УДК 510.676, 519.7

ЯЗЫКИ ПРОСТЫХ ЭКО-ГРАММАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Захарова Е.П.
Кафедра информатики

В статье исследуются языки, порождаемые простыми эко-грамматическими системами. Показано, что класс таких языков не изменяется при фиксации относительного положения агентов. Исследуется иерархия классов языков, порождаемых расширенными простыми эко-грамматическими системами, в зависимости от двух параметров: общего числа агентов в системе и числа работающих агентов. Показано, что при отсутствии стирающих правил с ростом числа агентов эти классы не уменьшаются. Установлено, что класс языков, порождаемых расширенными простыми эко-грамматическими системами, замкнут относительно конкатенации, объединения, итерации и гомоморфизмов.

In this paper, we investigate the languages generated by simple eco-grammar systems. We show that this class of languages is not changed after fixing the positions of agents. We investigate the hierarchy of languages generated by extended simple eco-grammar systems based on two parameters: the total number of agents and the number of active agents. It is shown that under increasing the number of agents the classes are not changed. It is proved that the class of languages generated by extended simple eco-grammar systems is closed under concatenation, union, iteration and homomorphisms.

Ключевые слова: эко-грамматические системы, языки, агенты; операции конкатенации, объединения, итерации, гомоморфизма.
Keywords: eco-grammar systems, languages, agents; concatenation; homomorphism; iteration; union.

Введение: эко-грамматические системы. В статье исследуются языки, порождаемые простыми эко-грамматическими системами.

Эко-грамматические системы, определенные в [4], являются обобщениями и расширениями грамматических систем, введенных А. Линденмайером [7] для моделирования развития биологических систем.

При их определении авторы стремились удовлетворить следующим содержательным постулатам.

1. Эко-система состоит из окружения - среды - и множества агентов. Внутренние состояния агентов и среды описываются словами из определенного алфавита.

2. Есть универсальные часы, которые устанавливают моменты времени, общие для среды и всех агентов.

3. Все агенты и среда в каждую единицу времени выполняют параллельно один шаг эволюции.

4. Правила действий среды не зависят от агентов и состояния среды. Правила действий агентов в общем случае зависят от состояния среды, которое определяет в каждый момент подмножество активных правил, применяемых к внутреннему состоянию агента.

5. Агенты действуют на среду (или возможно на внутренние слова других агентов) в соответствии с правилами действия. В каждый момент времени каждый агент использует одно из правил действия, зависящих от внутреннего состояния агента.

6. Действия агентов по отношению к среде имеют больший приоритет, чем развитие самой среды.

Общее определение эко-грамматических систем [4], следующее этим постулатам, приводит к универсальным системам, эквивалентным по вычислительной силе, например, машинам Тьюринга.

Поэтому в данной работе мы будем изучать более ограниченный класс *простых эко-систем*, также определенный в [4].

Определение 1. *[7] $0L$-система - это набор $E = (V_E, P_E)$, где:*

- $V_E = \{a_1, \ldots, a_m\}$ *- алфавит ($|V_E| = m$);*
- P_E *- кс-правила развития среды вида: $a \to \alpha$, $a \in V_E$, $\alpha \in V_E^*$.*

Будем говорить, что в $0L$ - системе $E = (V_E, P_E)$ из слова $x = x_1x_2 \ldots x_r$ ($x_i \in V_E$) за 1 шаг выводится слово $y = y_1y_2 \ldots y_r$ ($y_i \in V_E^*$):

$$x \overset{1}{\Rightarrow}_E y,$$

если для каждого $1 \leq i \leq r$ в P_E входит правило $x_i \to y_i$.

Если $x \in V_E^*$, то $P_E(x) = \{y : x \overset{*}{\Rightarrow}_E y\}$.

Определение 2. *Простая эко-грамматическая система (SEG) - это набор вида $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega)$, где:*

- V_E *- конечный непустой алфавит, P_E - конечное множество контекстно-свободных правил над V_E (правила развития среды), так что (V_E, P_E) - $0L$-система;*
- *для каждого $i = 1, \ldots, n$ R_i - это непустое множество контекстно-свободных правил над V_E (оно представляет правила i-го агента);*
- *слово $\omega \in V_E^*$ - это аксиома, начальное состояние среды.*

Как можно видеть из этого определения, для SEG - некоторые из приведенных выше постулатов упрощены. В простых системах агенты не развиваются и их действия не зависят от состояний среды.

Шаг эволюции в простой эко-грамматической системе состоит в одновременном действии агентов и параллельном развитии среды: сначала каждый агент переписывает один символ в строке окружения, затем окружение переписывает все остальные символы.

Определение 3. *Пусть* $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega)$ *— простая эко-грамматическая система. Будем говорить, что* x *непосредственно порождает* y *в* Σ $(x, y \in V_E^*)$*:* $x \Rightarrow_\Sigma y$*, если:*

- $x = z_1 x_1 z_2 x_2 \ldots z_n x_n z_{n+1}$*, где:* $x_i \in V_E$*,* $1 \leq i \leq n$*, и* $z_j \in V_E^*$*,* $1 \leq j \leq n+1$*;*
- $y = z'_1 y_1 z'_2 y_2 \ldots z'_n y_n z'_{n+1}$*, где:* $y_i, x_j \in V_E^*$*,* $1 \leq i \leq n$*,* $1 \leq j \leq n+1$*;*
- *существует перестановка агентов* $R_{j_1}, R_{j_2}, \ldots, R_{j_n}$*, такая что* $x_i \to y_i \in R_{j_i}$*, для* $1 \leq i \leq n$*;*
- *остальные символы изменяет среда: либо* $z_j = z'_j = \epsilon$ *(*ϵ *- «пустой» символ), либо* $z_j \stackrel{1}{\Rightarrow}_E z'_j$*, где* $E = (V_E, P_E)$ *-* $0L$ *- система окружения.*

Заметим, что, в соответствии с этим определением, все агенты должны работать на каждом шаге эволюции, иначе эволюция останавливается. В [8] и главе 5 книги [3] рассматривается другая версия простых эко-грамматических систем, так называемые слабо простые эко-грамматические системы, когда эволюция не блокируется, если некоторые из агентов не могут выполнить никаких действий над строкой окружения.

Определение 4. *Пусть* $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega)$ *— простая эко-грамматическая система. Язык* $L(\Sigma)$*, порождаемый системой* Σ*, определяется следующим образом:*

$$L(\Sigma) = \{w \in V_E^* |\, \omega \stackrel{*}{\Rightarrow}_\Sigma w\}.$$

Расширенная версия простых эко-грамматических систем, в алфавите которых выделяется подмножество символов-терминалов, впервые представлена в [4].

Определение 5. *Расширенная простая эко-грамматическая система (ESEG) — это набор* $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta)$*, где:*

- V_E, P_E, n, R_i *для* $1 \leq i \leq n$ *и* ω *такие же, как в определении 2, то есть алфавит системы, множество правил развития среды, число агентов* $(n \geq 1)$*, множества правил агентов и начальная аксиома;*
- $\Delta \subseteq V_E$ *- терминальный алфавит, непустое подмножество* V_E*.*

В ESEG эволюция проходит так же, как было описано в определении 3 для SEG. Порождаемый язык состоит только из слов в терминальном алфавите.

Определение 6. *Пусть* $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega)$ *— расширенная простая эко-грамматическая система. Язык, порождаемый системой* Σ*, определяется следующим образом:*

$$L(\Sigma) = \{w \in \Delta^* |\, \omega \stackrel{*}{\Rightarrow}_\Sigma w\}.$$

Приведем пример, иллюстрирующий данную модель.

Пример 1. *Пусть* $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, R_2, R_3, \omega, \Delta)$ *- ESEG, такая что:*

- $V_E = \{A, B, C, a, b, c\}$,

- $P_E = \{A \to a, B \to b, C \to c, a \to a, b \to b, c \to c\}$,
- $R_1 = \{A \to A^2, A \to a\}$,
- $R_2 = \{B \to B^2, B \to b\}$,
- $R_3 = \{C \to C^2, C \to c\}$,
- $\omega = ABC$,
- $\Delta = \{a, b, c\}$.

Нетрудно видеть, что эта система порождает не контекстно-свободный язык $L(\Sigma) = \{a^n b^n c^n | \, n \geq 1\}$.

1. Перестановка агентов в простых эко-грамматических системах. В соответствии с определением 3 шага эволюции простых эко-грамматических систем, агенты на каждом шаге перед воздействием на среду занимают случайное положение в строке окружения и за один шаг могут произвольно его поменять, "перепрыгивая" друг через друга. Естественно возникает вопрос, изменится ли порождающая сила эко-систем, если запретить такие прыжки и зафиксировать положение агентов относительно друг друга? В этом разделе мы даем на него отрицательный ответ и показываем, что по произвольной простой эко-грамматической системе можно построить эквивалентную систему, работающую без перестановок агентов.

Определение 7. *Пусть $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega)$ — простая эко-грамматическая система. Будем говорить, что система работает без перестановки агентов, если каждый шаг эволюции системы $x \Rightarrow_\Sigma y$ $(x, y \in V_E^*)$ определяется следующим образом:*

- *$x = z_1 x_1 z_2 x_2 \ldots z_n x_n z_{n+1}$, где:*
  $x_i \in V_E$, $1 \leq i \leq n$, и $z_j \in V_E^*$, $1 \leq j \leq n+1$;
- *$y = z'_1 y_1 z'_2 y_2 \ldots z'_n y_n z'_{n+1}$, где:*
  $y_i, x_j \in V_E^*$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$;
- *$x_i \to y_i \in R_i$, для $1 \leq i \leq n$;*
- *остальные символы изменяет среда: либо $z_j = z'_j = \epsilon$, либо $z_j \stackrel{1}{\Rightarrow}_E z'_j$, где $E = (V_E, P_E)$ - $0L$ - система окружения.*

Пусть $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta)$ - расширенная простая эко-грамматическая система. Построим систему $\overline{\Sigma} = (\overline{V_E}, \overline{P_E}, \overline{R_1}, \ldots, \overline{R_n}, \overline{\omega}, \overline{\Delta})$, эволюция которой будет проходить без перестановки агентов, следующим образом:

- $\overline{V_E} = V_E \cup V'_E \cup \{K, T, T^{(j)}$ для всех$1 \leq j \leq n\}$, где $K, T, T^{(j)} \notin V_E$;
- $\overline{P_E} = P_{\overrightarrow{E}}' \cup \{A' \to A | \, A \in V_E\} \cup \{K \to K, T^{(j)} \to \epsilon | K$ для $1 \leq j \leq n\}$, где:
  $P_{\overrightarrow{E}}' = \{A \to v' | \, A \to v \in P_E\}$;
  на каждом шаге для первого символа $T^{(j)}$ будет применяться правило $T^{(j)} \to \epsilon$, а для всех остальных (если они будут) - правило $T^{(j)} \to K$;

- $\overline{R_i} = \cup_{j=1}^{n} R_j^{\rightarrow'(j)} \cup \{T \to \epsilon\}$ для $1 \le i \le n$, где:
  $R_j^{\rightarrow'(j)} = \{A \to w'TT^{(j)} | \, A \to w \in R_j\}$ для $1 \le j \le n$;
- $\overline{\omega} = \omega$;
- $\overline{\Delta} = \Delta$.

Утверждение 1. *Для любого вывода в системе* Σ $\omega \Rightarrow_\Sigma v_1 \Rightarrow_\Sigma v_2 \Rightarrow_\Sigma \cdots \Rightarrow_\Sigma v_t = v$ *($v_i \in V_E^*$ - строка окружения после i-того шага эволюции) существует вывод в системе* $\overline{\Sigma}$ $\overline{\omega} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_1} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_2} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \cdots \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_{2t}} = v$ *($\overline{v_i} \in V_E^*$), такой что* $\overline{v_{2i}} = v_i$.

Доказательство. Применим индукцию по длине вывода.

Пусть в системе Σ имеется вывод $\omega \Rightarrow_\Sigma v_1 \Rightarrow_\Sigma v_2 \Rightarrow_\Sigma \cdots \Rightarrow_\Sigma v_t = v$.

Базис. Если длина вывода в системе Σ $t = 0$, то $\omega = v_t = v$. По построению системы $\overline{\Sigma}$ ее начальная аксиома совпадает с начальной аксиомой системы Σ: $\overline{\omega} = \omega$. Тогда $\overline{\omega} = \omega = v_t = v = \overline{v_{2t}}$, и значит в $\overline{\Sigma}$ тоже существует вывод длины 0 слова v.

Индукционный шаг. Пусть строка окружения после k-того шага эволюции системы Σ имеет следующий вид: $v_k = \beta_1 a_1 \beta_2 a_2 \ldots \beta_n a_n \beta_{n+1}$ ($\beta_i \in V_E^*, a_j \in V_E, 1 \le i \le n+1, 1 \le j \le n$) и совпадает при этом со строкой окружения $\overline{v_{2k}}$, полученной при эволюции системы $\overline{\Sigma}$. Пусть на шаге $(k+1)$ агент R_{j_i} применяет правило $a_i \to b_{j_i}$ ($b_{j_i} \in V_E^*, 1 \le i \le n$, $R_{j_1}, \ldots, R_{j_n}$ - перестановка агентов). После этого среда воздействует на оставшиеся символы: $\beta_i \to \gamma_i$ ($\gamma_i \in V_E^*, 1 \le i \le n+1$).

Тогда $v_{k+1} = \gamma_1 b_{j_1} \gamma_2 b_{j_2} \ldots \gamma_n b_{j_n} \gamma_{n+1}$.

Промоделируем этот шаг Σ двумя шагами $\overline{\Sigma}$ следующим образом. На первом шаге каждый агент $\overline{R_i}$ будет действовать так: если в системе Σ на $(k+1)$-ом шаге эволюции в перестановке агентов i-тое место было занято агентом R_s ($s = j_i$), и он применил правило $a_i \to b_s$, то агент $\overline{R_i}$ будет применять соответствующее правило из множества $R_s^{\rightarrow'(s)}$: $a_i \to b'_s TT^{(s)}$.

После этого среда $\overline{P_E}$ воздействует на оставшиеся символы, используя правила из $P_E^{\rightarrow'}$, соответствующие правилам P_E: $\beta_i \to \gamma'_i$.

В итоге, после первого шага строка окружения примет вид:

$$\overline{v_{2k+1}} = \gamma' b'_{j_1} TT^{(j_1)} \gamma'_2 b'_{j_2} TT^{(j_2)} \ldots \gamma'_n b'_{j_n} TT^{(j_n)} \gamma'_{n+1}$$

На втором шаге все агенты $\overline{R_i}$ применят правила $T \to \epsilon$ (n символов T гарантируют, что все агенты смогут работать на этом шаге, даже если на предыдущем шаге использовались ϵ-правила). Среда при воздействии на оставшиеся символы заменит штрихованные буквы в соответствии с правилами вида: $A' \to A$, а буквы, помеченные верхним индексом, заменит на ϵ. Заметим, что ни разу не будет применено правило вида $A^{(i)} \to K$, так как роль каждого агента R_i может быть сыграна агентами в системе $\overline{\Sigma}$ только один раз, соответственно в строке окружения не может появиться больше одной буквы с индексом $^{(i)}$.

После второго шага строка окружения будет иметь вид:

$$\overline{v_{2k+2}} = \gamma b_{j_1} \gamma_2 b_{j_2} \ldots \gamma_n b_{j_n} \gamma_{n+1} = v_{k+1}.$$

Таким образом, промоделирован $(k+1)$-ый шаг эволюции системы Σ и выведено слово $\overline{v_{2(k+1)}} = v_{k+1}$. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $\overline{\Sigma}$ *- это работающая без перестановок агентов система, построенная выше описанным способом для системы* Σ*. Тогда*
$L(\Sigma) \subseteq L(\overline{\Sigma})$.

Доказательство. Пусть $v \in L(\Sigma)$, значит это слово выводимо в системе Σ, т.е. существует вывод: $\omega \Rightarrow_\Sigma v_1 \Rightarrow_\Sigma v_2 \Rightarrow_\Sigma \cdots \Rightarrow_\Sigma v_t = v$. Тогда, согласно утверждению 1, существует вывод в системе $\overline{\Sigma}$ этого слова: $\overline{\omega} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_1} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_2} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \cdots \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_{2t}} = v$, $\overline{v_{2i}} = v_i$. Значит слово v выводимо в $\overline{\Sigma}$ и $v \in L(\overline{\Sigma})$. Тогда $L(\Sigma) \subseteq L(\overline{\Sigma})$.

Утверждение 2. *Для любого вывода четной длины в системе* $\overline{\Sigma}$ $\overline{\omega} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_1} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_2} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \cdots \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_{2t}}$ *существует вывод в системе* Σ $\omega \Rightarrow_\Sigma v_1 \Rightarrow_\Sigma v_2 \Rightarrow_\Sigma \cdots \Rightarrow_\Sigma v_t$ *(*$v_i \in V_E^*$*) (*$\overline{v_i} \in V_E^*$*), такой что* $v_i = \overline{v_{2i}}$*.*

Доказательство. Применим индукцию по длине вывода. Пусть в системе $\overline{\Sigma}$ имеется вывод $\overline{\omega} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_1} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_2} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \cdots \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_{2t}} = v$.

Базис. Если длина вывода $2t = 0$, то $\overline{\omega} = v_{2t} = v$. Но по построению системы $\overline{\Sigma}$ ее начальная аксиома совпадает с начальной аксиомой системы Σ: $\overline{\omega} = \omega$. Тогда $\omega = \overline{\omega} = v$, и значит в Σ тоже существует вывод длины 0 слова v.

Индукционный шаг. Пусть строка окружения после $2k$-того шага эволюции системы $\overline{\Sigma}$ имеет следующий вид: $v_{2k} = \beta_1 a_1 \beta_2 a_2 \ldots \beta_n a_n \beta_{n+1}$ ($\beta_i \in V_E^*$, $a_j \in V_E, 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n$) и совпадает при этом со строкой окружения v_k, полученной при эволюции системы Σ. Пусть на шаге $(2k+1)$ каждый агент $\overline{R_i}$ применяет правило $a_i \to b'_{j_i} T T^{(j_i)} \in \vec{R_j}'^{(j_i)}$. После этого среда воздействует на оставшиеся символы: $\beta_i \to \gamma'_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$, применяя правила из $\vec{P_E}'$.

Тогда $v_{2k+1} = \gamma'_1 b'_{j_1} T T^{(j_1)} \gamma'_2 b'_{j_2} T T^{(j_2)} \ldots \gamma'_n b'_{j_n} T T^{(j_n)} \gamma'_{n+1}$.

На $(2k+2)$–ом шаге все агенты $\overline{R_i}$ применят правила $T \to \epsilon$. Среда при воздействии на оставшиеся символы заменит штрихованные буквы в соответствии с правилами вида: $A' \to A$, а буквы, помеченные верхним индексом, заменит на ϵ. Если в строке окружения будет два или более одинаковых символов $T^{(j_s)}$ (для некоторого $1 \leq s \leq n$), то среда первый из них заменит по правилу $T^{(j_s)} \to \epsilon$, а все остальные - по правилу $T^{(j_s)} \to K$. Таким образом, каждый символ $T^{(j_s)}$ (для всех $1 \leq s \leq n$) должен встречаться не более одного раза, иначе эволюция не сможет окончиться терминальным словом (символ K препятствует выводу терминального слова).

После $(2k+2)$-ого шага строка окружения будет иметь вид:

$$\overline{v_{2k+2}} = \gamma b_{j_1} \gamma_2 b_{j_2} \ldots \gamma_n b_{j_n} \gamma_{n+1}.$$

Промоделируем эти два шага $\overline{\Sigma}$ следующим шагом Σ: для $1 \leq i \leq n$ если в $\overline{\Sigma}$ агент $\overline{R_i}$ применял на $(2k+1)$-ом шаге правило $a_i \to b'_{j_i} T T^{(j_i)}$ из множества $\vec{R_j}'^{(j_i)}$, то полагаем, что на $(k+1)$-ом шаге Σ агент R_{j_i} будет занимать i-тое место в перестановке и применит правило: $a_i \to b_{j_i}$. Как было показано выше, каждый агент $\overline{R_i}$, применяющий правило из множества $\vec{R_j}'^{(j_i)}$, является единственным, применяющим правило из этого множества (это проверяется средой на $(2k+2)$-ом шаге эволюции $\overline{\Sigma}$).

Затем среда P_E воздействует на оставшиеся символы, используя правила вида $\beta_i \to \gamma_i$, соответствующие правилам $\vec{P_E}'$, применяемым средой $\overline{P_E}$ на $(2k+1)$-ом шаге эволюции: $\beta_i \to \gamma'_i$.

В итоге, после этого шага строка окружения примет вид:

$$v_{k+1} = \gamma b_{j_1}\gamma_2 b_{j_2}\dots\gamma_n b_{j_n}\gamma_{n+1} = \overline{v_{2k+2}}.$$

Таким образом, промоделированы $(2k+1)$-ый и $(2k+2)$-ой шаги эволюции системы $\overline{\Sigma}$ и получено $v_{k+1} = \overline{v_{2(k+1)}}$. □

Следствие 2. *Пусть $\overline{\Sigma}$ - это работающая без перестановок агентов система, построенная выше описанным способом для системы Σ, не разрешающей пустые правила. Тогда $L(\overline{\Sigma}) \subseteq L(\Sigma)$.*

Доказательство. Пусть $v \in L(\overline{\Sigma})$, значит это слово выводимо в системе $\overline{\Sigma}$, т.е. существует вывод: $\overline{\omega} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_1} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_2} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \dots \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \overline{v_{2t}} = v$. Тогда, согласно утверждению 2, существует вывод в системе Σ этого слова: $\omega \Rightarrow_\Sigma v_1 \Rightarrow_\Sigma v_2 \Rightarrow_\Sigma \dots \Rightarrow_\Sigma v_t = v$, такой что $v_i = \overline{v_{2i}}$. Значит слово v выводимо в Σ и $v \in L(\Sigma)$. Тогда $L(\overline{\Sigma}) \subseteq L(\Sigma)$.

Теорема 1. *Для любой системы $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \dots, R_n, \omega, \Delta)$ можно построить эквивалентную систему $\overline{\Sigma} = (\overline{V_E}, \overline{P_E}, \overline{R_1}, \dots, \overline{R_n}, \overline{\omega}, \overline{\Delta})$, эволюция которой будет проходить без перестановки агентов, такую что*
$L(\Sigma) = L(\overline{\Sigma})$.

Доказательство. Эквивалентная система $\overline{\Sigma} = (\overline{V_E}, \overline{P_E}, \overline{R_1}, \dots, \overline{R_n}, \overline{\omega}, \overline{\Delta})$ строится описанным выше способом.

Так как $L(\Sigma) \subseteq L(\overline{\Sigma})$ (следствие 1) и $L(\overline{\Sigma}) \subseteq L(\Sigma)$ (следствие 2), то $L(\Sigma) = L(\overline{\Sigma})$. □

Замечание. Из определения системы $\overline{\Sigma}$ непосредственно следует, что она может быть получена из Σ за полиномиальное время и имеет размер
$|\overline{\Sigma}| \leqslant O(|\Sigma|^2)$.

2. Зависит ли класс порождаемых языков от числа агентов? В оригинальной модели простых эко-грамматических систем все агенты должны работать на каждом шаге эволюции, иначе эволюция блокируется. В этом разделе рассмотрен особый режим эволюции: на каждом шаге должны работать ровно k агентов.

Определение 8. *Пусть $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \dots, R_n, \omega, \Delta)$ — расширенная простая эко-грамматическая система. Будем говорить, что x непосредственно порождает y в системе Σ в режиме $= k$ ($x, y \in V_E^*$, $1 \le k \le n$): $x \overset{=k}{\Rightarrow}_\Sigma y$, если*

- *$x = z_1 x_1 z_2 x_2 \dots z_k x_k z_{k+1}$, где:*
  $x_i \in V_E$, $1 \le i \le k$, и $z_j \in V_E^*$, $1 \le j \le k+1$;
- *$y = z'_1 y_1 z'_2 y_2 \dots z'_k y_k z'_{k+1}$, где:*
  $y_i, x_j \in V_E^*$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le k+1$;
- *в Σ имеется k различных агентов $R_{j_1}, R_{j_2}, \dots, R_{j_k}$, таких что*
  $x_i \to y_i \in R_{j_i}$, для $1 \le i \le k$;
- *остальные символы изменяет среда: либо $z_j = z'_j = \epsilon$, либо $z_j \overset{1}{\Rightarrow}_E z'_j$, где $E = (V_E, P_E)$ — $0L$ - система окружения.*

Обозначим транзитивное и рефлексивное замыкание отношения $\overset{=k}{\Rightarrow}_\Sigma$ следующим образом: $\overset{=k^*}{\Rightarrow}_\Sigma$. Порождаемый язык состоит из тех слов, которые могут быть выведены в такой системе из аксиомы за конечное число шагов эволюции.

Определение 9. *Пусть $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta)$ — расширенная простая эко-грамматическая система. Язык, порождаемый системой Σ в режиме $= k$, определяется следующим образом:*

$$L(\Sigma, = k) = \{w \in \Delta^* | \, \omega \overset{=k^*}{\Rightarrow}_{\Sigma} w\}.$$

Рассмотрим расширенные простые эко-грамматические системы с и без стирающих ϵ-правил. Если ϵ-правила разрешаются в P_E и множествах R_i, мы будем использовать следующую систему обозначений: класс языков, генерируемых расширенными эко-грамматическими системами, – $\mathcal{L}(EE^{\epsilon})$ (в этой нотации первая E означает "extended вторая - "eco"); класс языков, генерируемых такими системами, содержащими n агентов и работающими в режиме эволюции $= k$, – $\mathcal{L}(EE^{\epsilon}(n, = k))$. Будем опускать символ ϵ, если ϵ-правила не разрешаются ни в P_E, ни в множествах R_i: $\mathcal{L}(EE)$ и $\mathcal{L}(EE(n, = k))$.

При исследовании классов языков, генерируемых расширенными простыми эко-грамматическими системами с n агентами в режиме эволюции $= k$, в работе [3] были получены следующие результаты.

Теорема 2. *Для $1 \leq k \leq n$*

1. $\mathcal{L}(EE^{\epsilon}(n, = k)) = \mathcal{L}(EE^{\epsilon}(k, = k))$,
2. $\mathcal{L}(EE(n, = k)) = \mathcal{L}(EE(k, = k))$.

Таким образом, класс порождаемых языков не зависит от первого параметра, общего числа агентов в системе n.

Теперь обратим внимание на второй параметр – число агентов, работающих на каждом шаге эволюции.

Рассмотрим случай расширенной простой эко-грамматической системы без ϵ-правил. Включение $\mathcal{L}(EE(n+1, = n+1)) \subseteq \mathcal{L}(EE(n, = n))$ было доказано в [6]:

Теорема 3. *Для $n \geq 1$ $\mathcal{L}(EE(n+1, = n+1)) \subset \mathcal{L}(EE(n, = n))$.*

При этом различие между этими классами устанавливается за счет конечных языков, содержащих короткие (длины $= n$) слова, к которым невозможно применить правила $(n+1)$ агентов.

Однако, если поставить обе системы $EE(n+1, = n+1)$ и $EE(n, = n)$ в равные условия — работать на множестве слов длины не меньше $(n+1)$, то их порождающая сила совпадает.

Определение 10. *Пусть $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta)$ — некоторая расширенная простая эко-грамматическая система. Языком $L_{\geq m}(\Sigma, = k)$ будем называть множество слов длины не меньше m $(m \geq 0)$, порождаемых системой Σ, работающей в режиме $= k$:*

$$L_{\geq m}(\Sigma, = k) = \{v \in \Delta^* | \; |v| \geq m \textit{ и } v \in L(\Sigma, = k)\}.$$

Понятно, что $L_{\geq m}(\Sigma, = k) \subseteq L(\Sigma, = k)$.

Ограничения $m \geq n$ и $|\omega| \geq m$ в условиях отсутствия ϵ-правил в системе гарантируют, что на каждом шаге эволюции эко-системы все n агентов имеют возможность работать.

Через $\mathcal{L}_{\geq m}(EE(n,=k))$ обозначим класс языков, порождаемых расширенными простыми эко-грамматическими системами без ϵ-правил, работающими в режиме $=k$, и содержащих слова длины не меньше m.

Теорема 4. *Для* $n \geq 1$ $\mathcal{L}_{\geq n+1}(EE(n,=n)) \subseteq \mathcal{L}_{\geq n+1}(EE(n+1,=n+1))$.

Доказательство. Для произвольной расширенной простой эко-грамматической системы $\Sigma = (V_E, P_E, R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta)$, не разрешающей ϵ-правила, построим другую расширенную простую эко-грамматическую систему
$\overline{\Sigma} = (\overline{V_E}, \overline{P_E}, \overline{R_1}, \ldots, \overline{R_{n+1}}, \overline{\omega}, \overline{\Delta})$, в которой тоже не будет ϵ-правил, такую что $L_{\geq n+1}(\Sigma,=n) = L_{\geq n+1}(\overline{\Sigma},=n+1)$.

Пусть $\overline{\Sigma}$ следующая:

- $\overline{V_E} = V_E$,
- $\overline{P_E} = P_E$,
- $\overline{R_i} = R_i$ для $1 \leq i \leq n$,
- $\overline{R_{n+1}} = P_E$,
- $\overline{\omega} = \omega$,
- $\overline{\Delta} = \Delta$.

Пусть слово $v \in L_{\geq n+1}(\Sigma,=n)$ и $|\omega| \geq n+1$, тогда в системе Σ имеется вывод:

$$\omega \Rightarrow_\Sigma v_1 \Rightarrow_\Sigma v_2 \Rightarrow_\Sigma \cdots \Rightarrow_\Sigma v_t = v.$$

Базис. Если длина вывода в системе Σ $t=0$, то $\omega = v_t = v$. По построению системы $\overline{\Sigma}$ ее начальная аксиома совпадает с начальной аксиомой системы Σ: $\overline{\omega} = \omega$. Тогда $\overline{\omega} = \omega = v_t = v$, и значит в $\overline{\Sigma}$ тоже существует вывод длины 0 слова v.

Индукционное предположение: пусть строка окружения после k-того шага эволюции системы Σ имеет следующий вид: $v_k = \beta_1 a_1 \beta_2 a_2 \ldots \beta_n a_n \beta_{n+1}$ ($\beta_i \in V_E^*$, $a_j \in V_E$, $1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n$) и совпадает при этом со строкой окружения $\overline{v_k}$, полученной после k шагов эволюции системы $\overline{\Sigma}$. Предполагаем, что $|v_k| \geq n+1$. Тогда найдется s ($1 \leq s \leq n+1$), такое что $\beta_s \neq \epsilon$, то есть $\beta_s = x\beta$ ($x \in V_E, \beta \in V_E^*$).

Индукционный шаг. Пусть на шаге $(k+1)$ агент R_{j_i} применяет правило $a_i \to b_{j_i}$ ($b_{j_i} \in V_E^+, 1 \leq i \leq n$, $R_{j_1}, \ldots, R_{j_n}$ - перестановка агентов). После этого среда воздействует на оставшиеся символы: $\beta_i \to \gamma_i$ (либо $\beta_i = \gamma_i = \epsilon$ либо $\beta_i \in V_E$ и $\gamma_i \in V_E^+, 1 \leq i \leq n+1$). Смоделируем этот шаг в системе $\overline{\Sigma}$ следующим образом. Если агент R_{j_i} применял правило $a_i \to b_{j_i}$ в системе Σ, то в системе $\overline{\Sigma}$ агент $\overline{R_{j_i}}$ будет применять соответствующее правило. Если $\beta_s = x\beta$ ($x \in V_E, \beta \in V_E^*$) и среда P_E применяла правило $x \to y$ ($y \in V_E^+$) на $(k+1)$-ом шаге эволюции системы Σ (то есть $\gamma_s = y\gamma$, $\beta \Rightarrow_E \gamma$, $\gamma \in V_E^*$, причем $\gamma = \epsilon \Leftrightarrow \beta = \epsilon$), то в системе $\overline{\Sigma}$ агент $\overline{R_{n+1}}$ применит правило $x \to y$. Потом среда $\overline{P_E}$ воздействует на оставшиеся символы. Очевидно, что:

$$\overline{v_{k+1}} = \gamma_1 b_{j_1} \gamma_2 \ldots y\gamma b_{j_s} \gamma_{s+1} \ldots \gamma_n b_{j_n} \gamma_{n+1} =$$
$$= \gamma_1 b_{j_1} \gamma_2 \ldots \gamma_s b_{j_s} \gamma_{s+1} \ldots \gamma_n b_{j_n} \gamma_{n+1} = v_{k+1}.$$

Причем $|\overline{v_{k+1}}| = |v_{k+1}| \geq n+1$, так как ϵ-правила не применялись.

Таким образом, по индукции, слово v выводимо в $\overline{\Sigma}$ и его длина не меньше $(n+1)$. Значит, $v \in L_{\geq n+1}(\overline{\Sigma}, = n+1)$. Отсюда $L_{\geq n+1}(\Sigma, = n) \subseteq L_{\geq n+1}(\overline{\Sigma}, = n+1)$.

Докажем включение в обратную сторону.

Пусть слово $v \in L_{\geq n+1}(\overline{\Sigma}, = n+1)$ и $|\overline{\omega}| \geq n+1$, тогда в системе $\overline{\Sigma}$ имеется вывод:

$$\overline{\omega} \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} v_1 \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} v_2 \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} \cdots \Rightarrow_{\overline{\Sigma}} v_t = v.$$

Базис. Если длина вывода в системе $\overline{\Sigma}$ $t = 0$, то $\overline{\omega} = v_t = v$. По построению системы $\overline{\Sigma}$ ее начальная аксиома совпадает с начальной аксиомой системы Σ: $\omega = \overline{\omega}$. Тогда $\omega = v_t = v$, и значит в Σ тоже существует вывод длины 0 слова v.

Индукционное предположение. Пусть строка окружения после k-того шага эволюции системы $\overline{\Sigma}$ имеет следующий вид:

$$v_k = \beta_1 a_1 \beta_2 a_2 \dots \beta_n a_n \beta_{n+1} a_{n+1} \beta_{n+2}$$

$(\beta_i \in V_E^*,\ a_j \in V_E,\ 1 \leq i \leq n+2, 1 \leq j \leq n+1)$ и совпадает при этом со строкой окружения, полученной после k шагов эволюции системы Σ. Предполагаем, что $|v_k| \geq n+1$.

Индукционный шаг. Пусть на шаге $(k+1)$ агент R_{j_i} применяет правило $a_i \rightarrow b_{j_i}$ $(b_{j_i} \in V_E^+, 1 \leq i \leq n+2,\ R_{j_1}, \dots, R_{j_{n+1}}$ - перестановка агентов). После этого среда воздействует на оставшиеся символы: $\beta_i \rightarrow \gamma_i$ $(\gamma_i \in V_E^+,\ 1 \leq i \leq n+2)$. Смоделируем этот шаг в системе Σ следующим образом. Если агент $\overline{R_{j_i}}$ $(1 \leq j_i \leq n)$ применял правило $a_i \rightarrow b_{j_i}$ в системе $\overline{\Sigma}$, то в системе Σ агент R_{j_i} применит соответствующее правило. Если агент $\overline{R_{n+1}}$ применял правило $a_s \rightarrow b_{n+1}$, то в системе Σ его роль сыграет среда, применив это правило. Остальные символы среда P_E заменит по тем же правилам, что и $\overline{P_E}$: $\beta_j \rightarrow \gamma_j$ $(1 \leq j \leq n+2)$. Получаем:

$$v_k = \gamma_1 b_{j_1} \gamma_2 \dots \gamma_{s-1} b_{j_{s-1}} \gamma_s b_{n+1} \gamma_{s+1} b_{j_{s+1}} \gamma_{s+2} \dots \gamma_n b_{j_n} \gamma_{n+1} =$$

$$= \gamma_1 b_{j_1} \gamma_2 \dots \gamma_{s-1} b_{j_{s-1}} \gamma'_s b_{j_{s+1}} \gamma_{s+1} \dots \gamma_n b_{j_n} \gamma_{n+1} = \overline{v_{k+1}},$$

где $\beta_s a_s \beta_{s+1} \Rightarrow_E \gamma_s b_{n+1} \gamma_{s+1} = \gamma'_s$ в среде P_E системы Σ.

Причем $|v_{k+1}| \geq n+1$, так как ϵ-правила не применялись.

Таким образом, по индукции, слово v выводимо в Σ и его длина не меньше $(n+1)$. Значит, $v \in L_{\geq n+1}(\Sigma, = n)$.

Отсюда $L_{\geq n+1}(\overline{\Sigma}, = n+1) \subseteq L_{\geq n+1}(\Sigma, = n)$.

Суммируя результаты, получаем, что $L_{\geq n+1}(\overline{\Sigma}, = n+1) = L_{\geq n+1}(\Sigma, = n)$, что и требовалось доказать. □

На основании теорем 3 и 4 получаем следующий результат для эко-грамматических систем без ϵ-правил:

Следствие 3. *Для* $n \geq 1$ $\mathcal{L}_{\geq n+1}(EE(n, = n)) = \mathcal{L}_{\geq n+1}(EE(n+1, = n+1))$.

Таким образом, приходим к выводу, что не только первый параметр n (теорема 2), но и второй параметр k (следствие 3) не имеет влияния на эволюцию расширенной простой эко-грамматической системы, работающей в командном режиме $(n, = k)$. Другими словами, увеличение числа агентов в системе (общего числа агентов либо числа работающих агентов) не приводит к увеличению выразительной силы соответствующего класса порождаемых языков:

Следствие 4. *Для* $1 \leq k \leq n$ $\mathcal{L}_{\geq k}(EE(n, = k)) = \mathcal{L}_{\geq k}(EE(1, = 1))$.

Суммируем все полученные результаты в виде диаграммы, в которой прямая стрелка показывает строгое включение: класс, из которого стрелка выходит, является подмножеством класса языков, на который стрелка указывает. Включение $\mathcal{L}(EE(1, = 1)) \subset \mathcal{L}(EE^{\epsilon}(1, = 1))$ очевидно, так как любой вывод в системе, не допускающей ϵ-правила, существует и в системе, где ϵ-правила допускаются.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(EE^{\epsilon}(1, = 1)) & = & \mathcal{L}(EE^{\epsilon}(n, = k)) \\ \uparrow & & \\ \mathcal{L}_{\geq k}(EE(1, = 1)) & = & \mathcal{L}_{\geq k}(EE(m, = l)) \end{array}$$

Пример 2. *Для эко-грамматической системы с тремя агентами, приведенной в примере 1, построим эквивалентную ESEG с четырьмя агентами.*

Строим $\Sigma^1 = ((V_E^1, P_E^1), R_1^1, R_2^1, R_3^1, R_4^1, \omega^1, \Delta^1)$ *следующим образом:*

- $V_E^1 = \{A, B, C, a, b, c\}$;
- $P_E^1 = \{A \to a, B \to b, C \to c, a \to a, b \to b, c \to c\}$;
- $R_1^1 = \{A \to A^2, A \to a\}$;
- $R_2^1 = \{B \to B^2, B \to b\}$;
- $R_3^1 = \{C \to C^2, C \to c\}$;
- $R_4^1 = \{A \to a, B \to b, C \to c, a \to a, b \to b, c \to c\}$;
- $\omega^1 = ABC$,
- $\Delta^1 = \{a, b, c\}$.

Эта система порождает тот же язык, что и исходная система примера 1: $L(\Sigma) = \{a^n b^n c^n | \, n \geq 1\}$.

3. Свойства замкнутости для класса языков, порождаемых расширенными простыми эко-грамматическими системами. В этом разделе мы установим замкнутость класса языков $\mathcal{L}(EE)$, порождаемых расширенными простыми эко-грамматическими системами, относительно операций конкатенации, объединения, итерации и гомоморфизмов. Положим

$$\mathcal{L}(EE) = \{L \,|\, L \subseteq \Delta^*, \text{ существует ESEG } \Sigma = ((V_E, P_E), R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta),$$

$$\text{такая что } L = L(\Sigma)\}.$$

Рассмотрим n-местную операцию $f : L_1, \ldots, L_n \mapsto L$.

Определение 11. *Класс языков* $\mathcal{L}$ *замкнут относительно операции* $f^{(n)}$ *тогда и только тогда, когда из того, что языки* $L_1, \ldots, L_n$ *лежат в этом классе* ($L_1, \ldots, L_n \in \mathcal{L}$)*, следует, что результат операции тоже лежит в этом классе* ($f(L_1, \ldots, L_n) \in \mathcal{L}$)*.*

Теорема 5. *Класс языков* $\mathcal{L}(EE)$ *замкнут относительно операции объединения.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 - языки, порождаемые расширенными простыми эко-грамматическими системами $\Sigma_1 = ((V_E^1, P_E^1), R_1^1, \ldots, R_{n_1}^1, \omega^1, \Delta^1)$ и $\Sigma_2 = ((V_E^2, P_E^2), R_1^2, \ldots, R_{n_1}^2, \omega^2, \Delta^2)$ соответственно, то есть $L(\Sigma_1) = L_1$ и $L(\Sigma_2) = L_2$.

Рассмотрим язык $L_1 \cup L_2$, являющийся объединением языков L_1 и L_2. Докажем, что он тоже принадлежит классу $\mathcal{L}(EE)$, то есть существует расширенная простая эко-грамматическая система, которая распознает этот язык.

Введем обозначения:

- множество нетерминалов $N_1 = V_E^1 \setminus \Delta^1$, $N_2 = V_E^2 \setminus \Delta^2$;
- $w' = \alpha_1' x_1 \alpha_2' \ldots \alpha_r' x_r \alpha_{r+1}'$, $\alpha_i' = a_{i_1}' \ldots a_{i_{l_i}}'$ если:
  $w = \alpha_1 x_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r x_r \alpha_{r+1}$,
  $\alpha_i \in N_1^*$, $\alpha_i = a_{i_1} \ldots a_{i_{l_i}}$, $a_{i_s} \in N_1$,
  $x_j \in \Delta^1$;
- $w'' = \alpha_1'' x_1 \alpha_2'' \ldots \alpha_r'' x_r \alpha_{r+1}''$, $\alpha_i'' = a_{i_1}'' \ldots a_{i_{l_i}}''$ если:
  $w = \alpha_1 x_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r x_r \alpha_{r+1}$,
  $\alpha_i \in N_2^*$, $\alpha_i = a_{i_1} \ldots a_{i_{l_i}}$, $a_{i_s} \in N_2$,
  $x_j \in \Delta^2$.

Построим ESEG $\Sigma = ((V_E, P_E), R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta)$ следующим образом:

- $V_E = N_1' \cup N_2'' \cup \Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \{T, T_1, \ldots, T_n\}$, где:
  $T, T_1, \ldots, T_n \notin V_E^1 \cup V_E^2$,
  $N_1' = \{N' \mid N \in N_1\}$, $N_2'' = \{N'' \mid N \in N_2\}$;
- $P_E = P_E^{1\prime} \cup P_E^{2\prime\prime} \cup \{T \to \omega^{1\prime}\} \cup \{T \to \omega^{2\prime\prime}\} \cup \{T_i \to \epsilon \mid 1 \le i \le n\}$, где:
  $P_E^{1\prime} = \{A' \to v' \mid A \to v \in P_E^1\}$;
  $P_E^{2\prime\prime} = \{A'' \to v'' \mid A \to v \in P_E^2\}$;
- $n = max\{n_1, n_2\}$;
- Пусть $m = min\{n_1, n_2\}$. $R_i = \{T_i \to \epsilon\} \cup R_i^{1\prime} \cup R_i^{2\prime\prime}$ для $1 \le i \le m$, где:
  $R_i^{1\prime} = \{A' \to v' \mid A \to v \in R_i^1\}$; $R_i^{2\prime\prime} = \{A'' \to v'' \mid A \to v \in R_i^2\}$;
- $R_i = \{T_i \to \epsilon\} \cup R_i^{1\prime}$ для $m + 1 \le i \le n$, если $m = n_1$;
- $R_i = \{T_i \to \epsilon\} \cup R_i^{2\prime\prime}$ для $m + 1 \le i \le n$, если $m = n_2$;
- $\omega = TT_1 \ldots T_n$;
- $\Delta = \Delta^1 \cup \Delta^2$.

Докажем, что $L_1 \cup L_2 \subseteq L = L(\Sigma)$. Пусть $w \in L_1 \cup L_2$. Значит $w \in L_1$ или (и) $w \in L_2$. Без ограничения общности будем считать, что $w \in L_1$.

В Σ существует вывод: $\omega = TT_1 \ldots T_n \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma \omega^{1\prime}$ (каждый агент R_i применяет правило $T_i \to \epsilon$, $1 \le i \le n_1$, среда применяет правила $T \to \omega^{1\prime}$ и $T_j \to \epsilon$ для $n_1 + 1 \le j \le n$).

Если $w \in L_1$, то в системе Σ_1 имеется вывод $\omega^1 \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w$. Докажем индукцией по t, что тогда в системе Σ имеется вывод $\omega^{1\prime} \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma w$.

Базис. $t = 0$. $\omega^1 = w$. Значит, $\omega^{1'} = \omega^1 = w$ (все буквы - терминалы, а у терминалов штрихи не ставим - см. обозначение). Поэтому $\omega \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma \omega^{1'} \overset{0}{\Rightarrow}_\Sigma w$. То есть $w \in L$.

Индукционный шаг. Пусть $\omega^1 \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} v \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w$.

Так как $\omega^1 \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} v$, то $\omega^1 = z_1x_1z_2\dots z_{n_1}x_{n_1}z_{n_1+1}$,
$v = Z_1X_1Z_2\dots Z_{n_1}X_{n_1}Z_{n_1+1}$, и существует перестановка агентов $R^1_{i_1},\dots,R^1_{i_{n_1}}$, такая что $x_j \to X_j \in R^1_{i_j}$ для $1 \le j \le n_1$, $z_j \to Z_j \in P^1_E$ для $1 \le j \le n_1+1$.

$\omega^{1'} = z'_1x'_1z'_2\dots z'_{n_1}x'_{n_1}z'_{n_1+1}$, $v' = Z'_1X'_1Z'_2\dots Z'_{n_1}X'_{n_1}Z'_{n_1+1}$. Понятно, что существует перестановка агентов $R_{i_1},\dots,R_{i_{n_1}}$, такая что $x'_j \to X'_j \in R_{i_j}$ для $1 \le j \le n_1$, $z'_j \to Z'_j \in P_E$ для $1 \le j \le n_1+1$ (по построению системы). Значит, по определению, $\omega^{1'} \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma v'$.

По индукционному предположению, в системе Σ имеется вывод $v' \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma w$.

Следовательно, $\omega^{1'} \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma v' \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma w$. Значит, $\omega^{1'} \overset{t+1}{\Rightarrow}_\Sigma w$.

Итак, получаем, что в системе Σ существует вывод $\omega \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma \omega^{1'} \overset{t+1}{\Rightarrow}_\Sigma w$. То есть $w \in L$.

Теперь докажем, что $L \subseteq L_1 \cup L_2$.

Пусть $w \in L$. Значит в Σ существует вывод $\omega \overset{t}{\Rightarrow} w$. Пусть $\omega \overset{1}{\Rightarrow} v \overset{t-1}{\Rightarrow} w$

$\omega = TT_1\dots T_n$. На первый символ может подействовать только среда (у агентов нет правил для нетерминала T). Если среда применит правило $T \to \omega^{1'}$, то $v = \omega^{1'}$; если она применит правило $T \to \omega^{2'}$, то $v = \omega^{2'}$ (остальные символы T_i будут заменены агентами и средой на ϵ).

Докажем, что если $\omega^{1'} \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma w$, то существует вывод и в системе Σ_1: $\omega^1 \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w$.

Базис. $t = 0$. $\omega^{1'} = w$. Значит, $\omega^1 = \omega^{1'} = w$. Поэтому $\omega^1 \overset{0}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w$. То есть $w \in L_1$.

Индукционный шаг. Пусть $\omega^{1'} \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma v' \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma w$.

Так как $\omega^{1'} \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma v'$, то $\omega^{1'} = z'_1x'_1z'_2\dots z'_{n_1}x'_{n_1}z'_{n_1+1}$,
$v = Z'_1X'_1Z'_2\dots Z'_{n_1}X'_{n_1}Z'_{n_1+1}$, и существует перестановка агентов $R_{i_1},\dots,R_{i_{n_1}}$, такая что $x'_j \to X'_j \in R_{i_j}$ для $1 \le j \le n_1$, $z'_j \to Z'_j \in P_E$ для $1 \le j \le n_1+1$.

$\omega^1 = z_1x_1z_2\dots z_{n_1}x_{n_1}z_{n_1+1}$, $v = Z_1X_1Z_2\dots Z_{n_1}X_{n_1}Z_{n_1+1}$. Понятно, что в системе Σ_1 существует перестановка агентов $R^1_{i_1},\dots,R^1_{i_{n_1}}$, такая что
$x_j \to X_j \in R^1_{i_j}$ для $1 \le j \le n_1$, $z_j \to Z_j \in P^1_E$ для $1 \le j \le n_1+1$ (по построению системы). Значит, по определению, $\omega^1 \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} v$.

По индукционному предположению, в системе Σ_1 имеется вывод
$v \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w$.

Следовательно, $\omega^1 \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} v \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w$. Значит, $\omega^1 \overset{t+1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w$. То есть $w \in L_1$.

Если же $v = \omega^{2'}$, $\omega^{2'} \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma w$, то по аналогии доказывается, что существует вывод и в системе Σ_2: $\omega^2 \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} w$. То есть $w \in L_2$.

Итак, $w \in L_1$ или (и) $w \in L_2$. Значит, $w \in L_1 \cup L_2$.

$L_1 \cup L_2 \subseteq L, L \subseteq L_1 \cup L_2 \Rightarrow L = L_1 \cup L_2$. □

Теорема 6. *Класс языков $\mathcal{L}(EE)$ замкнут относительно операции конкатенации.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 - языки, порождаемые расширенными простыми эко-грамматическими системами $\Sigma_1 = ((V_E^1, P_E^1), R_1^1, \ldots, R_{n_1}^1, \omega^1, \Delta^1)$ $(|\omega^1| \geq n_1)$ и $\Sigma_2 = ((V_E^2, P_E^2), R_1^2, \ldots, R_{n_2}^2, \omega^2, \Delta^2)$ $(|\omega^2| \geq n_2)$ соответственно, то есть $L(\Sigma_1) = L_1$ и $L(\Sigma_2) = L_2$.

Рассмотрим язык L_1L_2, являющийся конкатенацией языков L_1 и L_2. Докажем, что он тоже принадлежит классу $\mathcal{L}(EE)$, то есть существует расширенная простая эко-грамматическая система, которая распознает этот язык.

Введем обозначения:

- множество нетерминалов $N_1 = V_E^1 \setminus \Delta^1$, $N_2 = V_E^2 \setminus \Delta^2$;
- $w' = \alpha_1' x_1 \alpha_2' \ldots \alpha_r' x_r \alpha_{r+1}'$, $\alpha_i' = a_{i_1}' \ldots a_{i_{l_i}}'$ если:
  $w = \alpha_1 x_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r x_r \alpha_{r+1}$,
  $\alpha_i \in N_1^*$, $\alpha_i = a_{i_1} \ldots a_{i_{l_i}}$, $a_{i_s} \in N_1$,
  $x_j \in \Delta^1$;
- $w'' = \alpha_1'' x_1 \alpha_2'' \ldots \alpha_r'' x_r \alpha_{r+1}''$, $\alpha_i'' = a_{i_1}'' \ldots a_{i_{l_i}}''$ если:
  $w = \alpha_1 x_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r x_r \alpha_{r+1}$,
  $\alpha_i \in N_2^*$, $\alpha_i = a_{i_1} \ldots a_{i_{l_i}}$, $a_{i_s} \in N_2$,
  $x_j \in \Delta^2$.

Построим ESEG $\Sigma = ((V_E, P_E), R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta)$ следующим образом:

- $V_E = N_1' \cup N_2'' \cup \Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \{T_i | T_i \notin V_E^1 \cup V_E^2,$ для $1 \leq i \leq n_1\} \cup$
  $\cup \{S_i | S_i \notin V_E^1 \cup V_E^2,$ для $1 \leq i \leq n_2\} \cup \{K, D | K, D \notin V_E^1 \cup V_E^2\}$, где:
  $N_1' = \{N' | N \in N_1\}$, $N_2'' = \{N'' | N \in N_2\}$;
- $P_E = (P_E', P_E'')$, где:
  $P_E' = P_E^{1'} \cup \{K \to K\}$,
  $P_E'' = P_E^{1*} \cup P_E^{2''} \cup \{K \to \omega^{2''} T_1 \ldots T_{n_1} | \omega^{2''}\} \cup \{S_i \to \epsilon\} \cup \{D \to D\}$,
  $P_E^{1*} = \{A' \to D | A \to \alpha \in P_E^1\}$,
  $P_E^{1'} = \{A' \to v' | A \to v \in P_E^1\}$,
  $P_E^{2''} = \{A'' \to v'' | A \to v \in P_E^2\}$;
- $R_i = R_i^{1'} \cup \{T_i \to T_i | \epsilon\}$ для $1 \leq i \leq n_1$, где:
  $R_i^{1'} = \{A' \to v' | A \to v \in R_i^1\}$;
- $R_{n_1+i} = R_i^{2''} \cup \{S_i \to S_i | \epsilon\}$ для $1 \leq i \leq n_2$, где:
  $R_i^{2''} = \{A'' \to v'' | A \to v \in R_i^2\}$;
- $\omega = \omega^{1'} K S_1 \ldots S_{n_2}$;
- $\Delta = \Delta^1 \cup \Delta^2$.

Пусть слово $w \in L_1L_2$. Следовательно, оно представляется в виде $w = uv$, $u \in L_1$, $v \in L_2$. Докажем, что $w \in L = L(\Sigma)$ (тем самым докажем, что $L_1L_2 \subseteq L$).

$u \in L_1$, поэтому в системе Σ_1 имеется вывод $\omega^1 \overset{s}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} u$.

$v \in L_2$, поэтому в системе Σ_2 имеется вывод $\omega^2 \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} v$.

Индукцией по s нетрудно доказать, что в системе Σ существует вывод $\omega = \omega^{1'} K S_1 \ldots S_{n_2} \overset{s}{\Rightarrow}_{\Sigma} u K S_1 \ldots S_{n_2}$. (среда не может применить к символу K правило

$K \to \omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1}$ до того, как будет выведено терминальное слово u, так как в противном случае ко всем нетерминалам из первой части слова будет применено правило, выводящее блокирующий эволюцию символ D).

После того, как выведено слово $uKS_1 \dots S_{n_2}$, агенты применяют правила $S_i \to \epsilon$ $(1 \le i \le n_2)$, а среда может применить только правило
$K \to \omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1}$. Таким образом, $uKS_1 \dots S_{n_2} \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma u\omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1}$.

Далее, также по индукции нетрудно доказать, что в системе Σ существует вывод $u\omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1} \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma uv$. (среда применяет правила из множества $P_E^{2''}$, агенты $R_1, \dots, R_{n_1}$ применяют правила $T_i \to T_i$ и $T_i \to \epsilon$ на последнем шаге эволюции, агенты $R_{n_1+1}, \dots, R_{n_1+n_2}$ – правила из соответствующих подмножеств $R_i^{2''}$).

Таким образом, в системе Σ существует вывод:

$$\omega = \omega^{1'} KS_1 \dots S_{n_2} \overset{s}{\Rightarrow}_\Sigma uKS_1 \dots S_{n_2} \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma u\omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1} \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma uv.$$

Значит, $w = uv \in L$.

Пусть теперь слово w выводится в системе Σ $(w \in L)$. Докажем, что оно является конкатенацией слова из языка L_1 и слова из языка L_2 (тем самым докажем, что $L \subseteq L_1 L_2$).

Существует вывод $\omega \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma w$, $w \in \Delta^* = (\Delta^1 \cup \Delta^2)^*$.

Начальное слово строки окружения имеет вид $\omega = \omega^{1'} KS_1 \dots S_{n_2}$. Символ K мог быть удален из строки окружения только в результате применения правила $K \to \omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1}$. Но это правило могло быть успешно применено только, если подслово, выведенное из $\omega^{1'}$ к тому моменту, состояло из одних терминалов (если бы в нем были нетерминалы, то они были бы заменены на блокирующий эволюцию символ D).

Пусть правило $K \to \omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1}$ было применено на $(s+1)$-ом шаге эволюции. Ясно, что символы T_i не могли появиться в строке окружения до $(s+1)$-ого шага (по построению системы), а символы S_j не могли исчезнуть раньше $(s+1)$-ого шага (в противном случае не все агенты смогли бы работать на следующих шагах).

Докажем по индукции, что если $\omega = \omega^{1'} KS_1 \dots S_{n_2} \overset{s}{\Rightarrow}_\Sigma uKS_1 \dots S_{n_2}$, где $u \in \Delta^*$, то в системе Σ_1 существует вывод $\omega^1 \overset{s}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} u$.

Базис. $s = 0$. $\omega^{1'} KS_1 \dots S_{n_2} = uKS_1 \dots S_{n_2}$. Значит, $\omega^{1'} = u$. По построению $\omega^{1'}$ понятно, что $u \in \Delta^{1*}$. $\omega^1 = \omega^{1'} = u$. Значит, в системе Σ_1 существует вывод $\omega^1 \overset{0}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} u$.

Индукционный шаг. Пусть в системе Σ существует вывод:

$$\omega = \omega^{1'} KS_1 \dots S_{n_2} \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma u_1 KS_1 \dots S_{n_2} \overset{s}{\Rightarrow}_\Sigma uKS_1 \dots S_{n_2}.$$

Так как $\omega^{1'} KS_1 \dots S_{n_2} \overset{1}{\Rightarrow}_\Sigma u_1 KS_1 \dots S_{n_2}$, то:

$$\omega^{1'} KS_1 \dots S_{n_2} = z'_1 x'_1 z'_2 \dots z'_{n_1} x'_{n_1} z'_{n_1+1} KS_1 \dots S_{n_2},$$

$$u_1 KS_1 \dots S_{n_2} = Z'_1 X'_1 Z'_2 \dots Z'_{n_1} X'_{n_1} Z'_{n_1+1} KS_1 \dots S_{n_2},$$

и существует перестановка агентов $R_{i_1}, \dots, R_{i_{n_1}}, R_{n_1+1}, \dots, R_{n_1+n_2}$, такая что
$x'_j \to X'_j \in R_{i_j}$ для $1 \le j \le n_1$, $z'_j \to Z'_j \in P_E$ для $1 \le j \le n_1 + 1$, $S_l \to S_l \in$

R_{n_1+l} (если бы некоторыми агентами были применены правила вида $S_l \to \epsilon$, то на следующем шаге они не смогли бы работать), $K \to K \in P_E$.

$\omega^1 = z_1 x_1 z_2 \dots z_{n_1} x_{n_1} z_{n_1+1}$, $u_1 = Z_1 X_1 Z_2 \dots Z_{n_1} X_{n_1} Z_{n_1+1}$. Понятно, что в системе Σ_1 существует перестановка агентов $R^1_{i_1}, \dots, R^1_{i_{n_1}}$, такая что
$x_j \to X_j \in R^1_{i_j}$ для $1 \leq j \leq n_1$, $z_j \to Z_j \in P^1_E$ для $1 \leq j \leq n_1 + 1$ (по построению системы). Значит, по определению, $\omega^1 \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} u_1$.

По индукционному предположению, в системе Σ_1 имеется вывод
$u_1 \overset{s}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} u$.

Следовательно, $\omega^1 \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} u_1 \overset{s}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} u$. Значит, $\omega^1 \overset{s+1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} u$. То есть $u \in L_1$.

Рассмотрим теперь вторую часть вывода: $uKS_1 \dots S_{n_2} \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma} u_1 \overset{t-s-1}{\Rightarrow}_{\Sigma} w$. К символу K применяется правило $K \to \omega^{2''}$ (если слово $\omega^{2''}$ – терминальное) либо $K \to \omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1}$ (как было показано выше). Агенты $R_{n_1+1}, \dots, R_{n_1+n_2}$ применяют правила вида $S_i \to \epsilon$.

Таким образом, $u_1 = u\omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1}$ либо $u_1 = u\omega^{2''}$.

Теперь по индукции докажем, что если $u_1 = \overset{t-s-1}{\Rightarrow}_{\Sigma} uv$, где $u, v \in \Delta^*$, то в системе Σ_2 существует вывод $\omega^2 \overset{t-s-1}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} v$. Обозначим $q = t - s - 1$.

Базис. $q = 0$. $u_1 = uv$. Значит, $u_1 = u\omega^{2''}$, $\omega^{2''} = v$. По построению $\omega^{2''}$ понятно, что $v \in \Delta^{2*}$. $\omega^2 = \omega^{2''} = v$. Значит, в системе Σ_2 существует вывод $\omega^2 \overset{0}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} v$.

Индукционный шаг. Пусть в системе Σ существует вывод:

$$u\omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1} \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma} uv_1 T_1 \dots T_{n_1} \overset{q-1}{\Rightarrow}_{\Sigma} uv_1 T_1 \dots T_{n_1}.$$

Так как $u\omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1} \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma} uv_1 T_1 \dots T_{n_1}$, то:

$$u\omega^{2''} T_1 \dots T_{n_1} = uz'_1 x'_1 z'_2 \dots z'_{n_2} x'_{n_2} z'_{n_2+1} T_1 \dots T_{n_1},$$

$$uv_1 T_1 \dots T_{n_1} = uZ'_1 X'_1 Z'_2 \dots Z'_{n_2} X'_{n_2} Z'_{n_2+1} T_1 \dots T_{n_1},$$

и существует перестановка агентов $R_1, \dots, R_{n_1}, R_{n_1+i_1}, \dots, R_{n_1+i_{n_2}}$, такая что $x'_j \to X'_j \in R_{n_1+i_j}$ для $1 \leq j \leq n_2$, $z'_j \to Z'_j \in P_E$ для $1 \leq j \leq n_2 + 1$, $T_l \to T_l \in R_l$ (если бы некоторыми агентами были применены правила вида $T_l \to \epsilon$, то на следующем шаге они не смогли бы работать).

$\omega^2 = z_1 x_1 z_2 \dots z_{n_2} x_{n_2} z_{n_2+1}$, $v_1 = Z_1 X_1 Z_2 \dots Z_{n_2} X_{n_2} Z_{n_2+1}$. Понятно, что в системе Σ_2 существует перестановка агентов $R^2_{i_1}, \dots, R^2_{i_{n_2}}$, такая что
$x_j \to X_j \in R^2_{i_j}$ для $1 \leq j \leq n_2$, $z_j \to Z_j \in P^2_E$ для $1 \leq j \leq n_2 + 1$ (по построению системы). Значит, по определению, $\omega^2 \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} v_1$.

По индукционному предположению, в системе Σ_2 имеется вывод
$v_1 \overset{q-1}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} v$.

Следовательно, $\omega^2 \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} v_1 \overset{q-1}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} v$. Значит, $\omega^2 \overset{q}{\Rightarrow}_{\Sigma_2} v$. То есть $v \in L_2$.

Итак, $u \in L_1$, $v \in L_2$, значит $w = uv$ является конкатенацией слова языка L_1 и слова языка L_2.

$L_1 L_2 \subseteq L, L \subseteq L_1 L_2 \Rightarrow L = L_1 L_2$. □

Теорема 7. *Класс языков $\mathcal{L}(EE)$ замкнут относительно итерации.*

Доказательство. Пусть L_1 - язык, порождаемый расширенной простой экограмматической системой $\Sigma_1 = ((V_E^1, P_E^1), R_1^1, \ldots, R_n^1, \omega^1, \Delta^1)$, то есть
$L(\Sigma_1) = L_1$.

Рассмотрим язык L_1^*, являющийся итерацией языка L_1. Докажем, что он тоже принадлежит классу $\mathcal{L}(EE)$, то есть существует расширенная простая экограмматическая система, которая распознает этот язык.

Построим ESEG $\Sigma = ((V_E, P_E), R_1, \ldots, R_n, \omega, \Delta)$ следующим образом:

- $V_E = V_E^1 \cup \{K, T, T_1, \ldots, T_n\}$, где $K, T, T_1, \ldots, T_n \notin V_E^1$;
- $P_E = (P_E', P_E'')$, где:
  $P_E' = P_E^1 \cup \{T \to T\}$;
  $P_E'' = P_E^{1\prime} \cup \{\omega^1 T | \epsilon, K \to K\}$, где $P_E^{1\prime} = \{A \to K \mid A \to \alpha \in P_E^1\}$;
- $R_i = R_i \cup \{T_i \to \epsilon\}$ для $1 \leq i \leq n$;
- $\omega = T_1 \ldots T_n T$;
- $\Delta = \Delta^1$.

Докажем, что $L_1^* \subseteq L = L(\Sigma)$. Пусть $w \in L_1^*$. Значит w можно разбить на несколько слов, каждое из которых является словом языка L_1: $w = w_1 \ldots w_r$ ($w_i \in L_1, 1 \leq i \leq r$), либо $w = \epsilon$.

Если $w = \epsilon$, то в системе Σ существует вывод $\omega = T_1 \ldots T_n T \stackrel{1}{\Rightarrow}_\Sigma \epsilon$ (сначала каждый агент R_i применит правило $T_i \to \epsilon$ для $1 \leq i \leq n$, затем среда применяет правило $T \to \epsilon$).

Если $w = w_1 \ldots w_r$, то в системе Σ существует вывод:

$$\omega = T_1 \ldots T_n T \stackrel{1}{\Rightarrow}_\Sigma \omega^1 T \stackrel{t_1}{\Rightarrow}_\Sigma w_1 \omega^1 T \stackrel{t_2}{\Rightarrow}_\Sigma w_1 w_2 \omega^1 T \Rightarrow_\Sigma \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow_\Sigma w_1 w_2 \ldots w_{r-1} \omega^1 T \stackrel{t_r}{\Rightarrow}_\Sigma w_1 w_2 \ldots w_{r-1} w_r.$$

(Так как $\omega^1 \Rightarrow_{\Sigma_1} w_i$ для всех $1 \leq i \leq r$.)

Значит, слово $w \in L$. Значит, $L_1^* \subseteq L$.

Докажем включение в обратную сторону. Пусть $w \in L$. Тогда существует вывод в системе Σ: $\omega \Rightarrow_\Sigma w$. Понятно, что на первом шаге эволюции все агенты применяют правила вида $T_i \to \epsilon$, а среда применяет правило к нетерминалу T: $T \to \omega^1 T$ (нельзя применить правило $T \to \epsilon$, так как тогда эволюция остановится, и слово w не будет выведено).

Индукцией по r докажем, что $w = w_1 \ldots w_r$, $\omega^1 \Rightarrow_{\Sigma_1} w_i$ для каждого $1 \leq i \leq r$.

Базис. $r = 1$. $w = w_1$. В Σ существует вывод $\omega \stackrel{1}{\Rightarrow}_\Sigma \omega^1 T \stackrel{t_1}{\Rightarrow}_\Sigma w_1 = w$. Символ T мог быть убран из строки окружения только в результате применения средой правила $T \to \epsilon$, а это правило могло быть применено средой только в случае, если $w_1 \in \Delta^*$ (так как, если бы в этом слове были нетерминалы, то они были бы заменены средой на блокирующий эволюцию симол K). Так как правила агентов и среды в системе Σ дублируют правила агентов и среды системы Σ_1 (по построению Σ), то в системе Σ_1 тоже существует вывод $\omega^1 \stackrel{t_1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w_1 = w$, и $w \in L_1^1$, так как $w_1 \in {\Delta^1}^*$.

Индукционный шаг. Пусть в Σ имеется вывод слова $w = w_1 v = w_1 w_2 \ldots w_r$.

В Σ существует вывод $\omega \overset{1}{\Rightarrow}_{\Sigma} \omega^1 T \overset{t_1}{\Rightarrow}_{\Sigma} u \Rightarrow_{\Sigma} w_1 v = w$, причем $u = w_1\omega^1 T$ (так как перед окончанием t_1-ого шага среда может применить к нетерминалу T только правило $T \to \omega^1 T$, иначе остальные подслова не будут выведены), а значит $w_1 \in \Delta^*$. По индукционному предположению, $v \in L_1^{r-1}$ и $\omega^1 \Rightarrow_{\Sigma_1} w_i$ для каждого $2 \le i \le r$.

Так как правила агентов и среды в системе Σ дублируют правила агентов и среды системы Σ_1 (по построению Σ), то в системе Σ_1 существует вывод $\omega^1 \overset{t_1}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} w_1 = w$, и $w \in L_1^1$, так как $w_1 \in {\Delta^1}^*$.

Итак, $w = w_1 \dots w_r$, $\omega^1 \Rightarrow_{\Sigma_1} w_i$, $w_i \in L_1$ для всех $1 \le i \le r$. Поэтому $w \in L_1^*$.

$L_1^* \subseteq L, L \subseteq L_1^* \Rightarrow L = L_1^*$. $\square$

Теорема 8. *Класс языков $\mathcal{L}(EE)$ замкнут относительно гомоморфизмов.*

Доказательство. Пусть L_1 - язык, порождаемый расширенной простой эко-грамматической системой $\Sigma_1 = ((V_E^1, P_E^1), R_1^1, \dots, R_n^1, \omega^1, \Delta^1)$, то есть $L(\Sigma_1) = L_1$.

Пусть $\phi : {\Delta^1}^* \to {\Delta^2}^*$ - горморфизм в некоторый алфавит Δ^2.

Рассмотрим язык $\phi(L_1)$. Докажем, что он тоже принадлежит классу $\mathcal{L}(EE)$, то есть существует расширенная простая эко-грамматическая система, которая распознает этот язык.

Введем обозначения:

- множество нетерминалов $N_1 = V_E^1 \setminus \Delta^1$;
- $w' = \alpha_1\phi(x_1)\alpha_2 \dots \alpha_r\phi(x_r)\alpha_{r+1}$, если:
  $w = \alpha_1 x_1 \alpha_2 \dots \alpha_r x_r \alpha_{r+1}$, $\alpha_i \in N_1^*$, $x_j \in \Delta^1$;

Построим ESEG $\Sigma = ((V_E, P_E), R_1, \dots, R_n, \omega, \Delta)$ следующим образом:

- $V_E = V_E^1 \cup \Delta^2$;
- $P_E = {P_E^1}'$, где: ${P_E^1}' = \{A \to \alpha' \mid A \to \alpha \in P_E^1\}$;
- $R_i = R_i'$, где: $R_i' = \{A \to \alpha' \mid A \to \alpha \in R_i\}$;
- $\omega = \omega^1$;
- $\Delta = \Delta^2$.

Докажем, что $\phi(L_1) \subseteq L = L(\Sigma)$. Пусть $w \in \phi(L_1)$: $v \in L_1$, $\phi(v) = w$. Так как $v \in L_1$, то существует вывод в Σ_1 $\omega^1 \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} v$.

Так как $\omega = \omega_1$, а все правила агентов и среды в системе Σ повторяют правила соответствующих агентов и среды в системе Σ_1, то в системе Σ существует вывод $\omega = \omega^1 \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma} v'$ (это нетрудно доказать по индукции). Слово v в системе Σ_1 является терминальным ($v \in \Delta^1$), в системе Σ слово v' тоже является терминальным ($v' \in \Delta^2$). Причем $v' = \phi(v) = w$.

Значит, $w \in L$. Значит, $\phi(L_1) \subseteq L$.

Докажем включение в обратную сторону. Пусть $w \in L$. Тогда существует вывод в системе Σ: $\omega \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma} w$.

Так как $w \in \Delta^{2^*}$, и среди правил, содержащих терминалы из этого алфавита в правой части, имеются только правила вида $A \to \alpha'$, то в системе Σ^1 к соответствующим нетерминалам могли быть применены правила вида $A \to \alpha$. По индукции можно доказать, что если $\omega \overset{t}{\Rightarrow}_\Sigma w = v'$, то в системе Σ_1 существует вывод $\omega^1 \overset{t}{\Rightarrow}_{\Sigma_1} v$ $(v \in \Delta^1)$. Значит, $v \in L_1$ и $w \in \phi(L_1)$.

$\phi(L_1) \subseteq L, L \subseteq \phi(L_1) \Rightarrow L = \phi(L_1)$. □

Заключение. В работе исследованы расширенные простые эко-грамматические системы и выразительная сила порождаемых ими языков. Доказано, что для любой ESEG можно построить эквивалентную ей ESEG, работающую без перестановок агентов. Для систем, не разрешающих ϵ-правил, доказано отсутствие иерархии по числу агентов для языков, содержащих достаточно длинные слова. Установлена замкнутость класса языков, порождаемых расширенными простыми эко-грамматическими системами, относительно операций конкатенации, объединения, итерации и гомоморфизмов.

Автор благодарен М.И. Дехтярю за постановку задач и полезное обсуждение работы.

Список литературы

[1] J. Csima. Formal language theoretical models of ecosystems. Master's thesis, Eötvös Loránd University, Budapest, Hungary, 1997.

[2] J. Csima. On extended simple eco-grammar systems. Acta Cybernetica 13(4), 1998.

[3] J. Csima, E. Csuhaj-Varjú. Investigations on Simple Eco-Grammar Systems. Budapest University of Technology and Economics, Department of Computer Science and Information Theory, Budapest, 2002.

[4] E. Csuhaj-Varjú, J. Kelemen, A. Kelemenová, and Gh. Păun. Eco-Grammar Systems: A Grammatical Framework for Studying Lifelike Interactions. Artificial Life, 3:1-28, 1997.

[5] E. Csuhaj-Varjú, A. Kelemenová. Team behaviour in eco-grammar systems. Theoretical Computer Science 209:1-2, 1998.

[6] J. Dassow, V. Mihalache. Eco-grammar systems, matrix grammars and $E0L$ systems. In Gh. Păun (Ed.), Artificial Life: grammatical models. Black Sea University Press, Bucharest, 1995.

[7] A. Lindenmayer. Developmental systems and languages in their biological context. In Developmental systems and languages, North-Holland Publ. Co., 1-40, 1975. Русск. пер.: в Кибернетический сб. (новая серия), 17, 1980.

[8] ter Beek, M. H. Simple eco-grammar systems with prescribed teams. In Gh. Păun and A. Salomaa (Eds.), Grammatical Models of Multi-Agent Systems. Gordon and Breach, London, 1999.