

УДК 551.46: 532.5: 51(075.8)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СЕЗОННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ ГИДРОХИМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТИ ОЗ. СЕЛИГЕР**

Климок В.И., Дударев А.В.
Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 22.10.2008, после переработки 12.11.2008.

Выполнены численные эксперименты по расчету сезонной изменчивости ветровых течений и распространения примеси в центральной части оз. Селигер. При моделировании миграции загрязняющего вещества использовались среднемесячные поля осредненных по глубине течений, найденные из решения системы уравнений для потенциального вихря и интегральной функции тока.

The modeling results of the spreading an admixture by seasonal currents in the central part of Lake Seliger was obtained by numerical experiments. In the time of modeling the spreading of pollution substance were used average-in-depth monthly wind-driven fields of currents which were found from solution of a set of two equations for potential vorticity and stream function.

Ключевые слова: численный эксперимент, поле течений, примесь.
Keywords: numerical experiment, field of currents, admixture.

Введение

Озеро Селигер, находящееся в центральной части Валдайской возвышенности и являющееся частью Верхневолжской водной системы, является одним из важных объектов водного хозяйства страны. Это одно из крупнейших озер средней полосы европейской части России, расположенное в крае с уникальной природой. Развитие рыбного хозяйства, гидротехнического и хозяйственного строительства, создание широкой сети курортов и санаториев на побережье ставят для озера проблемы, связанные с исследованием возможных в ближайшее время изменений его природных ресурсов. Поэтому исследование качества воды (зависящее в основном от распространения примесей антропогенного характера по акватории озера) такой лимнологической системы, как озеро Селигер, является актуальной проблемой при изучении экологического состояния водных объектов центральной части России.

Ввиду отсутствия данных наблюдений за полями течений и их изменчивостью, воспроизведение элементов динамического режима озера выполнено с помощью математического моделирования. Численные эксперименты проведены для центральных плесов озера, веским аргументом чего является высокая степень

техногенно-антропогенной нагрузки и расположение основных источников загрязнения именно в этой части водоема. При расчете ветровых течений и переноса примеси учитывались рельеф дна (важная роль которого в формировании течений отмечалась, например, в работах [1]–[3]), конфигурация берегового очертания и расходы воды втекающих и вытекающих рек. Изолинии рельефа дна, данные о котором любезно предоставлены сотрудниками Тверского государственного технического университета, изображены на рис 1.

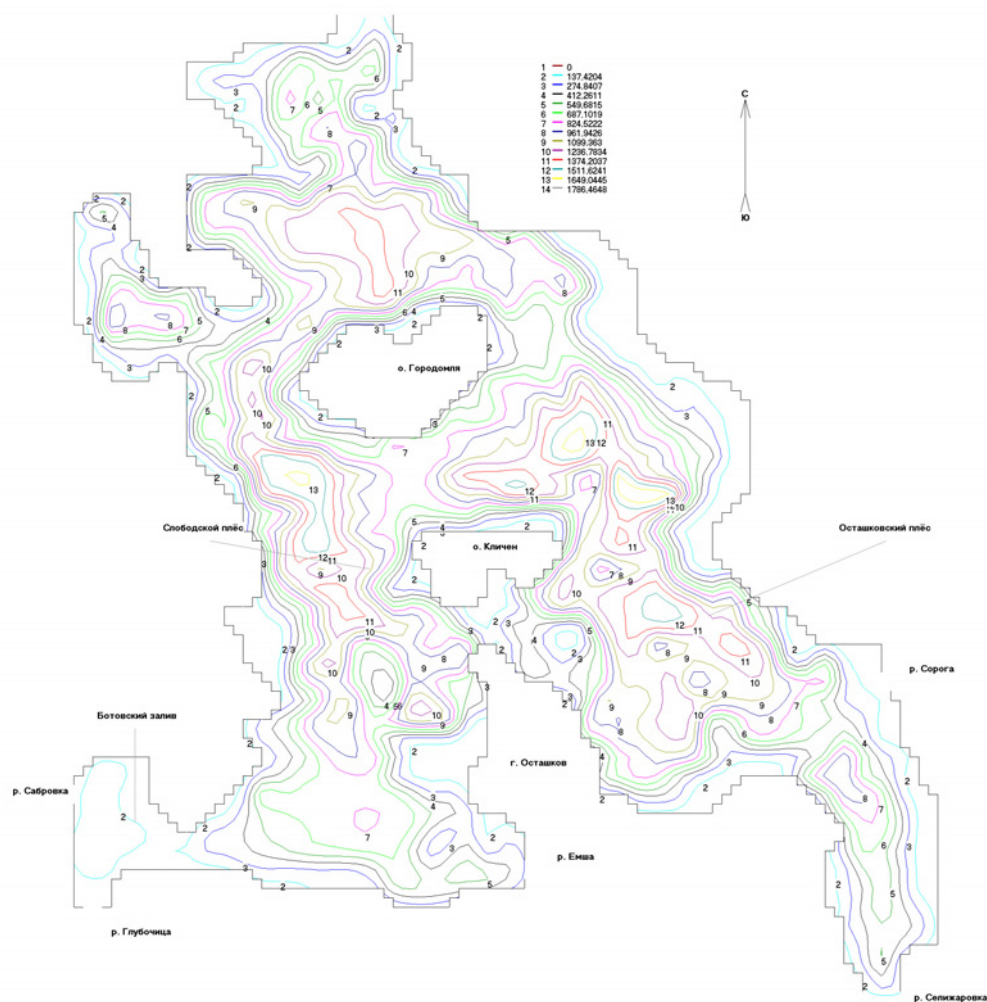


Рис. 1: Изолинии рельефа дна центральной части озера Селигер.

Водное питание Слободского и Осташковского плесов (исключая грунтовые воды и осадки) в основном происходит за счет поступления водных масс из верхних плесов (8340 кг/с) и рек (Сабровки – 580 кг/с, Глубочицы – 970 кг/с, Емши – 380 кг/с, Сороги – 1260 кг/с). Преобладающими ветрами над озером являются северо-западный (май – июль) и юго-западный (август – октябрь). Среднемесяч-

ная скорость ветра [4] составляет 3,9; 3,7; 3,3; 3,3; 3,7; 4,5 м/с, соответственно в мае – октябре. Остальное время озеро покрыто льдом и течение вызвано только притоком водных масс с верхних плесов озера, а также из устьев впадающих в него рек и оттока их в Селижаровский плес.

Расчеты распространения загрязняющего вещества, на примере хрома общего, и сравнение полученных в численных экспериментах результатов с данными наблюдений приведены в [5]. Среднегодовые концентрации примеси задавались по фактическим данным в зависимости от объёмов производства кожевенного завода, расположенного в г. Осташкове. В [5] было также отмечено достаточно приемлемое совпадение полученных результатов, что подтвердило «достоверность» численной модели. В данной статье исследуется сезонное изменение концентрации загрязняющего вещества после установления квазистационарного режима распространения примеси по акватории озера.

1. Математическая модель

С учетом того, что изучаемый водный объект не замкнут (проточен), характерный горизонтальный масштаб существенно превосходит вертикальный и глубина озера невелика, при моделировании ветровой циркуляции и переноса примеси рассматриваются осредненные по глубине течения.

Проинтегрированные по глубине уравнения Навье-Стокса, описывающие течение вязкой несжимаемой жидкости, сводят решение задачи к нахождению интегральной функции тока ψ из нелинейного уравнения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + R \right) \Re\psi - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Re\psi}{H} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Re\psi}{H} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{H} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{H} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = \\ & = A_H \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial\tau_y/H}{\partial x} - \frac{\partial\tau_x/H}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

которая связана с осредненными по глубине компонентами скорости течения соотношениями

$$\bar{u} = -\frac{1}{\rho_0 H} \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \bar{v} = \frac{1}{\rho_0 H} \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Распространение по акватории озера загрязняющего вещества определялось из решения уравнения адвективно-диффузионного переноса концентрации примеси C

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u} HC}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} HC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A^x H \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A^y H \frac{\partial C}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Используемые обозначения общеприняты: x, y — оси декартовой системы координат (ось x направлена на восток, y — на юг); ρ_0 — среднее значение плотности воды; f — параметр Кориолиса; R — коэффициент придонного трения. При выводе уравнения для интегральной функции тока (1) предполагалось, что составляющие придонного трения пропорциональны составляющим полного потока: $\bar{u}H$, $\bar{v}H$, с коэффициентом пропорциональности равным R . A_H — коэффициент горизонтального турбулентного трения; $H = H(x, y)$ — глубина водоема; τ_x , τ_y — составляющие касательного напряжения трения ветра; t — время; символом $\Re\psi$ обозначено

дифференциальное выражение $\Re\psi = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{H} \frac{\partial\psi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{H} \frac{\partial\psi}{\partial y})$; $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; A^x, A^y — коэффициенты диффузии примеси.

Для оценки порядка величин, входящих в уравнение (1), перейдем, как это принято, к безразмерным переменным, которые будем обозначать теми же символами, что и размерные, но с добавлением штриха. В результате, считая $H = const$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\psi_0}{t_0 L^2} \frac{\partial \Delta' \psi'}{\partial t'} + \frac{R \psi_0}{L^2} \Delta' \psi' + \frac{\beta \psi_0}{L} \frac{\partial \psi'}{\partial x'} - \frac{\psi_0^2}{\rho_0 H L^4} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\Delta' \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial y'} \left(\Delta' \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \right) \right] = \\ = \frac{A_H \psi_0}{L^4} \Delta' \Delta' \psi'. \end{aligned} \quad (4)$$

За характерный горизонтальный размер L выберем «проточную» ширину водоема, т.е. $L = 3,5 \cdot 10^5$ см; за характерное значение $\psi_0 = 10^7$ г/с — расход сточного течения (суммарный расход воды, проходящей через центральную часть озера); $H = 4 \cdot 10^2$ см — средняя глубина водоема; $\beta = \frac{\partial f}{\partial y} \approx 10^{-13}$ 1/(см·с) — параметр Россби. В качестве характерного масштаба времени примем отношение характерного горизонтального масштаба L к характерной скорости $V_0 = \frac{\psi_0}{\rho_0 H L}$ распространения возмущений. Это означает, что рассматриваются только те гидродинамические процессы, у которых скорость распространения возмущений такого же порядка, что и скорость движения частиц. Итак, $t_0 = \frac{L}{V_0} = \frac{\rho_0 H L^2}{\psi_0}$.

Разделив все члены уравнения (3) на $\frac{\psi_0}{t_0 L^2}$ и опуская штрихи у безразмерных переменных, получим

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + R_0 \Delta \psi + \beta_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{Re} \Delta \Delta \psi,$$

где $R_0 = \frac{RL}{V_0}$, $\beta_0 = \frac{\beta L^2}{V_0}$, $Re = \frac{LV_0}{A_H}$ — число Рейнольдса.

Используя указанные числовые значения для характерных величин, найдем при значениях $R = 2 \cdot 10^{-7}$ 1/с и $A_H = 2 \cdot 10^4$ см²/с, что $R_0 = \frac{RL^2 \rho_0 H}{\psi_0} \approx 1$, $\beta_0 = \frac{\beta \rho_0 H L^3}{\psi_0} \approx 0,1$, $Re^{-1} = \frac{A_H \rho_0 H}{\psi_0} \approx 0,8$.

Таким образом, размерный анализ указывает на то, что все члены, входящие в уравнение (1), должны быть учтены.

Краевые условия сформулируем при описании метода решения.

Уравнение переноса примеси в безразмерной форме принимает вид

$$\frac{\partial C'}{\partial t'} + \frac{\partial u' C'}{\partial x'} + \frac{\partial v' C'}{\partial y'} = \frac{1}{Re Pr_d} \Delta' C',$$

где Pr_d — диффузионное число Прандтля (отношение коэффициента горизонтального турбулентного трения к коэффициенту диффузии примеси).

2. Метод решения

При решении уравнения (1) использовался один из известных способов его линеаризации — это сведение его решения к решению системы двух уравнений относительно потенциального вихря

$$\xi = \frac{1}{H} \left(\frac{\Re\psi}{\rho_0} - f \right) \tag{5}$$

и интегральной функции тока

$$\begin{aligned} \psi : \rho_0 H \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho_0 R H \xi = \\ = A_H \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) \right] - \rho_0 R f + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_y}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_x}{H} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \rho_0 (H \xi + f). \tag{7}$$

На «твердых» участках границы функция тока задается с учетом известных расходов втекающих и вытекающих рек, а потенциальный вихрь определяется из соотношения (4) с учетом того, что производная по направлению внешней нормали от функции тока равна нулю. На участках «жидкой» границы потенциальный вихрь и функция тока находятся из уравнений (5) и (6) при условии равенства нулю производных по направлению внешней нормали. Такое же условие принимается и для касательной составляющей скорости. В зимний период года, когда озеро находится подо льдом, трение о лед не учитывалось ($\tau_x = \tau_y = 0$). В это время года течения формируются только под влиянием орографических неоднородностей, притоком водных масс в озеро и их оттоком в Селижаровский плес.

При решении уравнения (2) использовались следующие краевые условия: на участках «жидкой» границы, где поток направлен в рассматриваемую область и известно, что он содержит примесь, концентрация примеси задается, а на остальной части границы находится из уравнения (2) при условии равенства нулю производной по направлению внешней нормали к границе. В начальный момент времени содержание концентрации примеси в водоеме считалось известным.

При численном решении уравнений (2), (5), (6) используются консервативно-диссипативные разностные схемы второго порядка точности по пространственным переменным и схема естественного фильтра при аппроксимации по времени. Функция тока ψ и потенциальный вихрь ξ определяются в узлах разностной сетки с целочисленными значениями индексов i по оси x и j по оси y , составляющие осредненной по глубине скорости (1) находились в точках с индексами $i, j + 1/2$ и $i + 1/2, j$ соответственно. Концентрация примеси определялась в точках с полупелыми значениями индексов $i + 1/2$ и $j + 1/2$. Поскольку в исследуемом водном объекте учитываются расходы втекающих и вытекающих рек и наличие островов, т.е. область неодносвязна, то для определения значения функции тока на контуре k – го острова использовалось соотношение

$$\psi_{ij} |_{\Gamma_k^h} = \psi_k^0 = \frac{\sum_{ij \in \Gamma_k^h} \left[\frac{\psi_{i+1,j}}{H_{i+1/2,j}} + \frac{\psi_{i-1,j}}{H_{i-1/2,j}} + \frac{\psi_{i,j+1}}{H_{i,j+1/2}} + \frac{\psi_{i,j-1}}{H_{i,j-1/2}} - \rho_0 h^2 (H_{ij} \zeta_{ij} + f_j) \right]}{\sum_{ij \in \Gamma_k^h} \left(\frac{1}{H_{1+1/2,j}} + \frac{1}{H_{1-1/2,j}} + \frac{1}{H_{1,j+1/2}} + \frac{1}{H_{1,j-1/2}} \right)},$$

которое получено суммированием разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (7), по точкам сеточной области, принадлежащим острову, с учетом того, что функция тока имеет постоянное значение на острове, включая границу, а правая часть равна нулю в точках, принадлежащих острову. Поэтому на каждом итерационном шаге, прежде чем найти следующее приближение системы алгебраических уравнений, аппроксимирующих уравнение (6) во внутренних узлах сеточной области, сначала вычислялись значения функции тока на каждом контуре острова. Следует отметить, что в приведенном соотношении коэффициенты $1/H$ равны нулю (это вовсе не означает, что $H = +\infty$), если соответствующая точка сеточной области принадлежит суше. Системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующие исходные дифференциальные уравнения, решались методом последовательной верхней релаксации. Более подробно метод решения изложен в [6].

Осредненные по глубине составляющие скорости течений определялись из соотношений (1) для каждого месяца, с учетом соответствующего ветрового воздействия на водоем. Разрешение по горизонтальным координатам составляло 125м (т.е. увеличено вдвое по каждой из пространственных координат по сравнению с предыдущими численными экспериментами).

3. Результаты расчетов

Поле «стоковых» течений озера, т.е. течений, вызванных только притоком водных масс и их оттоком в Селижаровский плес, приведено на рис 2. Водные массы из рек Сабровка, Глубочица и Емша движутся на север.

Часть из них попадает в Осташковский плёс через протоку между о. Кличен и полуостровом, на котором расположен гор. Осташков, а часть, продолжая движение на север, сливается с водами, поступающими из верхних плесов, обтекающих о. Городомля с запада и вместе с ними попадает из плеса Слободского в Осташковский плес.

Небольшие вихревые образования, особенно хорошо прослеживающиеся вдоль практически всего восточного побережья Осташковского плеса, вызваны орографическими неоднородностями.

Поля течений, формируемые помимо стока и ветровым воздействием на водоем и осредненные за весенне-летний (май – июль) и летне-осенний (август – октябрь) периоды представлены на рис. 3 – 4.

Наличие ветра существенно усложняет картину течений, способствует появлению ряда вихревых образований, изменяющих форму, направление и интенсивность в зависимости от направления и силы ветра. Следует отметить, что в осенний период года часть водных масс выносятся за северную границу рассматриваемой области озера, а вместе с ними может выноситься и примесь, попадающая в центральную часть водоема из устья р. Емши, на которой находятся городские очистные сооружения. Наиболее отчетливо различия интегрального переноса водных масс видны на рис. 5 и 6, на которых приведены отклонения функции тока от фонового состояния (функции тока стокового течения) для различных сезонов года.

Северо-западный ветер способствует образованию антициклонической циркуляции у восточных берегов Слободского и Осташковского плесов и циклонической

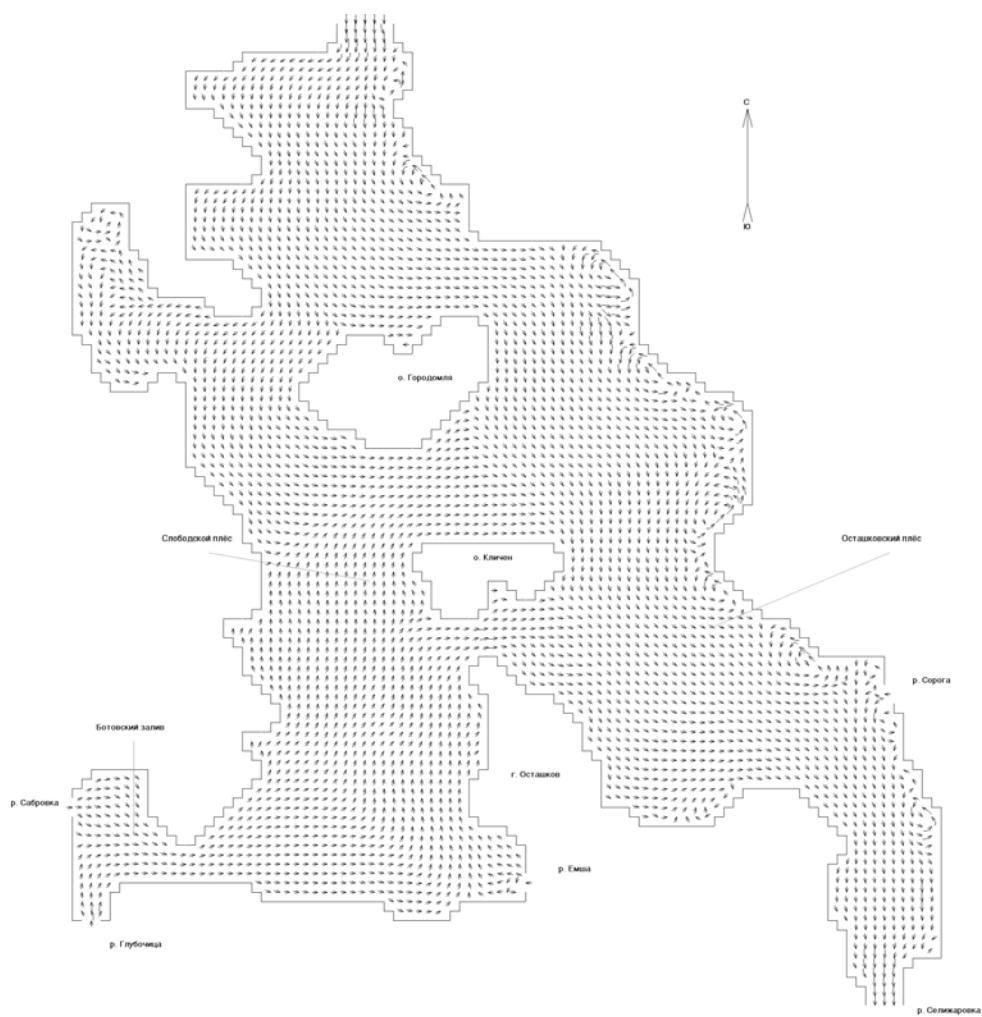


Рис. 2: Поле течений в зимний период года при отсутствии ветра.

– у западных берегов. При юго-западном ветре западное побережье Слободского плеса охвачено циркуляциями антициклонической направленности. У восточного побережья Осташковского плеса между островами Кличен и Городомля сохраняется циркуляция антициклонической направленности. Циклонический вихрь расположенный севернее о. Городомля смещается на восток. Северная часть рассматриваемой области практически полностью охвачена антициклоническим круговоротом, который и может выносить примесь за северную границу (это видно и на рис. 4).

Следует отметить, что направление движения определяется по следующему правилу: «двигаться» вдоль любой изолинии так, чтобы изолиния, пронумерованная большим номером, оставалась слева. Кроме того следует иметь в виду, что в областях, помеченных точками, движение имеет антициклоническую направленность (по часовой стрелке), в противном случае – циклоническую (против часовой стрелки).

Распространение загрязняющего вещества рассчитывалось с шагом по времени 5 суток на 100 лет модельного времени с использованием, среднемесячных полей течений.

Основной вклад в антропогенную нагрузку осуществляется сточными водами кожевенного завода и гор. Осташкова, поэтому постоянный источник примеси был задан в устье реки Емши, на которой располагаются очистные сооружения завода и города. Воды остальных рек, впадающих в центральную часть озера и водных масс, поступающих с верхних плесов, считались «чистыми», т.е. не содержащими примеси. В начальный момент времени предполагалось, что вода в озере не содержала указанного загрязняющего вещества. Дальнейшее распространение примеси по акватории водоема обусловлено диффузией и адвективным переносом загрязняющего вещества существующей структурой течений, вызванной ветровым воздействием.

Численные эксперименты были выполнены для исследования сезонной изменчивости распространения концентрации загрязняющего вещества по акватории озера после установления квазистационарного режима. При расчетах концентрация примеси в источнике задавалась постоянной в течение 100 лет модельного времени.

На рисунках 7 – 8 представлены изолинии отклонения концентрации загрязняющего вещества от их среднегодовых значений (рис. 9) для двух сезонов, позволяющие оценить и сделать соответствующие выводы о сезонной миграции примеси по акватории водоема.

На этих рисунках точками помечены те области, в которых среднегодовые значения концентрации превышают сезонные. В частности, следует отметить, что в летне-осенний период в северной части исследуемой области, концентрация примеси превышает среднегодовую концентрацию.

Именно рисунки, иллюстрирующие отклонения функции тока и примеси, облегчают объяснить попадание загрязняющего вещества из южной части рассматриваемой акватории в северную часть. Воды из реки Емши (рис. 5) в весенне-летний период переносятся двумя антициклоническими вихрями, до центральной западной части Слободского плеса. «Подхватываются» находящимся там циклоническим круговоротом и попадают в антициклонический вихрь, расположенный вдоль западных побережий островов Кличен и Городомля, который и «выносит»

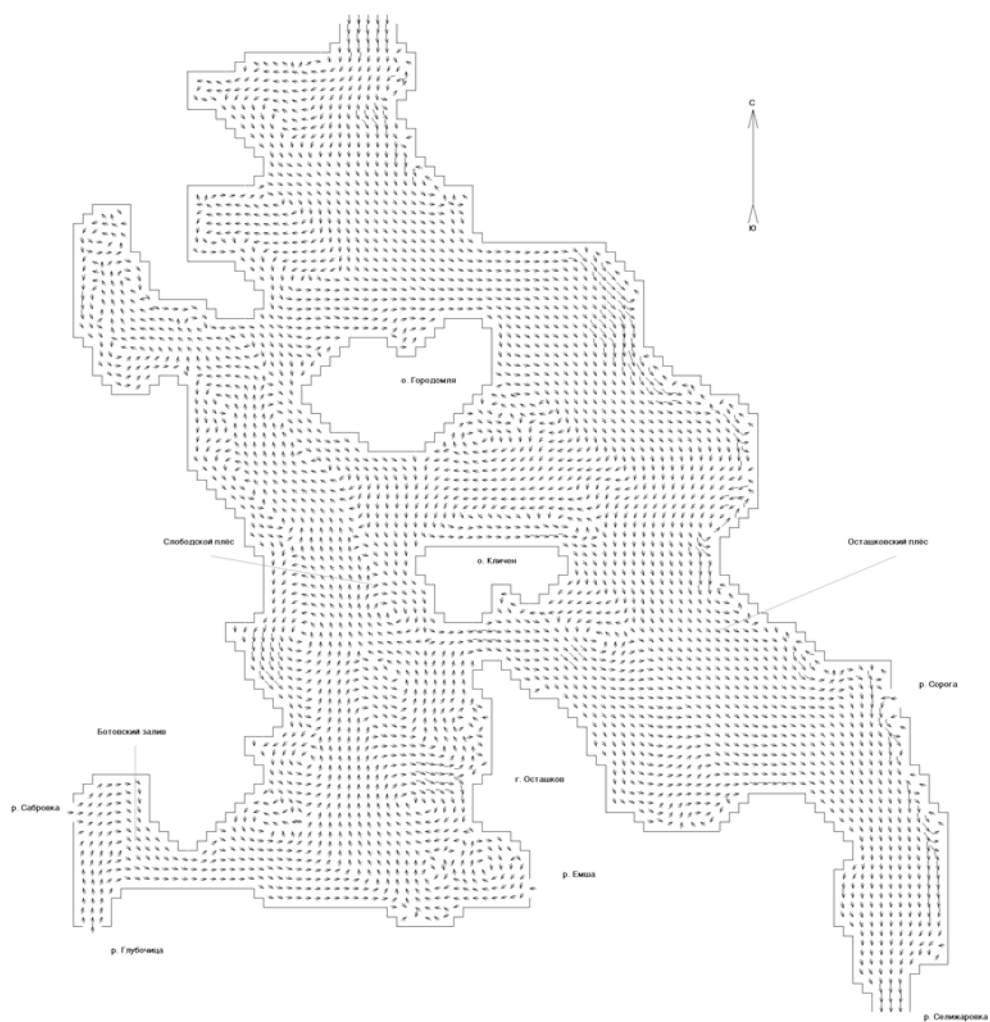


Рис. 3: Поле течений в весенне-летний период года при преобладающем северо-западном ветре.

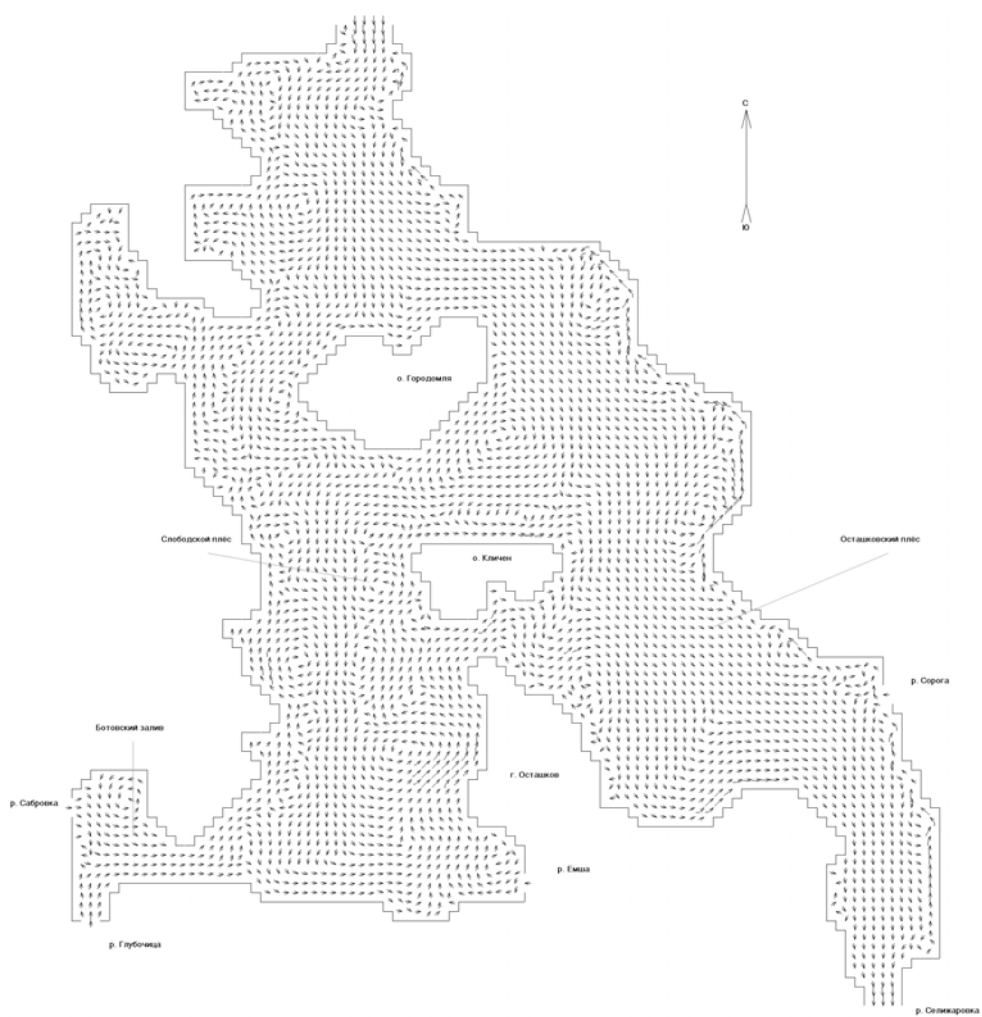


Рис. 4: Поле течений в летне-осенний период года при преобладающем юго-западном ветре.

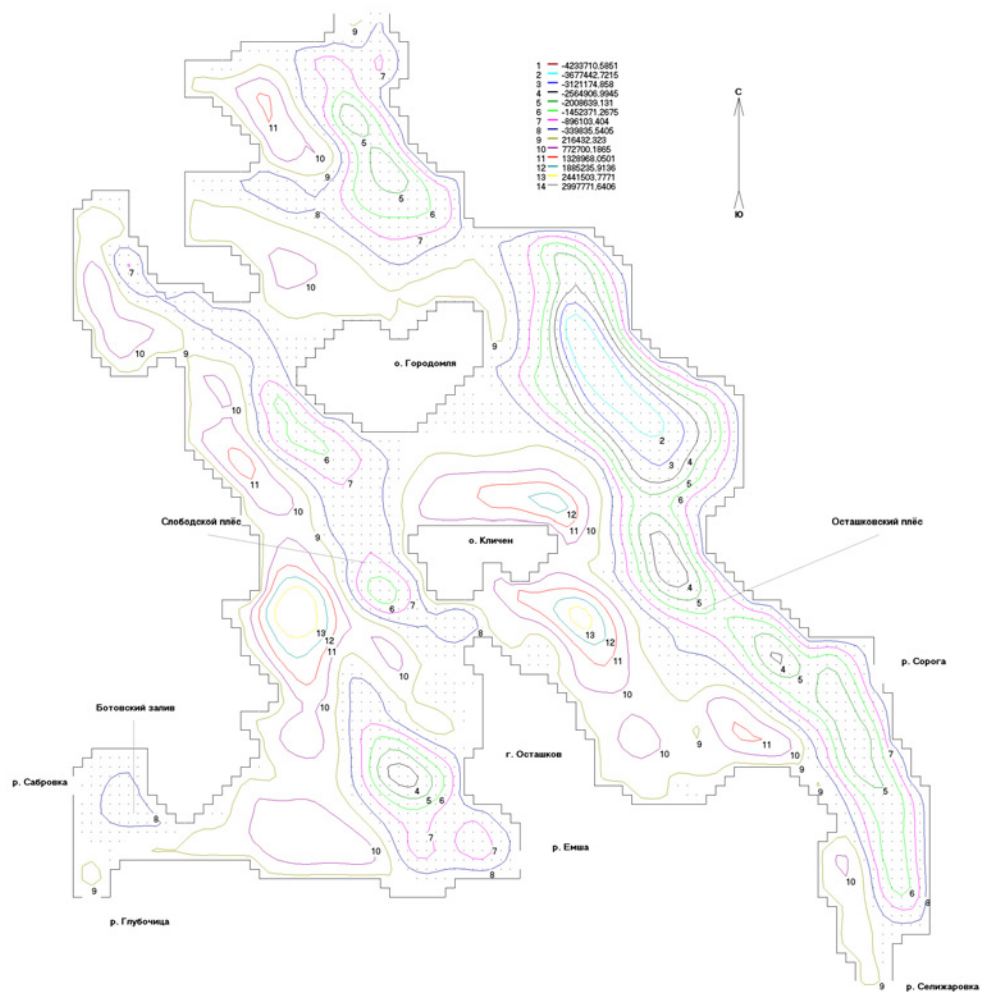


Рис. 5: Отклонение функции тока от функции тока стоковых течений в весенне-летний период.

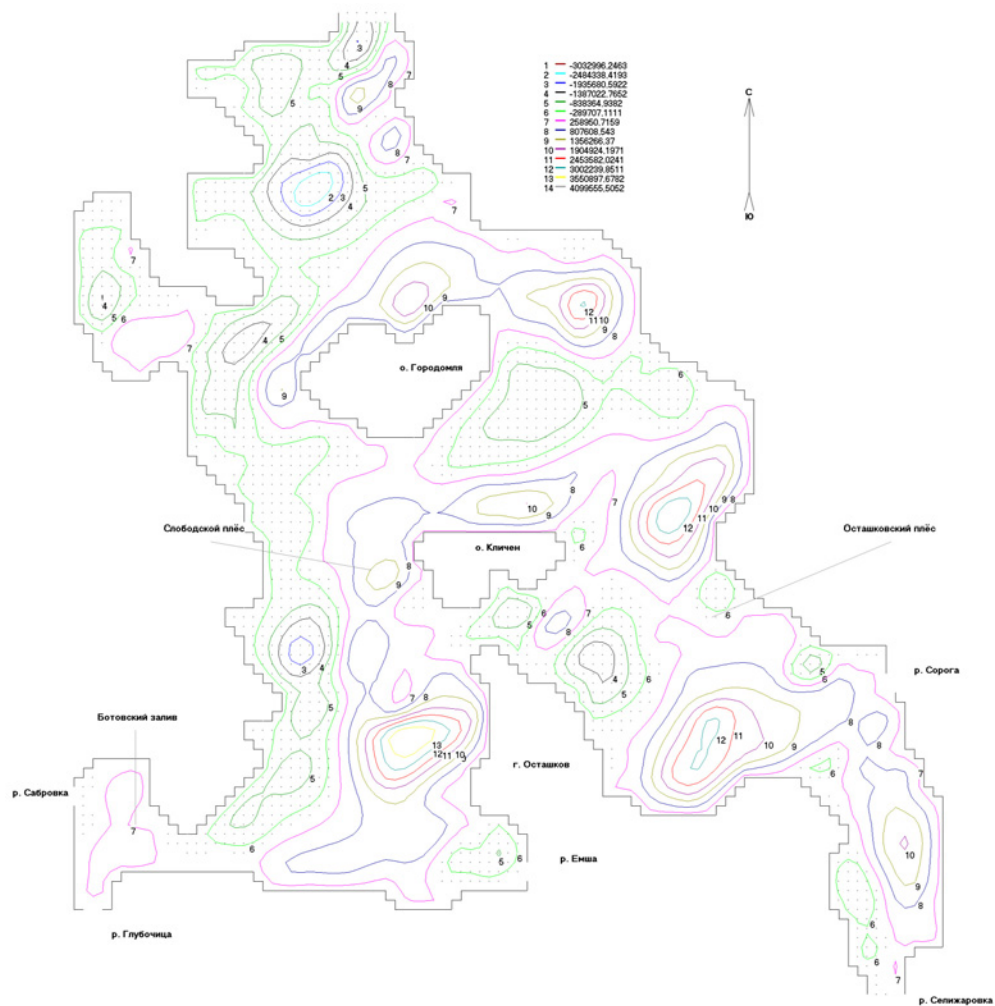


Рис. 6: Отклонение функции тока от функции тока стоковых течений в летне-осенний период.

примесь западнее и севернее о. Городомля, что отражено и на рис. 7. В этот период концентрация загрязняющего вещества там превышает среднегодовую концентрацию. В летне-осенний период два антициклонических круговорота, расположенные на северо-западе о. Городомля (рис.6), «переносят» водные массы, а вместе с ними и примесь к самой северной границе рассматриваемой области. На рис. 8 видно, что концентрация загрязняющего вещества в этот сезон в северной части превышает среднегодовую концентрацию.

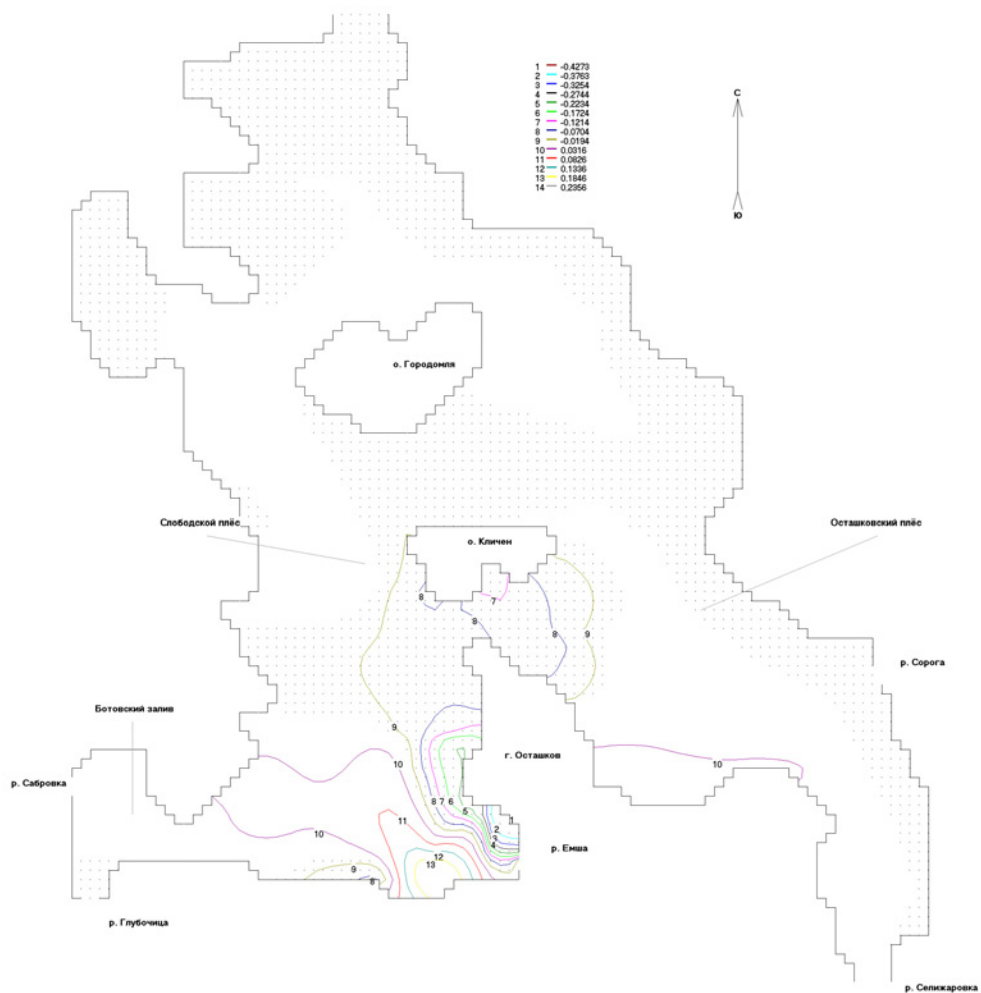


Рис. 7: Отклонение концентрации примеси за период май-июль от среднегодовых значений.

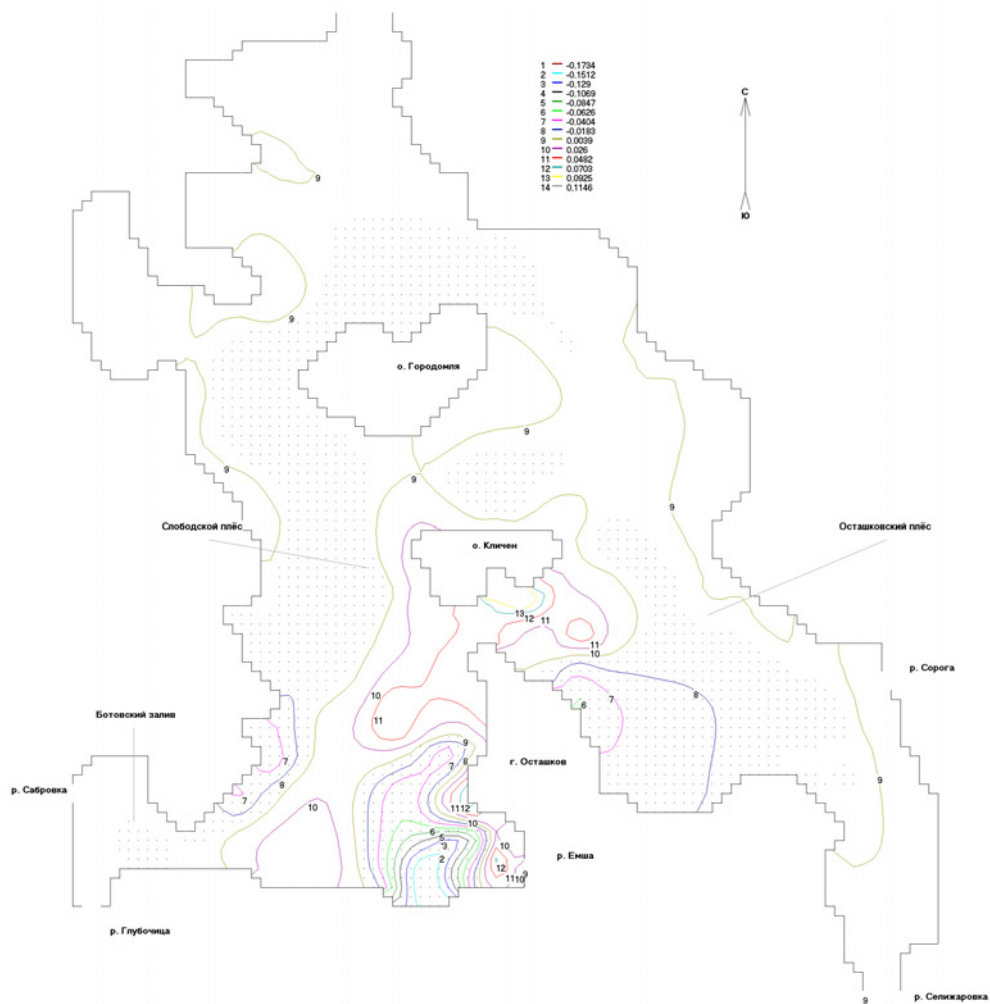


Рис. 8: Отклонение концентрации примеси за период август-октябрь от среднегодовых значений.

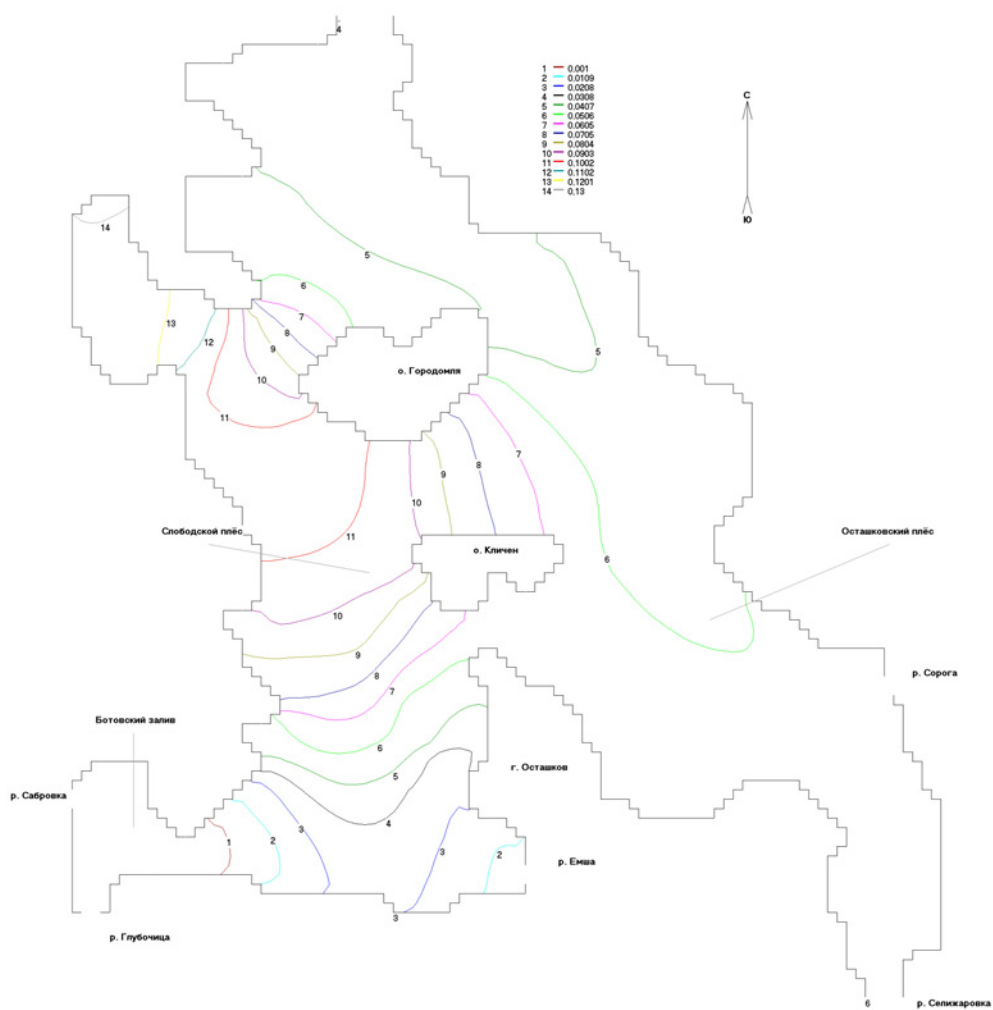


Рис. 9: Изолинии концентрации примеси, осредненной за год.

Заключение

Выполненные численные эксперименты подтвердили предположение, высказанное в [7] о том, что загрязнённые воды из устья р. Емши (а с ними и примесь) могут достигать северной границы рассматриваемой области и попадать (в летне-осенний период года) в верхние плёсы озера. Наличие примеси в северных плёсах водоёма подтверждается данными экспедиционных исследований [8]. Этот результат важен, так как на данной реке находятся городские очистительные сооружения, сбрасывающие в оз. Селигер, возможно, недоочищенные сточные воды.

В связи с этим могут быть интересными, с точки зрения математического моделирования и практических рекомендаций, ситуации аварийного сброса «сточных» вод в каком-либо месте (или местах) акватории озера, расчет концентрации загрязняющего вещества в водоёме при известном постоянном или временном источнике (или источниках) примеси и прочие ситуации.

Список литературы

- [1] Каменкович В.М. О влиянии рельефа дна на чисто дрейфовые течения в однородном безбрежном море // Изд. АН СССР, сер. Геоф., 1956. №10. С. 1182 – 1187.
- [2] Welander P. Wind-driven circulation in one-and two-layer oceans of variable depth // *Tellus*, 1968. Vol. 20, № 1. P. 1 – 16.
- [3] Кочергин В.П., Климок В.И. О влиянии рельефа дна на океаническую циркуляцию // Изд. АН СССР, ФАО, 1971. Т.7, №8. С. 885 – 891.
- [4] Бочаров М.М. Природа Калининской области // Облиздат., Калинин, 1951. 198 с.
- [5] Климок В.И., Дударев А.В. Математическое моделирование динамики пассивной примеси в центральной части озера Селигер // Вестник ТвГУ, Тверь: ТвГУ, 2007. №5 [33]. С. 29 – 36.
- [6] Климок В.И. Математические модели гидротермодинамики водоема и их численная реализация. Учеб. пособ. // Изд. ТвГУ, Тверь, 2006. 124 с.
- [7] Климок В.И., Косова И.В. Математическое моделирование течений озера Селигер // Сложные системы: моделирование и оптимизация. – Тверь: ТвГУ, 2001. С. 189 – 203.
- [8] Косов В.И., Косова И.В. Мониторинг качества воды озера Селигер // Водное хозяйство России, Екатеринбург: РосНИИВХ, 2000. Т. 2, № 2. С. 145 – 158.