R и A дает некоторое нечеткое множество B. В случае, если B равно A, мы будем говорить, что A есть *собственное нечеткое множество* нечеткого отношения R.

$$R \circ A = A,$$
$$A(x') = \bigvee_x [A(x) \wedge R(x, x')], \forall x' \in X.$$

Найдем наибольшее собственное нечеткое множество (НСНМ) нечеткого отношения R.

Поскольку мы ограничиваемся случаем конечных множеств, некоторые выкладки будут представлены в матричной форме.

Пусть A_1 — нечеткое подмножество X такое, что

$$A_1(x') = \bigvee_x R(x, x'), \forall x' \in X, \tag{1}$$

то есть функция распределения нечеткого множества A_1 представлена максимальными элементами, стоящими в столбцах R.

Определим нечеткое множество A_0 следующим образом

$$A_0(x) = \bigwedge_{x'} A_1(x'), \forall x \in X.$$

Легко заметить, что A_0 является собственным нечетким множеством для R, однако не всегда наибольшим.

Определим последовательность нечетких множеств $(A_n)_n$

$$A_2 = R \circ A_1,$$
$$A_3 = R \circ A_2 = R^2 \circ A_1,$$
$$\dots$$
$$A_{n+1} = R \circ A_n = R^n \circ A_1.$$

Заметим, что последовательность нечетких множеств убывающая и ограничена множествами A_0 и A_1:

$$A_0 \subseteq \dots \subseteq A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1.$$

Перейдем теперь к алгоритмам вычисления наибольших собственных нечетких множеств.

3. Первый способ вычисления НСНМ

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, а нечеткое отношение R представлено матрицей следующего вида.

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0.1	0.7	0.2	$\boxed{0.8}$	$\boxed{0.7}$
x_2	0	0.6	0.4	0.3	0.5
x_3	$\boxed{0.3}$	$\boxed{1}$	0	0.1	0.4
x_4	$\boxed{0.3}$	0.3	$\boxed{0.8}$	0.1	0
x_5	0	0	0.7	0.5	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

Обведенные элементы являются максимальными в каждой из соответствующих колонок. На основе этих элементов мы можем определить границы A_0 и A_1 последовательности $(A_n)_n$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A_1 =$	$\boxed{\underline{0.3}}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0.8}$	$\boxed{0.8}$	$\boxed{0.7}$
$A_0 =$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

$R \circ A_0 = A_0$ (тривиальное решение). Применяя MAX-MIN композицию к R и A_1, получим A_2 и последующие множества.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$A_2 =$	$\underline{0.3}$	0.8	0.8	$\underline{0.5}$	$\underline{0.5}$	$= R \circ A_1$
$A_3 =$	$\underline{0.3}$	0.8	$\underline{0.5}$	$\underline{0.5}$	$\underline{0.5}$	$= R \circ A_2$
$A_4 =$	$\underline{0.3}$	$\underline{0.6}$	$\underline{0.5}$	$\underline{0.5}$	$\underline{0.5}$	$= R \circ A_3$
$A_5 =$	$\underline{0.3}$	$\underline{0.6}$	$\underline{0.5}$	$\underline{0.5}$	$\underline{0.5}$	$= R \circ A_4 = A_4$

$$A_0 \subseteq A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$$

(1) Элемент x_1 с наименьшей степенью принадлежности, равной 0.3, для нечеткого множества A_1 является инвариантом для нечетких множеств A_2, A_3, A_4, A_5. Это первый подчеркнутый элемент.

(2) Среди элементов $X - \{x_1\}$, то есть среди $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, элементы с наименьшей степенью принадлежности в нечетком множестве A_2 являются инвариантами для нечетких множеств A_3, A_4 и A_5. Это элементы x_4 и x_5 со степенью принадлежности, равной 0.5.

На самом деле, основываясь на теореме о транзитивном замыкании нечеткого отношения [2], можно легко доказать следующий результат.

Теорема 1. *Существует целое число n, меньшее или равное мощности множества X, такое, что A_n является наибольшим собственным нечетким множеством нечеткого отношения R.*

Для нашего примера $n = 4$.

4. Второй способ вычисления НСНМ

Следующий алгоритм не требует вычисления всех MAX-MIN композиций и очень прост в использовании. Он состоит в отыскании инвариантных элементов в последовательности редукций отношения R.

На каждом шаге инвариантные элементы точно такие же как и в предыдущем методе.

R	$\boxed{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
$\boxed{x_1}$	0.1	0.7	0.2	$\boxed{0.8}$	$\boxed{0.7}$
x_2	0	0.6	0.4	0.3	0.5
x_3	$\boxed{0.3}$	$\boxed{1}$	0	0.1	0.4
x_4	$\boxed{0.3}$	0.3	$\boxed{0.8}$	0.1	0
x_5	0	0	0.7	0.5	0

(1) Находим наибольшие значения в каждой колонке R.

(2) Обозначим через r наименьшие среди этих значений. В нашем случае это 0.3, а колонка в которой это значение присутствует — x_1.

(3) Удаляем из отношения R эту колонку и строку с аналогичным индексом. Получаем первую редукцию R' отношения R. Следует отметить, что мы не удаляем строки, содержащие значение 0.3, скажем x_3 или x_4.

(4) Для искомого нечеткого множества A_n (n еще неизвестно) ставим значение r (в нашем случае это 0.3) в качестве степени принадлежности элемента, индекс которого совпадает с индексом вычеркнутого столбца (в нашем случае это x_1).

R'	x_2	x_3	$\boxed{x_4}$	$\boxed{x_5}$
x_2	0.6	0.4	0.3	$\boxed{0.5}$
x_3	$\boxed{1}$	0	0.1	0.4
$\boxed{x_4}$	0.3	$\boxed{0.8}$	0.1	0
$\boxed{x_5}$	0	0.7	$\boxed{0.5}$	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A_n =$	0.3				

(5) Переходим к шагу (1), используя вместо R редукцию R' с одним лишь ограничением: если r' обозначает наименьшее из максимумов значений каждого

столбца R', то в соответствующие позиции вектора распределений множества A_n мы ставим $\max\{r, r'\}$.

Из R' мы получаем $r' = 0.5$, которое присутствует в колонках x_4 и x_5, причем $\max\{r', r'\} = \max\{0.5, 0.3\} = 0.5$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A_n =$	0.3			0.5	0.5

R''	x_2	$\boxed{x_3}$
x_2	0.6	$\boxed{0.4}$
$\boxed{x_3}$	$\boxed{1}$	0

Из R'' мы получаем $r'' = 0.4$, которое меньше $0.5 = r'$, поэтому в позицию x_3 вектора распределений нечеткого множества A_n мы ставим 0.5. $A_n(x_2) = 0.6$,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A_n =$	0.3		0.5	0.5	0.5

R'''	x_2
x_2	0.6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A_n = A_4 =$	0.3	0.6	0.5	0.5	0.5

поскольку 0.6 больше чем 0.5.

5. Третий способ вычисления НСНМ

Метод основан на получении решения A_n путем вычисления не более чем n последовательных MAX-MIN композиций отношения R. Этом метод отнюдь не является самым простым, однако позволяет нам показать, что наибольшее собственное нечеткое множество отношения R также является и наибольшим собственным нечетким множеством транзитивного замыкания отношения R [2].

Возвращаясь к вычислению A_n, заметим, что аналогично тому, как A_1 вычисляется на основе отношения R (смотри выражение (1)), A_2 вычисляется для R^2, A_3 для R^3 и т.д. Как только мы получим n такое, что $A_{n+1} = A_n$, то A_n является наибольшим собственным нечетким множеством отношения R:

$$A_2(x') = \bigvee_x R^2(x, x'), \forall x' \in X$$

$$\ldots$$

$$A_n(x') = \bigvee_x R^n(x, x'), \forall x' \in X$$

6. Заключительные замечания

Несомненно, можно выбрать любой из предложенных методов вычисления наибольшего собственного нечеткого множества для нечеткого отношения. Все зависит от решаемой задачи, и нельзя сказать, что какой-либо из методов заведомо лучше другого.

$R \circ R = R^2$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\boxed{0.3}$	0.6	$\boxed{0.8}$	$\boxed{0.5}$	$\boxed{0.5}$
x_2	$\boxed{0.3}$	0.6	0.5	$\boxed{0.5}$	$\boxed{0.5}$
x_3	0.1	0.6	0.4	0.4	$\boxed{0.5}$
x_4	$\boxed{0.3}$	$\boxed{0.8}$	0.3	0.3	0.4
x_5	$\boxed{0.3}$	0.7	0.5	0.1	0.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A_2 =$	0.3	0.8	0.8	0.5	0.5

Также отметим, что на основе работ [9, 11, 10] можно решить обратную задачу, а именно, найти все нечеткие отношения, для которых A_n является инвариантом.

Рассмотрим теперь возможные способы применения результатов на практике. Как отмечалось в работах [9, 11], композиция нечеткого отношения R и нечеткого множества A соответствует понятию условного нечеткого множества и может быть выражена посредством нечеткой импликации: ЕСЛИ A, ТО B ПРИ УСЛОВИИ R. Это правило вывода сформулировано Заде в работе [5]. Условно говоря, мы можем поставить диагноз или сделать прогноз, исходя из произведенных наблюдений и наших медицинских знаний.

Концепция нечетких собственных множеств дает методологию поиска инвариантов в терапевтических рекомендациях, что позволяет избежать неоптимального или неверного лечения.

Правило вывода, применяемое в медицинском диагностировании, может быть рассмотрено в рамках концепции функций доверия [12, 13]. Основываясь на релевантной информации (или свидетельстве), выраженной наблюдаемыми симптомами, можно присвоить различные степени доверия выносимому диагнозу или наличию заболевания. Мы планируем исследовать возможные применения нечетких бинарных отношений в решении подобного рода проблем.

Список литературы

[1] Р. Н. Гордеев, А. В. Язенин. Метод решения одной задачи возможностного программирования. Известия РАН. Теория и системы управления, (3):121–128, 2006.

[2] С. А. Орловский. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. Наука, М., 1981.

[3] Р. Н. Гордеев. Устойчивость задач возможностной оптимизации. Нечеткие системы и мягкие вычисления, 2(4):7–26, 2007.

[4] Р. Н. Гордеев. Некоторые свойства множеств допустимых решений задач возможностного программирования с нечеткими бинарными отношениями

// Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сборник трудов IV-й Международной научно-практической конференции (Коломна, 28-30 мая 2007 г.). М.: Физматлит, 2007, том 1, с.195–203.

[5] Л. Заде. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Мир, М., 1976.

[6] R. Bellman, L. A. Zadeh. Decision making in a fuzzy environment. Management Science, (17):141–164, 1970.

[7] J. J. Buckley. Possibility and necessity in optimization. Fuzzy Sets and Systems, (25):1–13, 1988.

[8] D. Dubois, H. Prade. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, New York, 1980.

[9] E. Sanchez. Equations de relations floues. Thése Biologie Humaine, Marseille, 1974.

[10] E. Sanchez. Solutions in composite fuzzy relation equations. In Application to medical diagnosis in Brouwerian logic, Fuzzy Automata and Decision Processes, 6th IFAC World Congress, Boston, MA, 1975. Elsevier North-Holland Inc., New York,.

[11] E. Sanchez. Resolution of composite fuzzy relation equations. Information and Control, 30(1):38–48, 1976.

[12] G. Shafer. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, Princeton, NJ., 1976.

[13] E.H. Shortliffe, B.G. Buchanan. A model of inexact reasoning in medicine. Math. Biosc., 23:351–379, 1975.

[14] A. V. Yazenin. On the problem of possibilistic optimization. Fuzzy Sets and Systems, (81):133–140, 1996.

[15] A. V. Yazenin, M. Wagenknecht. Possibilistic optimization. A measure-based approach, volume 6. BUTC-UW, 1996.