КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.54

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, НЕ ПРИНИМАЮЩИЕ НЕКОТОРЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Граф С.Ю., Эйланголи О.Р.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 31.10.2008, после переработки 15.11.2008.

В семействах нормированных конформных отображений единичного круга в себя, не принимающих заданных значений, получены оценки производных и начальных тейлоровских коэффициентов.

At the families of the conformal mappings of the unit disk into itself omitting some values an estimates of the minor Teylorian coefficients and derivatives are obtained.

Ключевые слова: конформные отображения, ограниченные конформные отображения, проблема Кшижа, модули двусвязных областей, симметризация.
Keywords: conformal mappings, bounded conformal mappings, Krzyz's problem, modules of doubly-connected domains, symmetrization.

Введение

Сформулированная в первой четверти двадцатого века Л. Бибербахом гипотеза об оценке тейлоровских коэффициентов однолистных конформных отображений единичного круга в комплексную плоскость с нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ привела к активному развитию методов и идей геометрической теории функций комплексного переменного. На пути к доказательству гипотезы Бибербаха возникли новые направления теории функций и новые проблемы, некоторые из которых остаются нерешенными. В частности, несмотря на успешное доказательство Л. де Бранжем в 1984 г. гипотезы Бибербаха, аналогичная задача для ограниченных конформных отображений до сих пор полностью не решена.

Ниже рассматриваются некоторые классические задачи геометрической теории функций в классе однолистных конформных отображений круга в себя, не принимающих фиксированных значений из единичного круга. Доказательства основных результатов опираются на методы экстремальных длин, симметризации, методы, развитые в теории линейно-инвариантных семейств конформных отображений, а также некоторые известные оценки в классах однолистных функций.

1. Основные результаты

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}(a)$ конформных отображений f единичного круга $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ в себя, удовлетворяющих условиям $f(0) = 0,\ f'(0) > 0,\ f(z) \neq a$, где a – произвольное фиксированное число, такое, что $0 < |a| < 1$. Классы $\mathcal{F}(a)$ не являются компактными в топологии локально-равномерной сходимости, но, очевидно, при любом достаточно малом $c > 0$ подклассы $\mathcal{F}_c(a)$, состоящие из отображений $f \in \mathcal{F}(a)$, для которых $f'(0) \geq c$, компактны.

Необходимость оценок, связанных с отображениями указанного вида, достаточно часто возникает в задачах геометрической теории функций, например, при изучении подчиненных аналитических и гармонических функций.

С другой стороны нетрудно усмотреть связь семейств вида $\mathcal{F}(a)$ с классом функций, фигурирующим в нерешенной на сегодняшний момент проблеме Кшижа [1] об оценке тейлоровских коэффициентов регулярных в единичном круге функций φ, для которых $0 < |\varphi(z)| \leq 1$ при любом $z \in \Delta$.

Классы $\mathcal{F}(a)$ тесно связаны с известными (см., например, [2]) классами S_M ограниченных конформных изоморфизмов F единичного круга Δ в круг $\Delta_M = \{z : |z| < M\},\ M \geq 1$, нормированных условиями: $F(0) = 0,\ F'(0) = 1$. Действительно, если $f \in \mathcal{F}(a)$, то, очевидно, $F(z) = f(z)/f'(0) \in S_M$ для $M \geq 1/f'(0)$. Нижняя граница изменения величины M для всех $f \in \mathcal{F}(a)$ может быть получена с помощью следующей теоремы:

Теорема 1. *Для любой функции $f \in \mathcal{F}(a)$ справедлива точная оценка*

$$f'(0) \leq \frac{4|a|}{(1+|a|)^2}. \tag{1}$$

Равенство достигается только на функциях $f_a(z)$, отображающих единичный круг Δ на области $D_a = \Delta \backslash \{z : |z| \geq |a|, \arg z = \arg a\}$ – круги с радиальным разрезом, и имеющих вид

$$f_a(z) = e^{i \arg a} f_{|a|}(e^{-i \arg a} z). \tag{2}$$

Здесь

$$f_{|a|}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{1+A}{2} - \frac{1-A}{2} - \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{1+A}{2} - \frac{1-A}{2}\right]^2 - 1}, \tag{3}$$

где $A = \frac{1}{2}(|a| + |a|^{-1})$, а использованная ветвь радикала принимает положительные значения на положительном луче вещественной оси.

Заметим, что нижняя оценка $f'(0)$ в классе $\mathcal{F}(a)$ тривиальна: $f'(0) > 0$. Функции $F_a(z) = f_a(z)\frac{(1+|a|)^2}{4|a|}$ принадлежат классам S_M, $M = \frac{(1+|a|)^2}{4|a|}$, и известны как функции Пика (см., например, [2]).

Ключевую роль в доказательстве теоремы 1 играет понятие модуля двусвязной области. Напомним, что модулем двусвязной области D называется число

$$M(D) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)},$$

где $\lambda(\Gamma)$ – экстремальная длина семейства кривых Γ, разделяющих граничные компоненты области D. В частности модуль концентрического кругового кольца $K(r,R)$ с радиусами r и R, $0<r<R<\infty$, равен

$$M(K(r,R)) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{r}.$$

Известно (см., например, [3]), что модули обладают свойством инвариантности при конформных отображениях многосвязных областей. Среди других свойств модулей отметим их монотонность, понимаемую в следующем смысле: если двусвязные области D_1 и D_2 таковы, что $D_1 \subset D_2$, то $M(D_1) \le M(D_2)$.

Метод симметризации в геометрической теории функций восходит к работам Полиа и Сеге, Штейнера. Обзор свойств симметризационных преобразований может быть найден в [4]. Круговой симметризацией замкнутого множества E относительно положительного луча вещественной оси называется множество

$$E^* = \bigcup_{0\le r<\infty} \gamma_r,$$

где $\gamma_r = \{z : |z| = r, \, |\arg z| \le \mu(E_r)/2\}$. Здесь $\mu(E_r)$ – линейная мера Лебега пересечения множества E с окружностью $\{z : |z| = r\}$. Ясно, что при симметризации порядок связности множества E не возрастает.

Пусть D – двусвязная область, G_1, G_2 – компоненты связности дополнения к D, причем G_1 – ограниченная компонента дополнения и $0 \in G_1$. Если $D^* = \mathbb{C}\backslash\big(G_1^* \cup G_2^*\big)$ представляет собой двусвязную область, то назовем D^* круговой симметризацией области D. При круговых симметризациях модули двусвязных областей не убывают (см., например, [4]), т.е.

$$M(D) \le M(D^*),$$

причем равенство возможно только в том случае, когда D и D^* совпадают с точностью до вращения вокруг начала координат.

Доказательство теоремы 1. Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{F}(a)$, $D = f(\Delta)$. Рассмотрим число $\varepsilon > 0$ настолько малое, что круг $\{w : |w| \le \varepsilon\}$ лежит в области D. Определим двусвязную область $D_\varepsilon = D\backslash\{w : |w| \le \varepsilon\}$. Пусть $\Delta_\varepsilon = f^{-1}(D_\varepsilon)$. В силу нормировок, наложенных на отображение f, область Δ_ε с точностью до бесконечно малых порядка $o(\varepsilon)$ совпадает с круговым кольцом $\{z : \varepsilon/f'(0) < |z| < 1\}$. Тогда, в силу конформной инвариантности модулей двусвязных областей, имеем

$$M(D_\varepsilon) = M(\Delta_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{f'(0)}{\varepsilon} + o(1).$$

Заметим, что область D_ε не содержит точки a. Тогда двусвязная область D_ε^*, полученная из D_ε круговой симмметризацией, лежит в кольце $\{w : \varepsilon < |w| < 1\}$, симметрична относительно действительной оси и не содержит отрезка $[|a|, 1]$. Принимая во внимание приведенные выше свойства модулей и симметризационных преобразований, получаем

$$M(D_\varepsilon) \le M(D_\varepsilon^*).$$

В свою очередь, область D_ε^* содержится в D_ε^a – кольце $\{w : \varepsilon < |w| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[|a|, 1]$ действительной оси. Следовательно,

$$M(D_\varepsilon^*) \le M(D_\varepsilon^a).$$

Двусвязная область D_ε^a с точностью до бесконечно малых порядка $o(\varepsilon)$ совпадает с образом кольца $\{z : \varepsilon/f'_{|a|}(0) < |z| < 1\}$ при конформном отображении $f_{|a|}(z)$ вида (3). Поэтому

$$M(D_\varepsilon^a) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{f'_{|a|}(0)}{\varepsilon} + o(1).$$

В итоге приходим к неравенству

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{f'(0)}{\varepsilon} + o(1) \le \frac{1}{2\pi}\ln\frac{f'_{|a|}(0)}{\varepsilon} + o(1),$$

из которого после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ следует оценка

$$f'(0) \le f'_{|a|}(0).$$

Остается заметить, что $f'_{|a|}(0) = \frac{4|a|}{(1+|a|)^2}$, а отображение $f_a(z) = e^{i\arg a}f_{|a|}(e^{-i\arg a}z)$ принадлежит классу $\mathcal{F}(a)$, причем $f'_a(0) = f'_{|a|}(0)$.

В случае, если в (1) имеет место равенство, равенства должны иметь место и во всех приведенных выше оценках. Но это возможно только в случае, когда $D_\varepsilon = D_\varepsilon^*$ с точностью до вращения вокруг начала координат, а $D_\varepsilon^* = D_\varepsilon^a$, т.е. $f(\Delta) = D_a = \Delta\backslash\{z : |z| \ge |a|, \arg z = \arg a\}$. В силу единственности конформного отображения Δ на D_a с нормировками $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ заключаем, что $f = f_a$. Теорема доказана.

Связь классов $\mathcal{F}(a)$ с классами ограниченных конформных отображений S_M в совокупности с теоремой 1 позволяют получить оценку второго тейлоровского коэффициента функций из $\mathcal{F}(a)$.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in \mathcal{F}(a)$, $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$, справедливы точные оценки коэффициента a_2.*

1). Если $|a| \le 3 - 2\sqrt{2}$, то

$$|a_2| \le 8|a|\frac{(|a|-1)^2}{(|a|+1)^4}.$$

2). Если $3 - 2\sqrt{2} < |a| < 1$, то

$$|a_2| \le \frac{1}{2}.$$

Равенства достигаются на функциях, отображающих круг Δ на круг с радиальным разрезом, причем в случае 1) – только на функциях вида (2).

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathcal{F}(a)$. Тогда, как отмечалось выше, $F(z) = f(z)/f'(0) \in S_M$ для $M = 1/f'(0)$. Как известно (см., например, [2]) в классах S_M справедлива точная оценка второго тейлоровского коэффициента: $|F''(0)/2| \le 2(1-1/M)$, причем равенство достигается только на функциях Пика. Следовательно, для $f \in \mathcal{F}(a)$

$$\frac{|a_2|}{f'(0)} = \frac{|f''(0)|}{2f'(0)} = \frac{|F''(0)|}{2} \le 2\bigl(1 - f'(0)\bigr),$$

т.е.

$$|a_2| \le 2f'(0)\bigl(1 - f'(0)\bigr).$$

В силу оценки (1) имеем: $f'(0) \le 4|a|/(1+|a|)^2$. С другой стороны $2t(1-t) \le 1/2$ для любого $t \in [0,1]$ и равенство достигается при $t = 1/2$. Таким образом, если $4|a|/(1+|a|)^2 \le 1/2$ (т.е. $|a| \le 3 - 2\sqrt{2}$), то

$$|a_2| \le 2\frac{4|a|}{(1+|a|)^2}\Bigl(1 - \frac{4|a|}{(1+|a|)^2}\Bigr) = 8|a|\frac{(|a|-1)^2}{(|a|+1)^4}$$

и равенство достигается на только функциях вида (2).

Если же $4|a|/(1+|a|)^2 > 1/2$, то

$$|a_2| \le \frac{1}{2},$$

и равенство достигается на функциях, отображающих Δ на круг с радиальным разрезом от точки $(3-2\sqrt{2})e^{i\arg a}$ до $e^{i\arg a}$. Теорема доказана.

Методы, используемые при получении оценок в линейно-инвариантных семействах голоморфных функций (см. [5]), позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in \mathcal{F}(a)$ и для любого $z \in \Delta$ справедлива точная оценка*

$$|f'(z)| \le \frac{4|a|}{(1+|a|)^2} \cdot \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2} \cdot \frac{|1 - f(z)/a|\,|1 - \overline{a}f(z)|}{\bigl|1 - e^{-i\arg a}f(z)\bigr|^2}. \tag{4}$$

Равенство достигается на функциях вида (2).

Заметим, что при $z = 0$ оценка (4) приобретает вид (1), а при $|a| \to 1$ из (4) следует лемма Шварца в инвариантной форме, которая может быть найдена, например, в [6].

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathcal{F}(a)$ и $z \in \Delta$ – фиксированное число. Рассмотрим конформные автоморфизмы единичного круга

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta + z}{1 + \overline{z}\zeta} \quad \text{и} \quad \psi(w) = e^{i\alpha}\frac{w - f(z)}{1 - \overline{f(z)}w}, \tag{5}$$

для которых

$$\varphi'(\zeta) = \frac{1-|\zeta|^2}{(1+\overline{z}\zeta)^2} \quad \text{и} \quad \psi'(w) = e^{i\alpha}\frac{1-|f(z)|^2}{(1-\overline{f(z)}w)^2}.$$

Параметр α подберем таким образом, чтобы композиция $\tilde{f}(\zeta) = \psi \circ f \circ \varphi(\zeta)$ принадлежала некоторому классу $\mathcal{F}(\tilde{a})$, где $\tilde{a} = e^{i\alpha}\frac{a - f(z)}{1 - \overline{f(z)a}}$. Для этого необходимо, чтобы число $\tilde{f}'(0) = \varphi'(0) \cdot f'(z) \cdot \psi'(f(z)) = e^{i\alpha} f'(z) \frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2}$ было положительно. Это верно, если $\alpha = -\arg f'(z)$.

Из теоремы 1 следует, что

$$\tilde{f}'(0) \leq \frac{4|\tilde{a}|}{(1+|\tilde{a}|)^2}, \quad \text{т.е.}$$

$$e^{i\alpha} f'(z) \leq 4\frac{|a-f(z)|}{|1-a\overline{f(z)}|} \cdot \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2} \cdot \left(\frac{|1-a\overline{f(z)}|}{|1-a\overline{f(z)}| + |a-f(z)|} \right)^2.$$

Преобразуем знаменатель последней из дробей:

$$\begin{aligned} &|1-a\overline{f(z)}| + |a-f(z)| = |1-\overline{a}f(z)| + |a-f(z)| = \\ &= \left|1-|a|e^{-i\arg a} f(z)\right| + \left||a| - e^{-i\arg a} f(z)\right| \geq (1+|a|)|1-e^{-i\arg a} f(z)|. \end{aligned}$$

Таким образом

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{(1+|a|)^2} \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2} \cdot \frac{|a-f(z)| \cdot |1-a\overline{f(z)}|}{|1-e^{-i\arg a} f(z)|^2},$$

что доказывает справедливость требуемой оценки (4). Теорема доказана.

Дальнейшее применение техники, использованной при доказательстве теоремы 3, совместно с неравенствами из теоремы 2 позволяет получить двусторонние оценки для $|f'(z)|$.

Теорема 4. *Для любой функции $f \in \mathcal{F}(a)$ и для любого $z \in \Delta$, $\arg z = \varphi$, справедливы оценки*

$$f'(0) - \int_0^{|z|} \frac{A_f(r)\,dr}{1-r^2} \leq \frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2} \cdot |f'(z)| \leq f'(0) + \int_0^{|z|} \frac{A_f(r)\,dr}{1-r^2}, \qquad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_f(r) = &\frac{8|a|}{(1+|a|)^2} \cdot \frac{\left|1-f(re^{i\varphi})/a\right| \left|1-\overline{a}f(re^{i\varphi})\right|}{\left|1-e^{-i\arg a} f(re^{i\varphi})\right|^2} \times \\ &\times \left(\frac{|a-f(re^{i\varphi})| - |1-\overline{a}f(re^{i\varphi})|}{|a-f(re^{i\varphi})| + |1-\overline{a}f(re^{i\varphi})|} \right)^2, \end{aligned}$$

если $\left|\frac{a-f(re^{i\varphi})}{1-\overline{a}f(re^{i\varphi})}\right| \leq 3-2\sqrt{2}$, *и* $A_f(r) = \frac{1}{2}$ *в противном случае.*

Очевидно, что нижняя оценка в (6) существенна только при тех $|z|$, для которых $f'(0) > \int_0^{|z|} \frac{A_f(r)\,dr}{1-r^2}$.

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathcal{F}(a)$ и $z \in \Delta$ – фиксированное число. Как и при доказательстве теоремы 3 рассмотрим конформные автоморфизмы $\varphi(\zeta)$ и $\psi(w)$ единичного круга вида (5), где α как и прежде подберем таким образом, чтобы функция $\tilde{f}(\zeta) = \psi \circ f \circ \varphi(\zeta)$ принадлежала некоторому классу $\mathcal{F}(\tilde{a})$, где

$\tilde{a} = e^{i\alpha}\frac{a-f(z)}{1-\overline{f(z)}a}$. Тогда непосредственными вычислениями устанавливается, что

$$\left|\frac{\tilde{f}''(0)}{2}\right| = |f'(z)|\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2}\left|(1-|z|^2)\left(\frac{\overline{f(z)}f'(z)}{1-|f(z)|^2}+\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)-\overline{z}\right| =$$
$$= |f'(z)|\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2}\left|(1-|z|^2)\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}+\frac{\partial}{\partial z}(1-|z|^2)\right| =$$
$$= (1-|z|^2)\left|\frac{\partial}{\partial z}\left((1-|z|^2)\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\right)\right|.$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$. Для любой действительнозначной функции $F(z)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial z}F(z) = e^{-i\varphi}\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}F(re^{i\varphi}) - i\,\frac{1}{2}\,\frac{e^{-i\varphi}}{r}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}F(re^{i\varphi}).$$

Тогда

$$\left|\frac{\tilde{f}''(0)}{2}\right| = \frac{1-r^2}{2}\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(|f'(re^{i\varphi})|\frac{1-r^2}{1-|f(re^{i\varphi})|^2}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{i}{r}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(|f'(re^{i\varphi})|\frac{1-r^2}{1-|f(re^{i\varphi})|^2}\right)\right|.$$

С другой стороны в силу теоремы 2 имеем

$$\left|\frac{\tilde{f}''(0)}{2}\right| \le 8|\tilde{a}|\frac{(|\tilde{a}|-1)^2}{(|\tilde{a}|+1)^4},$$

если $|\tilde{a}| = \left|\frac{a-f(z)}{1-\overline{f(z)}a}\right| \le 3-2\sqrt{2}$, и $\left|\frac{\tilde{f}''(0)}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ в противном случае. Непосредственными вычислениями устанавливается, что

$$\left|\frac{\tilde{f}''(0)}{2}\right| \le A_f(r),$$

где $A_f(r)$ имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Таким образом

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(|f'(re^{i\varphi})|\frac{1-r^2}{1-|f(re^{i\varphi})|^2}\right) - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(|f'(re^{i\varphi})|\frac{1-r^2}{1-|f(re^{i\varphi})|^2}\right)\right| \le \frac{2A_f(r)}{1-r^2}.$$

Такая же оценка, очевидно, справедлива и для реальной части выражения под знаком модуля, т.е.

$$-\frac{2A_f(r)}{1-r^2} \le \frac{\partial}{\partial r}\left(|f'(re^{i\varphi})|\frac{1-r^2}{1-|f(re^{i\varphi})|^2}\right) \le \frac{2A_f(r)}{1-r^2}.$$

Интегрируя последнее двойное неравенство по отрезку $[0,|z|]$, с учетом того, что $f(0)=0$, приходим к требуемым оценкам (6). Теорема доказана.

2. Обобщения

Рассмотренные выше задачи могут быть обобщены на классы $\mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$ конформных отображений f единичного круга Δ в себя, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, и не принимающих значений $a_1, a_2, ..., a_n$, где a_k, $k = \overline{1, n}$, – попарно различные комплексные числа, $0 < |a_k| < 1$, $k = \overline{1, n}$.

Свойство монотонности модулей двусвязных областей позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Если отображение $f_0 \in \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$ таково, что $f_0'(0) \geq f'(0)$ для всех $f \in \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$, то f_0 отображает Δ на область*

$$D_0 = \Delta \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k,$$

где γ_k, $k = \overline{1, n}$, – дуги жордановых кривых, соединяющих единичную окружность с точками a_k, $k = \overline{1, n}$.

Вообще говоря, дуги γ_k не обязаны быть попарно дизъюнктными, но не разбивают Δ на подобласти и не проходят через начало координат.

Доказательство. Заметим, что существование отображения $f_0 \in \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$, доставляющего максимум функционалу $f'(0)$, следует из компактности в топологии локально-равномерной сходимости в круге Δ подклассов $\mathcal{F}_c(a_1, a_2, ..., a_n)$ класса $\mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$, состоящих из функций f, для которых $f'(0) \geq c$, где $c > 0$ – достаточно малое фиксированное число, и из непрерывности функционала $f'(0)$.

Пусть $f_0 \in \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$ таково, что $f_0'(0) \geq f'(0)$ для всех $f \in \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$. Как и при доказательстве теоремы 1 рассмотрим достаточно малое число $\varepsilon > 0$, такое, что круг $\{w : |w| \leq \varepsilon\}$ содержится в области $D^0 = f_0(\Delta)$. Пусть $D^0_\varepsilon = D^0 \backslash \{w : |w| \leq \varepsilon\}$. Тогда в силу конформной инвариантности модуля двусвязной области и нормировок, наложенных на f_0,

$$M(D^0_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{f_0'(0)}{\varepsilon} + o(1).$$

Сначала покажем, что область D^0 не имеет внешних точек в круге Δ. Действительно, если бы такие внешние точки существовали, то в Δ нашлась бы односвязная область $\widetilde{D}$, не содержащая точек $a_1, a_2, ..., a_n$, такая, что $D^0 \subset \widetilde{D}$. Отсюда в силу монотонности модулей двусвязных областей следовало бы, что для $\widetilde{D}_\varepsilon = \widetilde{D} \backslash \{w : |w| \leq \varepsilon\}$

$$M(D^0_\varepsilon) < M(\widetilde{D}_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\tilde{f}'(0)}{\varepsilon} + o(1),$$

где $\tilde{f} \in \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$, и отображает Δ на $\widetilde{D}$. Следовательно,

$$f_0'(0) < \tilde{f}'(0),$$

что противоречит экстремальности отображения f_0.

Таким образом, односвязная область D^0 представляет собой единичный круг с разрезами по системе кривых γ_k, $k = \overline{1, m}$, проходящих через точки a_k, $k =$

$\overline{1,n}$. Убедимся, что система разрезов может быть описана с помощью кривых γ_k, обладающих свойствами, указанными в формулировке теоремы.

Действительно, если бы какой-либо из разрезов возможно было укоротить (за счет того, что он не оканчивается ни в одной из точек a_k) таким образом, чтобы получающаяся при этом область $\widetilde{D}$ оставалась односвязной и не содержала точек $a_1, a_2, ..., a_n$, то это привело бы к включению $D^0 \subset \widetilde{D}$, причем $\widetilde{D} \setminus D^0 \neq \emptyset$. Тогда, как и выше, используя монотонность модулей двусвязных областей, мы получили бы неравенство $M(D^0_\varepsilon) < M(\widetilde{D}_\varepsilon)$, а, следовательно, $f_0'(0) < \tilde{f}'(0)$ для $\tilde{f}$, отображающей Δ на $\widetilde{D}$.

Итак, система разрезов в единичном круге, соответствующих экстремальной области $D^0 = f_0(\Delta)$, такова, что каждый разрез заканчивается в какой-либо из точек $a_1, a_2, ..., a_n$, и не имеет ответвлений, не проходящих через эти точки. Нетрудно понять, что такую систему разрезов можно описать с помощью n жордановых кривых, оканчивающихся в точках a_k, $k = \overline{1,n}$, и, возможно, частично совпадающих. Теорема доказана.

Заметим, что всякую функцию $f \in \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$ можно представить в виде композиции

$$f = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ ... \circ \Phi_n, \tag{7}$$

где конформные отображения Φ_k, k=$\overline{1,n}$, принадлежат некоторым классам $\mathcal{F}(\tilde{a}_k)$, $k = \overline{1,n}$, таким, что:

$$\tilde{a}_1 = a_1, \ \text{ и } \ \Phi_1 \in \mathcal{F}(a_1),$$
$$\tilde{a}_k = \left(\Phi_1 \circ \Phi_2 \circ ... \circ \Phi_{k-1}\right)^{-1}(a_k), \ k = \overline{2,n},$$

т.е. выбор очередного отображения Φ_k влияет на вид следующей точки a_{k+1}.

При этом

$$f'(0) = \Phi_1'(0) \cdot \Phi_2'(0) \cdot ... \cdot \Phi_n'(0),$$

где в силу теоремы 1 $\Phi_k'(0) \leq \frac{4|\tilde{a}_k|}{(1+|\tilde{a}_k|)^2}$, $k = \overline{1,n}$. Очевидно, что, если $f_0 \in \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$ доставляет максимум функционалу $f'(0)$, то для последнего из сомножителей должно иметь место равенство

$$\Phi_n'(0) = \frac{4|\tilde{a}_n|}{(1+|\tilde{a}_n|)^2}.$$

С учетом теоремы 5 отсюда заключаем, что экстремальное отображение f_0 может быть представлено в виде композиции (7), где каждая функция Φ_k, $k = \overline{1,n-1}$, отображает Δ на круг с некоторым разрезом (необязательно радиальным), а последнее звено Φ_n композиции (7) представляет собой конформное отображение Δ на круг с радиальным разрезом до точки

$$\tilde{a}_n = \left(\Phi_1 \circ \Phi_2 \circ ... \circ \Phi_{n-1}\right)^{-1}(a_n).$$

Заключение

Таким образом, использование свойств модулей двусвязных областей, симметризационных преобразований и методов, развитых в теории линейно-инвариантных семейств локально-однолистных функций, позволяет получить точные оценки в классах $\mathcal{F}(a)$ конформных отображений, не принимающих некоторых значений.

Представляет интерес доказательство аналогичных оценок в классах $\mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Список литературы

[1] Krzyz J.G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Ann. Polon. Math. 1967-1968. V. 20. P. 314.

[2] Prokhorov D.V. Even coefficient estimstes for bounded univalent functions// Ann. Polon. Math. 1993. V. 58, N. 3. P. 267-273.

[3] Дубинин В.Н. Симметризация в теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1994, Т. 49, N. 1. С. 3-76.

[4] Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М., 1962.

[5] Pommerenke Ch. Linear-invariante Familien analytischer Functionen. I // Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108-154.

[6] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.