

УДК 51-78 : 781

ГАРМОНИЯ МАТЕМАТИКИ И МУЗЫКИ В КОНТЕКСТЕ СИНТЕЗА ИСКУССТВА И НАУКИ

И.А. Аругтюнян, С.Ю. Щербакова

Тверской государственной университет

Исследованы взаимосвязь и взаимовлияние математики и музыки на различных этапах эволюции научных идей и их трактовка с точки зрения математических теорий и теории музыки.

Ключевые слова: история математики, история и теория музыки, синтез науки и искусства.

Раздумывая об искусстве и науке, об их взаимных связях и противоречиях, я пришел к выводу, что математика и музыка находятся на крайних полюсах человеческого духа, что этими двумя антиподами ограничивается и определяется вся творческая духовная деятельность человека и что между ними размещается все, что человечество создало в области науки и искусства.

Г. Нейгауз

Математика всегда была неотъемлемой частью общечеловеческой культуры наряду с медициной, естествознанием, правом, искусством и многим другим. Немецкий математик Г. Вейль писал: «Подобно мифам, языку и музыке, математизация принадлежит к числу первичных видов человеческой деятельности, в которых бурлит глубочайшая человечность, живет стремление к созиданию форм духа и выражается мировая гармония» [2, с. 258].

Одним из самых первых памятников мировой культуры можно считать многие теоремы геометрии. Именно поэтому знание истории развития человеческой мысли с необходимостью включает в себя и определенные знания по геометрии. В Древней Греции главным критерием успешной деятельности выпускников Академии Платона являлось их умение писать законы. Приступить к изучению этого искусства они могли только при условии знания математики, при входе в Академию Платона были начертаны слова: «Пусть не входит никто, не знающий геометрии». Платону приписывают также изречение: «Геометрия приближает разум к истине».

Математика вообще и геометрия в частности являются феноменом мировой общечеловеческой культуры. Выдающийся математик XX в., создатель кибернетики Н. Винер подчеркивал, что «математика – один из видов искусства» [2, с. 60]. Другой известный математик Г. Харди сравнивал творчество математика с творчеством музыканта, живописца или поэта, а совокупность математических идей – с совокупностью звуков, красок и слов по присущей ей внутренней гармонии.

Отождествление красоты с числом, понимание математики как инструмента создания искусства и постижения его смысла впервые выводится в античной Греции. Более двух тысяч лет назад древнегреческие философы высказывали мысль, что музыка - величайшая сила, посредством которой устанавливается связь со звуковым миром действительности. В своем учении Пифагор называет мир – гармонией, а гармонию – числом. Создавая свою школу мудрости, Пифагор положил в ее основу два искусства – музыку и математику. Он считал, что гармония чисел сродни гармонии звуков и что оба этих занятия упорядочивают хаотичность мышления и дополняют друг друга. Гармония космоса была воплощена пифагорейцами в сфере музыки.

Для воплощения своего открытия Пифагор использовал монохорд – полуинструмент, полуприбор. Под струной на верхней крышке ученый начертил шкалу, с помощью которой можно было делить струну на части. Было проделано много опытов, в результате которых Пифагор описал математически звучание натянутой струны. Эти опыты легли в основу музыкальной акустики. Пифагору также принадлежит математическое объяснение основ гармонии, создание кварто-квинтового круга и так называемой «Пифагоровой коммы» (от греческого «отрезок» – очень малый интервал между двумя близкими по высоте звуками, образуемыми с помощью суммирования различных чистых интервалов и последовательных октавных перестановок). Следуя собственной теории совершенства малых чисел, Пифагор берет квинту за основу строя (внутри октавы квинта воспринимается наиболее слитно с начальным звуком октавы и составляет соотношение 3:2 от октавы).

$\frac{(2/3)}{6}$	$\frac{(2/3)}{5}$	$\frac{(2/3)}{4}$	$\frac{(2/3)}{3}$	$\frac{(2/3)}{2}$	$\frac{(2/3)}{1}$	1	$\frac{(3/2)}{2}$	$\frac{(3/2)}{3}$	$\frac{(3/2)}{4}$	$\frac{(3/2)}{5}$	$\frac{(3/2)}{6}$	
соль	ре	ля	ми	си	фа	до	соль	ре	ля	ми	си	фа#

Идея совершенства окружающего мира владела умами ученых и в последующие эпохи. Греческое учение о «математизированной» Вселенной находит продолжение в исследованиях ученых эпохи Возрождения (Н. Коперника, И. Кеплера, Г. Галилея, Р. Декарта, Г.В. Лейбница и др.), веривших, что природа сотворена по математическому плану и что творцом был сам Бог.

Подобных убеждений придерживались многие философы и ученые. Так, российский математик и педагог XIX в. Н.В. Бугаев свое оригинальное учение – ритмологию – возводил к древней пифагорейской мудрости «Все есть число, а число есть Бог». В этом учении он хотел создать универсальные понятия и законы, проявляющиеся во всех областях человеческой деятельности. «Это требование числа и меры является злобою дня не одной современной науки, но и современного искусства и современных человеческих отношений. Найти меру в области чувства и воли – вот задача современного философа, политика и художника. Эта положительность требований нового человека не только не ослабевает, а усиливает идеальную сторону современной цивилизации», – писал он [1, с. 210].

Все сферы цивилизованной человеческой деятельности – искусство, религия, музыка, язык, история, наука – связаны такой общностью, как

символ, символическое представление, так как ни один объект непосредственного восприятия, даже пространство и время, не может быть определен как подлинная объективность без введения знаковых конструкций. Язык и способность к обозначению символами определенного содержания, а также умение толковать эти символы стали решающим шагом, выделившим человека из животного мира. Без языка невозможно образование никаких понятий и тем самым невозможно никакое мышление. Во многом мы познаем окружающий мир с помощью органов чувств – зрения, слуха, осязания и т.д. Однако не все явления реального мира доступны такому восприятию. Наблюдение, опыт и эксперимент помогают в исследовании природы лишь до определенного предела. Тогда для процесса теоретического конструирования мира привлекается математика.

Языки музыки и математики, состоящие из знаков и символов, позволяют выражать многие факты в знаково-символьной форме и составляют в этом смысле универсальный язык. Не случайно, что даже названия нот имеют символическое значение. В XI в. Гвидо Аретинский – монах-бенедиктинец, а также итальянский теоретик музыки в целях быстрого разучивания незнакомых песнопений придумал систему сольмизации (способ распева мелодий с помощью условных слогов, назначенных для каждой ступени звукоряда). Система строилась на основе молитвы к Иоанну Крестителю «*Ut queant laxis*», в которой установил сохранившиеся до наших дней слоговые названия ступеней звукоряда: ут (впоследствии заменена на до), ре, ми, фа, соль, ля. Слог си был добавлен в XVIII в. по первым буквам слов *Sancte Iohannes*. Так как закрытый слог ут неудобно исполнять, в XVII в. Джованни Баттиста Дони предложил заменить его на до в честь Господа (лат. *Dominus*) [13].

<p>Ut queant laxis resonare fibris, Mira gestorum famuli tuorum, Solve polluti labii reatum, Sancte Iohannes</p>	<p>Утробую отверстой чтобы Ревнители твои сумели Миру возгласить деяний чудеса Фальшь совлеки с их губ, Солгать дабы не смели, Лаская слух напевом, Святой Иоанне. (Мнемонический перевод М.И. Катунян)</p>
---	--

Математический язык позволяет при точной формулировке проблем из различных областей знания производить необходимые для получения результата действия почти автоматически в силу разработанных алгоритмов. Искусствоведы составили подробные схемы, в которых содержится геометрический анализ великой музыки В.А. Моцарта, Л.В. Бетховена, Ф. Шопена, Р. Вагнера, М.И. Глинки и др. Наиболее удачным в этом отношении примером являются Хроматическая фантазия и Фуга *d-moll* И.С. Баха [14].

Исследователи творчества великого композитора утверждают, что И.С. Бах работал, как математик, видящий перед собой множество

вычислений. И это не случайно. Дело в том, что в баховский период на музыку смотрели как на искусство, которое является разновидностью математической науки. Чтобы понять эту математику в музыке И.С. Баха, необходимо иметь представление о христианской нумерологии, ее традициях. Нумерация используется для надления символом любого имени, слова, названия предмета. Символику имели как однозначные (1 – символ Единого Бога, 2 – двойственность природы Христа, Бога и человека и т.д.) так и многозначные числа (777 – крест Господень, 444 – святое причастие и т.д.). Согласно христианской нумерологии, любое многозначное число при необходимости приводится к однозначному сложением цифр (в математике «модуль»).

Одной из сложнейших проблем, стоящих на стыке гуманитарных и точных наук, является поиск новых научных методов в музыке. Рождение нового музыкального строя не могло произойти без изобретения логарифмов и развития алгебры иррациональных величин. Без знания логарифмов провести расчеты равномерно-темперированного строя было бы невозможно. Логарифмы стали своеобразной «алгеброй гармонии», на которой выросла темперация.

Математика возникла и развивалась не только из практических, но и из духовных потребностей человека. Пути изучения механизмов, связывающих смысл музыкального произведения с его воплощением и открывающих новые возможности в области музыкальных средств выразительности, могут быть определены посредством построения математической модели.

Примерно в 1700 г. немецкий органист А. Веркмайстер принял решение отказаться от совершенных и несовершенных консонансов пифагорейской гаммы. Сохранив октаву, он разделил ее на 12 равных частей, распределяя «Пифагорову комму» между звуками внутри каждой октавы и создавая систему равномерной темперации [11].

Не остается ни одного чистого интервала внутри октавы (кроме самого интервала «октава»). Благодаря распределению 12 квинт, которые точно укладываются в 7 октав, становится возможным переход из одной тональности в другую, и именно к этому периоду относится создание 48 прелюдий и фуг И.С. Бахом. Авторитет великого композитора примирил споры математиков и музыкантов, выступавших «за» или «против» нового музыкального строя: в математическом построении 12 мажорных и 12 минорных тональностей совершенно тождественны.

Еще один пример взаимосвязи математики и искусства – это понятие многозначности в математике, использование полифонии в музыкальных произведениях и введение многоплановости в живописи и литературе.

Большое взаимное влияние математики и искусства можно проследить практически на каждом этапе развития человеческого общества, как будто бы одна и та же идея овладевает умами исследователей и творцов в разных сферах деятельности, что особенно характерно в XVII в.

В Италии (конец XVI в.) возникает сокращенный способ записи многоголосной музыки генерал-бас, который приобретает популярность в XVII в. в европейских странах. Полифонические сочинения переписывались и печатались в виде партитур отдельных исполнительских голосов, в связи с чем возникало неудобство при разучивании и их исполнении. Постепенно стали

применять сокращенную запись сочинения, где фиксировался самый нижний звук (бас), а остальные голоса записывались цифрами, обозначающими интервалы от баса. В качестве нотации генерал-бас имеет полифонические концепции вертикали – аккорд как комплекс интервалов (цифра 6 – септаккорд, 6/4 – квартсептаккорд, знак + после цифр обозначает хроматическое повышение). Таким образом, возникает новая гомофонная техника письма – непрерывный бас с аккордами над ним. Последовательное использование генерал-баса можно найти в «Церковных концертах» А. Банкьери, «100 церковных концертах» А. Виадана. В настоящее время применяется другой вид цифрового баса, основанный на знаниях современной гармонии. Своеобразное подобие генерал-баса можно наблюдать в джазовой музыке, а также в легкой эстрадной, где часто запись песен представляет собой изложение мелодии и гармонического баса с цифровкой (музыкальной стенографией).

Известный ученый астроном И. Кеплер, с чьим именем связывают революцию в астрономии, рациональное объяснение астрономических явлений увидел в теории гармонических интервалов. Он установил семь основных гармонических интервалов: октаву – 2/1, большую сексту – 5/3, малую сексту – 8/5, чистую квинту – 3/2, чистую кварту – 4/3, большую терцию – 5/4 и малую терцию – 6/5. С помощью этих интервалов он выводит весь звукоряд как мажорного, так и минорного наклонения. После долгих поисков, проделав огромную вычислительную работу по расчету орбит планет, И. Кеплер установил, что отношения экстремальных углов скоростей для некоторых планет близки к гармоническим: Марс – 3/2, Юпитер – 6/5, Сатурн – 5/4. Далее Кеплер в «Гармонии мира» пишет о том, что Сатурн и Юпитер «поют» басом, а Марс – тенором, Земля и Венера – альтом, а Меркурий – дискантом [12].

Также в XVII в. появляется интерес к учению «*Ars combinatoria*» комбинаторики – пермутации (перестановки элементов) и комбинации (замены одних другими) [7]. На первый план в дискретной математике выходят комбинаторные объекты (магические квадраты, перестановки, сочетания, размещения), сформировавшиеся в процессе многолетней практики решения задач. Магические квадраты привлекали внимание с давних пор. Уже в древних религиозных книгах индийцев (сутрах и ведах) можно увидеть магические квадраты.

Подобный магический квадрат использовал австрийский композитор Антон Веберн для иллюстрации основного принципа композиторской додекафонной техники, объясняя как «ряд», который уже сам по себе содержит очень сложные связи [6].

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Великий квадрат SATOR – это один из наиболее известных магических квадратов. Заключенный в нем текст одинаково читается по всем четырем направлениям: вверх, вниз, слева направо и справа налево. Данный квадрат называют самой древней из магических фигур и датируют IV в. н.э. Чаще перевод связывают с латинским словом «Sator» – сеятель. Его обнаруживают на стенах дворцов и античных храмов Рима и Помпеи, христианских церквах, Библиях, сосудах для питья. По свидетельству И.П. Сахарова, квадрат «Sator», написанный на кириллице, был известен и на Руси как «заклинательная песнь над духами». Старообрядцы определяли магический квадрат как «печать премудрого царя Соломона» [8].

По принципу квадрата «Sator» выстраивается и порядок нот в гамме:

До Ре Ми Фа Соль Ля Си До
Ре Ми Фа Соль Ля Си До Ре
Ми Фа Соль Ля Си До Ре Ми
Фа Соль Ля Си До Ре Ми Фа
Соль Ля Си До Ре Ми Фа Соль
Ля Си До Ре Ми Фа Соль Ля
Си До Ре Ми Фа Соль Ля Си
До Ре Ми Фа Соль Ля Си До

Одним из первых математических сочинений по комбинаторике можно считать «Трактат об арифметическом треугольнике» Б. Паскаля (1665). Первая попытка построения общей комбинаторной теории в работе «Рассуждения о комбинаторном искусстве» принадлежала великому Г.В. Лейбницу (1666). Это сочинение содержало много рассуждений философского и нематематического характера, а его целью было построение математического аппарата для осуществления выдвинутой Лейбницем идеи «всеобщей характеристики».

Французский математик М. Мерсенн, имя которого в математике сохранилось в термине «числа Мерсенна», в трактате «Универсальная Гармония» рассматривает музыку не как вид искусства, а как «очаровывающая» часть математики [4]. Создание математической комбинаторной теории соответствует в музыке тому, что музыкальные тоны свободно комбинируются, переставляются, как цифры в математике. Именно в этот период получают широкое распространение музыкальные игры, авторами которых были Й. Гайдн, Ф.Э. Бах, Й. Кирнбергер. Музыкальные тоны могли быть использованы как в качестве шифра, так и в качестве руководства для сочинения произведения (основываясь на правилах и имея игральные кости, любой мог составлять маленькие музыкальные пьесы) [5].

Другим примером может служить созданная в последней трети XIX в. немецким математиком Г. Кантором теория множеств. Примерно в это же время в живописи формируется новое направление – импрессионизм, сходные черты проявляются в литературе, а первой половине XX в. – в музыке.

Родоначальником нового стиля в музыке XX в. – пуантилизма (франц. *pointillisme*, от *pointiller* – писать точками, *point* – точка) – является Антон Веберн. Он занимался композицией у А. Шёнберга, что оказало решающее влияние на формирование его как личности и как композитора. В классе

Шёнберга Веберн сблизился с другим выдающимся композитором Альбаном Бергом. Их триумвират вошел в историю музыки под названием «Новой венской школы». Сам Веберн считал, что «Шёнберг – это голова, а он и Берг – крылья Шёнберга» [10].

Словосочетание «точечная музыка» (пуантилизм) впервые употребил музыковед Герберт Аймерт в 1952 г. для характеристики слухового ощущения от сочинений К. Штокхаузена («Перекрёстная игра» / нем. *Kreuzspiel*), П. Булеза («Полифония № 10», «Структуры I») и К. Гуйвартса (Соната для двух фортепиано). Древнейшим «предвосхищением» пуантилизма является средневековый гокет, где мелодия рассекается на фрагменты, исполняемые по очереди разными певцами. Хрестоматийным примером пуантилизма считаются некоторые сочинения А. Веберна (например, ч. II «Вариаций для фортепиано, ор. 27 или начало «Вариаций для оркестра», ор. 30). Специфика этого метода композиции состоит в том, что музыкальная ткань создается из звуков («точек»), разделенных паузами или скачками, к ним могут присоединяться сливающиеся с ними разнотембровые звуки-точки ударных инструментов, сонорные и шумовые эффекты.



Музыка А. Веберна сжата по объему. Все написанные им за 62 года произведения (31opus) требуют для своего исполнения всего 2,5 часа чистого звучания. «Здесь типичный для образности композитора комплекс – небо, звёзды, ночь, цветы, любовь – представлен острыми сверкающими блёстками звуков пуантилистической ткани сопровождения, служащей для мелодии лёгким и утончённым фоном» [9].

Некоторые музыковеды трактуют точечную музыку как аналог пуантилизма в изобразительном искусстве (манера письма точечной или прямоугольной, отдельными мазками правильной формы). Автором этого метода, считается французский живописец Жорж-Пьер Сёра (1859–1891). Современный пуантилизм дополняет и развивает многие направления изобразительного искусства. Технические приемы пуантилизма использовали абстрактивисты, модернисты, художники декоративного искусства в мозаичных панно и различных росписях. Весь мир знает картины Мигеля Эндары, созданные из миллионов чернильных точек, или коллажи Питера Мейсона, сложенные из почтовых марок.

Sehr rasch ($\text{♩} = \text{ca } 96$)

4 5 6 7

Ster_ ne,

8 rit. 9 a tempo *f* 10 11

Ihr sil_ ber_

12 13 rit. 14

nen bie nen

А. Веберн «Звёзды» op. 25 No 3

«Музыка – таинственная арифметика души», по определению Г. Лейбница, она «вычисляет, сама того не подозревая». Таким образом, два предмета, музыка и математика, являются двумя полюсами человеческой культуры. Слушая музыку, мы попадаем в волшебный мир звуков и открываем в ней совершенство, простоту и гармонию. Заслуженное признание математике обеспечивает сама ее сущность, ценность утверждений математики, заключающаяся в их абстрактности и общности, всеобщность используемых методов. Ценность математики состоит также в том, что она дает наиболее чистое и непосредственное переживание истины. Любое музыкальное произведение можно представить как математическую модель, которая будет иметь числовые закономерности. Нет такой области музыки, где числа не выступали бы как способ описания происходящего: определенное число ступеней в ладах в пропорциональном соотношении, ритм делит время на единицы, музыкальная форма основана на идее тождества и контраста, которые восходят к понятиям множества, симметрии. Гармония чисел является сродни гармонии звуков и дополняет друг друга, музыку и математику.

Список литературы

1. Бугаев Н.В. Математика как орудие научное и педагогическое // Математический сборник. М.: 1868. Т.3. С. 183-216.
2. Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989. 400 с.
3. Винер Н. Я – математик. М.: Наука, 1964. 356 с.

4. Гаврюшин Н.К. Универсальность творческой личности [Электронный ресурс]. URL: <http://www.metodolog.ru/00159/00159.html>
5. Гийо М. Новейшие физические и математические развлечения. Австрия, 1772.
6. Друскин М.С. О Западно-европейской музыке XX века. М., 1973. 272 с.
7. Лебедева А.В. Ars combinatoria и музыкальная практика XVIII в.: дис. ... канд. искусствовед.: 17.00.02. М., 2002. 291 с.
8. Сказание русского народа / сост. и отв. ред. О.А. Платонов. М.: Институт русской цивилизации, 2013. Т. 1. 800 с.
9. Холопова В., Холопов Ю. Антон Веберн. М.: Советский композитор, 1984, 330 с. («Зарубежная музыка. Мастера XX века».)
10. 100 великих композиторов / автор-составитель Д.К. Самин. М.: Вече, 2008. 480 с. (100 великих).
11. Шерман Н. Формирование равномерно-темперированного строя, М., 1964. С. 64-77.
12. Johannes Kepler, The Harmony of the World. Tr.: Dr Juliet Field. Pub. by The American Philosophical Society, 1997.
13. Гвидо_д'Ареццо [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гвидо_д'Ареццо (Дата обращения: 8.08.2015).
14. Золотое сечение [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Золотое_сечение (Дата обращения: 8.08.2015).

THE HARMONY OF MATHEMATICS AND MUSIC IN THE CONTEXT OF THE SYNTHESIS OF ART AND SCIENCE

I.A. Arutyunyan, S.Y. Shcherbakova

Tver State University

The article explores the relationship and interaction of mathematics and music at different stages in the evolution of scientific ideas and their interpretation from the point of view of mathematical theories and the theory of music.

Keywords: *history of mathematics, history and music theory, synthesis of science and art.*

Об авторах:

АРУТЮНЯН Изабелла Аргашесовна – кандидат педагогических наук, доцент, кафедра музыкального образования Института педагогического образования ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», e-mail: bella112@yandex.ru

ЩЕРБАКОВА Светлана Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой математики с методикой начального обучения Института педагогического образования ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», e-mail: shchsv@yandex.ru