

АКУСТООПТИКА

УДК 535.525; 535.551

ИЗОХРОМЫ В КОНОСКОПИЧЕСКИХ КАРТИНАХ ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛОВ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОРИЕНТАЦИЯХ НОРМАЛИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ

**Н. В. Айдинян, Е. Е. Арямин, К. А. Морозова, А. В. Костюк,
Д. С. Кутузов, М. Д. Кузьмина, М. С. Воронцов**
Тверской государственный университет, Тверь, Россия

Выведено уравнение кривой, описываемой волновым вектором необыкновенного луча на выходной поверхности плоскопараллельного образца, вырезанного из одноосного кристалла с произвольной ориентацией оптической оси, при вращении падающего луча под любым постоянным углом. Без каких-либо упрощений, применявшихся в известных работах, получено выражение для разности фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, определяющее положение и вид изохром в коноскопической картине одноосного кристалла. Представлено уравнение восьмой степени, позволяющее с помощью компьютера за сравнительно небольшое время получать точное математическое описание и графическое представление картины изохром – от первого порядка, до порядков, исчисляющихся тысячами, – которая должна наблюдаться в кристалле с известными параметрами.

Ключевые слова: *метод коноскопии, линейно поляризованный свет, изохромы, изогирь, одноосные кристаллы, двуосные кристаллы, аномальная двуосность, парателлури́т, ниобат лития, разность хода, волновой вектор, обыкновенный луч, необыкновенный луч, уравнение Френеля.*

1. Введение. Метод коноскопии является одним из самых чувствительных методов для выявления оптических аномалий в одноосных и двуосных кристаллах [1-3]. В его современных технических вариантах активно применяются лазерные источники света, что определяет ряд новых направлений использования метода при исследованиях оптических эффектов в наноразмерных структурах [4], минералогии [5], голографии [6]. Коноскопия по-прежнему применяется в таких классических задачах, как определение категории кристалла (низшей или средней) и его оптического знака [7]. В тех случаях, когда

структура идеального кристалла известна, метод может использоваться для проверки точности ориентации граней, ортогональных оптической оси одноосного кристалла или биссектрисе угла между осями двуосного [8, 9]. Он имеет технические применения в поляризационных компенсаторах и поляризационных интерферометрах [9]. Получаемые с помощью коноскопии экспериментальные данные об углах аномальной двуосности позволяют рассчитывать механические напряжения в одноосном кристалле, приводящие вследствие пьезооптического эффекта к искажениям оптической индикатрисы материала [10].

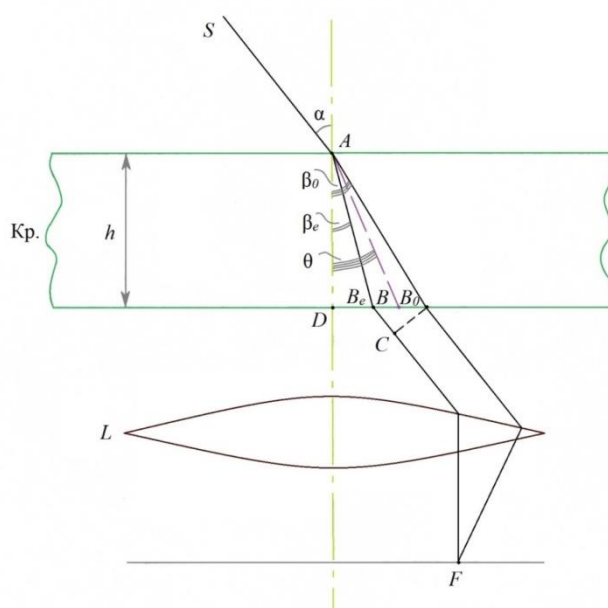
Наиболее важное практическое значение метода коноскопии состоит в возможности обнаружения в коноскопических картинах оптических неоднородностей в кристаллах путем анализа формы изохром – линий равной разности хода между обыкновенным и необыкновенным лучами [5, 11]. Изогиры в виде темных областей являются менее информативными, затрудняют наблюдение изохром, и для их устранения применяются специальные методы [7]. Аномальная двуосность, а также отклонения всех линий изохром от их теоретической формы свидетельствуют о крупных оптических аномалиях в масштабах всего кристалла. Мелкие изломы на изохроме или серии таких изломов на соседних изохромах (в случае таких аномалий как свили), соответствующие слабым искажениям волновых фронтов порядка десятых долей длины волны, хорошо наблюдаются в коноскопических картинах и позволяют выявлять, классифицировать оптические аномалии и численно оценивать вариации показателей преломления, локализованные в малых объемах кристалла. В свою очередь анализ оптических аномалий, выявляемых методом коноскопии, в принципе позволяет вносить коррективы в технологию выращивания кристаллов с целью получения максимальной однородности материала. Таким образом, коноскопия является вполне современным, развивающимся, многофункциональным и весьма чувствительным методом диагностики, дефектоскопии и метрологии монокристаллов, применяемых в оптике.

Правильная интерпретация вида коноскопических картин возможна на базе соответствующего математического аппарата, позволяющего получать формулу, описывающую изохромы любого порядка для кристалла с известными структурой, размерами, главными значениями показателей преломления и ориентацией взаимно параллельных граней относительно оси (осей). Между тем, анализ известных работ, связанных с теорией метода, показывает, что даже для одноосных кристаллов до сих пор используются базовые соотношения,

полученные ранее с определенными упрощениями [8]. При попытках более детального описания изохром одноосных кристаллов применялись дальнейшие упрощения [3, 9, 10, 12-15], использование которых дает формы изохром, не соответствующие реально наблюдавшимся авторами настоящей работы коноскопическим картинам при исследованиях кристаллов парателлурита и ниобата лития, высокое оптическое и структурное качество которых было установлено другими методами.

Цели настоящей работы состояли в выводе, без каких-либо упрощений, уравнения для изохром любого порядка в плоскости наблюдения коноскопических картин одноосного кристалла при произвольной ориентации нормали к поверхностям образца относительно оптической оси, а также в экспериментальном подтверждении полученных соотношений.

2. Анализ приближенных соотношений. По-видимому, первое наиболее точное из приближенных математическое описание формы изохром в коноскопических картинах одноосных кристаллов дано М. Борном и Э. Вольфом в работе [8]. Вычисление разности фаз δ между волновыми фронтами обыкновенного и необыкновенного лучей иллюстрируется в [8] рисунком, на котором в настоящей публикации изменены лишь некоторые обозначения (рисунок 1). Здесь SA , AB_0 , AB_e – волновые нормали к падающей и двум преломленным волнам в точке A , Кр. – образец кристалла.



Р и с . 1 . К определению разности фаз, приобретаемой двумя волнами, прошедшими через плоскопараллельную пластину из одноосного положительного кристалла [8]

Далее в уравнениях используются следующие обозначения: λ – длина волны в первой среде (воздух), $\lambda_o = \lambda/n_o$, $\lambda_e = \lambda/n_e$ – длины обеих преломленных волн, α , β_o и β_e – соответственно угол падения и два угла преломления, θ – среднее углов β_o и β_e , L – линза (или проекционная система), F – точка в фокальной плоскости линзы (или проекционной системы), в которой интерферируют обыкновенная и необыкновенная волны. Лучи выходят из кристалла параллельно друг другу и волновой нормали к падающей волне с разностью фаз

$$\delta = 2\pi \left[\frac{AB_e}{\lambda_e} + \frac{B_e C}{\lambda} - \frac{AB_o}{\lambda_o} \right], \quad (1)$$

$$\text{где } AB_o = \frac{h}{\cos \beta_o}, \quad AB_e = \frac{h}{\cos \beta_e} \text{ и} \\ B_e C = B_e B_o \sin \alpha = h \sin \alpha (\operatorname{tg} \beta_o - \operatorname{tg} \beta_e). \quad (2)$$

После подстановки выражения (2) в (1) и использования закона преломления ($\frac{\sin \alpha}{\lambda} = \frac{\sin \beta_o}{\lambda_e}$, $\frac{\sin \beta_o}{\lambda_o} = \frac{\sin \alpha}{\lambda}$) в [8] получено выражение для разности фаз:

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_e \cos \beta_e - n_o \cos \beta_o). \quad (3)$$

В данном выражении известны (h , λ , n_o) или могут быть вычислены ($\cos \beta_o$) все величины кроме угла преломления β_e и соответствующего ему показателя преломления необыкновенной волны. Более того, ни в одной из известных работ не представлены выражения для n_e в зависимости от угла падения лучей α для заданного угла ψ между нормалью к поверхности кристалла и его оптической осью. Уравнение Френеля позволяет рассчитать показатель преломления необыкновенной волны n_e , уже распространяющейся в известном направлении в кристалле, но в нашем случае это направление подлежит определению.

Уравнение Френеля не содержит данных о луче, падающем на кристалл, и угле между нормалью к поверхности кристалла и оптической осью. Его, однако, недостаточно для расчета показателя преломления и угла преломления необыкновенной волны. Именно поэтому далее в [8] сначала применяется приближение, состоящее в том, что вводится некий средний угол θ между углами преломления β_o и β_e . Точка B на рис. 1 указывает место выхода такой усредненной нормали волновых фронтов на нижней поверхности кристалла. Всего в [8] используются только два приближения, вследствие чего выводы, вытекающие из последующего анализа, сделанные в этой работе, отличаются реалистичностью и прямо не содержат ошибочных положений. Во всех других работах, связанных с коноскопией одноосных (а тем более, двuosных) кристаллов [1-3, 9, 10, 12, 14, 15], кроме [11, 13], сделаны дополнительные приближения, в результате чего в них получены выводы, искажающие истинный вид изохром и даже допускающие возможные грубые ошибки при практических оценках оптической однородности, вида оптической индикатрисы, величин механических напряжений и их распределений в кристаллах.

В [8] выражение (3) заменяется на приближенное на основании малости разности $n_e - n_o$ по сравнению с n_e и n_o , после чего разность фаз δ оказывается равной

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda \cos \theta} (n_e - n_o), \quad (4)$$

где θ – среднее углов β_o и β_e , величина $h/\cos \theta$ представляет собой средний путь двух волн в кристалле, а после умножения на $(n_e - n_o)$ – соответствующую оптическую разность хода.

Все изохромы в [8] получают построением вокруг точки A поверхности постоянной разности фаз $\delta(h, \theta) = \text{const}$, для чего используют полярный радиус

$$\rho = AB = \frac{h}{\cos \theta}, \quad (6)$$

а также угол ν , который прямая AB составляет с направлением оптической оси.

В одноосном кристалле показатели преломления, соответствующие направлению волновой нормали, образующей угол ν с оптической осью, связаны, согласно [8], соотношением:

$$\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} = \left(\frac{1}{N_o^2} - \frac{1}{N_e^2} \right) \sin^2 \nu, \quad (5)$$

где $N_o = n_o$ и N_e – главные значения показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн. Здесь в [8] делается второе приближение. В силу малости разности величины показателей преломления n_e и n_o по сравнению с их значениями выражение (5) заменяется на приближенное

$$n_e - N_o = (N_e - N_o) \sin^2 \nu. \quad (6)$$

После подстановки (6) в (4), с учетом (5), получается формула для разности фаз:

$$\delta = \frac{2\pi\rho}{\lambda} (N_e - N_o) \sin^2 \nu = \frac{2\pi h}{\lambda \cos \theta} (N_e - N_o) \sin^2 \nu, \quad (7)$$

в которую входят уже две приближенные величины θ и ν – соответственно угол преломления и угол между оптической осью и средней нормалью волновых фронтов.

Далее записывается уравнение для поверхности постоянной разности фаз:

$$\rho \sin^2 \nu = c \quad (c = const). \quad (8)$$

Затем вводится декартова система координат с осью z , направленной вдоль оптической оси, и записывается выражение:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \rho \sin^2 \nu = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (9)$$

В соответствии с (8) поверхности постоянной разности фаз определяются уравнением:

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (10)$$

Эти поверхности можно получить при вращении кривых

$$x^4 = c^2(x^2 + z^2) \quad (11)$$

вокруг оси z . Далее в [8] указывается, что все изохромы можно определить, взяв сечения поверхности, описываемой соотношением (10), плоскостями, находящимися на различных расстояниях h от начала координат, причем эти изохромы можно наблюдать на выходной грани кристаллической плоскости. Анализ формы соответствующих кривых пересечения носит в [8] качественный характер. Он содержит очередное и правильное утверждение, согласно которому в случае совпадения нормали к граням с оптической осью изохромы имеют вид

окружностей. Менее точные выводы состоят в том, что если нормаль к граням образует небольшой угол с оптической осью, изохромы сжимаются и переходят в эллипсы, если же эта нормаль образует большой угол с оптической осью, изохромы приближаются к гиперболам. Вопрос о том, изменяется ли, и каким образом, форма изохром для различных порядков максимумов (т.е. для различных разностей δ) при одном и том же угле между нормалью и оптической осью, в [8] не рассматривается. Следует отметить, что выведенная с двумя приближениями формула для поверхности равных фаз описывает поверхность четвертого порядка, и при ее пересечениях плоскостями кривые в общем случае не могут быть кривыми второго порядка.

В работе [13] анализ формы изохром в коноскопических картинах одноосных кристаллов основан на использовании соотношений, в которые входит угол ν , в отличие от [8], определенный здесь как угол между оптической осью и необыкновенной волной. При этом в [13] утверждается, что значение показателя преломления n_e дает формула:

$$n_e = \frac{N_o N_e}{\sqrt{N_o^2 + (N_e^2 + N_o^2) \cos^2 \nu}}, \quad (12)$$

Однако на самом деле (12) – это то же уравнение (5) из [8], записанное в иной форме. Действительно, приводя члены в (5) к общему знаменателю и заменяя $\sin^2 \nu$ на $1 - \cos^2 \nu$, получим

$$\frac{1}{N_o^2} - \left(\frac{1}{N_o^2} - \frac{1}{N_e^2} \right) \sin^2 \nu = \frac{1}{n_e^2} = \frac{N_e^2 - N_e^2 \sin^2 \nu + N_o^2 \sin^2 \nu}{N_o^2 N_e^2} = \frac{N_e^2 \cos^2 \nu + N_o^2 - N_o^2 \cos^2 \nu}{N_o^2 N_e^2}$$

откуда $n_e^2 = \frac{N_o^2 N_e^2}{N_o^2 + (N_e^2 + N_o^2) \cos^2 \nu}$, после извлечения квадратного корня оно совпадает с (12).

Таким образом, в [13] ν – это угол между оптической осью и нормалью необыкновенной волны, а угол из [8] – между осью и некой средней преломленной волной и между обыкновенной и необыкновенной волнами. Это, возможно, объясняется неточно интерпретированными в [13] данными из [8] и [12], на которые имеются ссылки. При этом авторы [12], используя соотношения из [8], пошли по пути еще больших упрощений. В [12] приведено такое же как в [8] приближенное выражение для разности фаз δ между обыкновенной и необыкновенной волнами, а затем авторы сделали еще два приближения. В силу малости углов преломления считалась, что $\frac{1}{\cos \theta} \approx 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta$.

Следующее приближение заключается в разложении квадратного корня в ряд в выражении для полярного радиуса $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $z = h$ после введения системы координат $хуz$, в которой $ху$ – это плоскость наблюдения коноскопической картины. В результате указанных приближений в [12] получено выражение для разности фаз:

$$\delta = \frac{2\pi}{h\lambda} (N_e - N_o) \left[x^2 \left(\cos^2 \psi - \frac{1}{2} \sin^2 \psi \right) + y^2 \left(\cos^2 \psi + \frac{1}{2} \sin^2 \psi \right) - hx \sin 2\psi + h^2 \sin^2 \psi \right], \quad (13)$$

где ψ – угол между оптической осью и нормалью к кристаллу. Поверхность равных фаз $\delta = const$ в работе [12], в отличие от [8], является уже поверхностью не четвертого, а второго порядка. Линии ее пересечения плоскостями должны быть кривыми второго порядка. Анализ выражения (13) показывает, что при $\psi = 0$ изохромами являются, как и в [8], окружности. При $\text{tg } \psi < \sqrt{2}$ – изохромами должны быть эллипсы, а при $\text{tg } \psi > \sqrt{2}$ – гиперболы. Вопрос об изменении формы изохром в зависимости от их порядка, т. е. при изменении δ для коноскопической картин одного и того же кристалла в [12], как и в [8], не рассматривался.

Методы расчета формы изохром, использованные в работах [1-3, 10, 14], не отличаются от развитого в [12]. В работе [9] использовано такое же приближение выражение (5) для показателя преломления необыкновенной волны n_e как и в работе [8], однако правильное выражение для разности хода Δ между необыкновенной и обыкновенной волнами записано в другой форме

$$\Delta = h \sin \alpha (\text{ctg } \beta_e - \text{ctg } \beta_o). \quad (14)$$

Далее в [9] представлено также приближенное выражение для $\text{ctg } \beta_e$, в которое входит угол ν между некой усредненной преломленной второй и оптической оси. В отличие от [12], при разложении квадратных корней в ряды по малому параметру α (углу падения) в формулах для $\text{ctg } \beta_e$ и $\text{ctg } \beta_o$ учтено большее число членов разложения. Вследствие этого итоговое выражение для разности хода Δ ($\delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$) между необыкновенной и обыкновенной волнами в зависимости от координат x, y точки в коноскопической картине оказывается более громоздким и имеет вид:

$$\Delta = h \left(A + B \frac{y}{f} + C \frac{x^2}{f^2} + D \frac{y^2}{f^2} \right), \quad (15)$$

где f – фокусное расстояние объектива, проецирующего на плоскость наблюдения выходящие из кристалла лучи, а коэффициенты A, B, C и D вычисляются согласно формулам:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{N_0^2 N_e - \sqrt{N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi}}{N_0 \sqrt{N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi}}, \\
 B &= \frac{(N_0^2 - N_e^2) \sin \psi \cos \psi}{N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi}, \\
 C &= \frac{N_e \sqrt{N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi} - N_0^2}{2N_0 N_e \sqrt{N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi}}, \\
 D &= \frac{\sqrt{(N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi)^3} - N_0^2 N_e}{2N_0 \sqrt{(N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi)^3}}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Несмотря на более сложные формулы для этих коэффициентов по сравнению с выражением (13), поверхности равных разностей хода (разностей фаз) $\Delta = const$ в [9], как и в [12], оказываются поверхностями второго порядка. Соответствующие изохромы – линии пересечения такой поверхности (парабооида вращения) плоскости в общем случае должны быть кривыми второго порядка, среди которых в [9] упоминаются только окружности (в случае ортогональности оптической оси поверхностям кристалла, т. е. при $\psi = 0$) и гиперболы (в случае, когда оптическая ось ортогональна падающему на кристалл лучу, т. е. при $\psi = \frac{\pi}{2}$). Промежуточные случаи $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ в [9] подробно не рассматриваются, как не рассматриваются и изменения вида изохром в зависимости от их порядка, т. е. от разности хода Δ . В [9] содержится утверждение, согласно которому при малых, но не равных нулю значениях ψ , изохромы имеют вид окружностей, слегка смещенных относительно нормали к плоскости кристаллической пластинки.

Заканчивая обзор известных публикаций, в которых представлены расчеты формы изохром в коноскопических картинах одноосных кристаллов, можно сделать следующие выводы:

- Ни в одной из известных работ при получении выражения для разности фаз δ (разность хода Δ) между необыкновенной и обыкновенной волнами не выведены достаточно точные формулы для угла преломления необыкновенной волны β_e и показателя ее преломления n_e .
- Вместо них используются приближенные соотношения для среднего угла преломления и среднего угла между оптической осью и преломленными волнами.

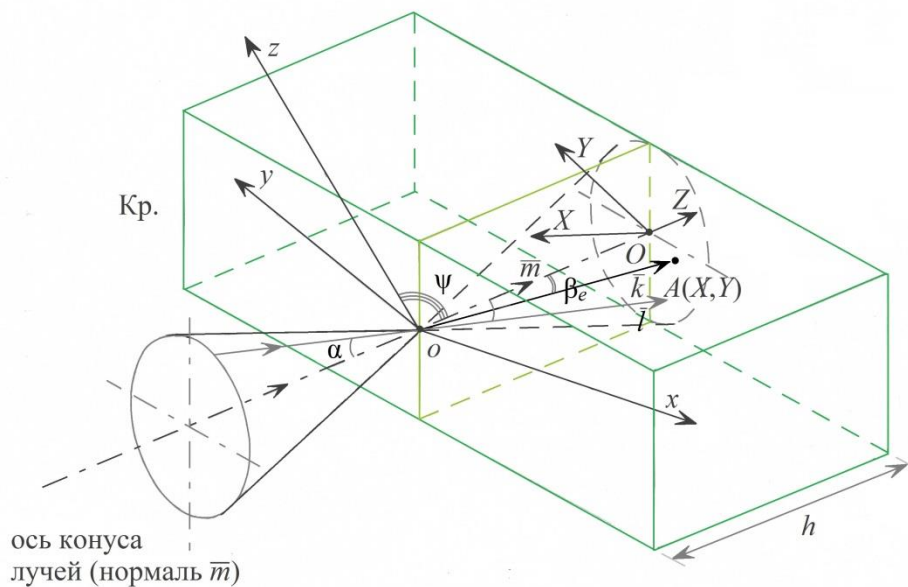
- В зависимости от количества и характера приближений поверхности равных фаз в наиболее математически строгой работе [8] оказываются поверхностями четвертого порядка, в остальных работах, где они упоминаются, – поверхностями второго порядка. Тем не менее, во всех работах в качестве возможных изохром, как линий пересечения поверхностей равных фаз плоскостями, указывается только кривые второго порядка: окружности, эллипсы и гиперболы.
- Ни в одной из работ нет анализа изменения формы изохром в зависимости от их порядка в коноскопической картине кристалла.
- Ни в одной из работ не представлены полученные экспериментально коноскопические картины, которые являлись бы подтверждением теоретически предсказанных в этих работах форм изохром. Исключением является два наиболее тривиальных случая: оптическая ось перпендикулярна поверхностям кристалла; оптическая ось лежит в плоскости, параллельной поверхностям кристалла.

Указанные выводы говорят о том, что правильное количественное и качественное описание формы изохром одноосных кристаллов невозможно без получения строгого, выведенного без каких-либо упрощений способа расчета угла преломления β_e и соответствующего показателя преломления необыкновенной волны n_e для заданного угла падения луча α .

3. Расчет координат точки выхода волнового вектора необыкновенной волны на второй поверхности кристалла. Запишем уравнение Френеля для одноосного кристалла в классическом виде [10]:

$$(n^2 - N^2)\{n^2(k_1^2 + k_2^2) - N_0^2 N_e^2\} = 0, \quad (17)$$

где n – показатель преломления, k_i – направляющие косинусы волнового вектора преломленной волны в кристаллографической системе координат. На рис. 2 представлена кристаллографическая система координат xuz в одноосном кристалле с оптической осью z , составляющей угол $\psi \neq 0$ с единичным вектором нормали \vec{m} , являющимся осью конуса лучей, падающих на кристалл.



Р и с . 2. Кристаллографическая система координат xuz в одноосном кристалле $Kp(Cr)$, на который под углом α к нормали \bar{m} падает световая волна: ψ – угол между оптической осью z и нормалью; \bar{l} – единичный волновой вектор падающей волны; \bar{k} – единичный волновой вектор необыкновенной волны; X, Y – координаты точки A выхода необыкновенной волны на второй поверхности кристалла в преобразованной системе координат XYZ

Поскольку нас интересует направление распространения необыкновенной волны, будем считать, что n_e – это показатель преломления необыкновенной волны

$n_e = \sin \alpha / \sin \beta_e$, и в (17) выражение в фигурных скобках равно нулю. Используя формулы $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$; $\sin^2 \beta_e = 1 - \cos^2 \beta_e$, получим выражение:

$$N_0^2 N_e^2 (1 - \cos^2 \beta_e) = (1 - \cos^2 \alpha) [N_0^2 (k_1^2 + k_2^2) + N_e^2 k_3^2], \quad (18)$$

а затем, выразив $\cos^2 \alpha$ и $\cos^2 \beta_e$ через скалярные произведения векторов $\bar{m}\bar{l}$ и $\bar{m}\bar{k}$ соответственно, запишем уравнение Френеля в следующем виде:

$$\frac{1 - (m_1 k_1 + m_2 k_2 + m_3 k_3)^2}{1 - (m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3)^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{N_e^2} + \frac{k_3^2}{N_0^2}. \quad (19)$$

Координаты точки пересечения A волнового вектора необыкновенной волны с выходной второй плоскостью кристалла XOY измеряются во второй системе координат XYZ , в которой ось Z является

продолжением нормали \bar{m} к первой поверхности, а ось Y является проекцией оптической оси z на вторую плоскость.

Обратный переход из системы координат XYZ в кристаллографическую систему xuz осуществляется с помощью двух поворотов: сначала путем поворота на угол ψ до совмещения оси Z с

осью z , а затем – вокруг оси z на некоторый угол γ до совмещения двух других осей X и Y с осями x и y .

Направляющие косинусы M_i , L_i и K_i ($i = 1, 2, 3$) нормали падающей волны и преломленной волны в системе координат XYZ равны:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = 0; M_2 = 0; M_3 = 1; \\ L_1 = l; L_2 = \sqrt{1 - l^2 - \cos^2 \alpha}; L_3 = \cos \alpha, \\ K_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}; K_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}; K_3 = \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \end{array} \right., \quad (20)$$

где h – толщина образца кристалла, l – косинус угла между \bar{l} и z . Матрица T_1 первого поворота на угол ψ имеет вид

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В результате этого поворота направляющие косинусы в новой – промежуточной системе координат – M_{1i} , L_{1i} и K_{1i} ($i = 1, 2, 3$) равны

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{11} = 0; M_{12} = -\sin \psi; M_{13} = -\cos \psi; \\ L_{11} = 1; L_{12} = \sqrt{1 - l^2 - \cos^2 \alpha} \cos \psi - \cos \alpha \cos \psi; \\ L_{13} = \sqrt{1 - l^2 - \cos^2 \alpha} \sin \psi + \cos \alpha \cos \psi; \\ K_{11} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}; K_{12} = \frac{y \cos \psi}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} - \frac{h \sin \psi}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}; \\ K_{13} = \frac{y \sin \psi}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} - \frac{h \cos \psi}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \end{array} \right.$$

После второго поворота на угол γ до совмещения двух оставшихся осей системы координат с осями кристаллографической системы координат, матрица которого T_2 имеет вид:

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

мы, получаем значения направляющих косинусов нормали, падающей и преломленной необыкновенной волн m_i , l_i и k_i ($i = 1, 2, 3$), причем k_i выражены теперь через координаты точки пересечения вектора необыкновенной волны со второй поверхностью кристалла:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \sin \psi \sin \gamma; m_2 = -\sin \psi \cos \gamma; m_3 = \cos \psi; \\ l_1 = l \cos \gamma - (\sqrt{1 - l^2 - \cos^2 \alpha} \cos \psi - \cos \alpha \sin \psi) \sin \gamma; \\ l_2 = l \sin \gamma + (\sqrt{1 - l^2 - \cos^2 \alpha} \cos \psi - \cos \alpha \sin \psi) \cos \gamma; \\ l_3 = \sqrt{1 - l^2 - \cos^2 \alpha} \sin \psi + \cos \alpha \cos \psi; \\ k_1 = \frac{X \cos \gamma}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} - \left(\frac{Y \cos \psi}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} - \frac{h \sin \psi}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} \right) \sin \gamma; \\ k_2 = \frac{X \sin \gamma}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} + \left(\frac{Y \cos \psi}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} - \frac{h \sin \psi}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} \right) \cos \gamma; \\ k_3 = \frac{Y \sin \psi}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} + \frac{h \cos \psi}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} \end{array} \right. , \quad (23)$$

Выражения (23) для направляющих косинусов подставляем в уравнение Френеля, записанное в форме (19), в результате чего после необходимых преобразований, включающих приведение к общему знаменателю и подобных членов, мы получаем формально уравнение четвертого порядка, которое здесь не приводится из-за крайней громоздкости. Однако в этом уравнении, во-первых, уже отсутствуют введенные нами неизвестные промежуточные величины l и γ , а во-вторых, после перенесения всех членов в левую часть соответствующей многочлен четвертого порядка от двух букв X и Y может быть разложен на два сомножителя, одним из которых является множитель $(X^2 + Y^2 + h^2)$. На этот множитель можно произвести сокращение, поскольку уравнение $X^2 + Y^2 + h^2 = 0$ заведомо не имеет действительных решений. После сокращения мы имеем следующее уравнение второго порядка:

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 y + A_4 = 0, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= N_0^2 (N_s^2 - \sin^2 \alpha), \\ A_2 &= N_s^2 N_0^2 - \sin^2 \alpha (N_s^2 \sin^2 \psi + N_0^2 \cos^2 \psi), \\ A_3 &= 2h \sin \psi \cos \psi \sin^2 \alpha (N_0^2 - N_s^2), \\ A_4 &= -h^2 \sin^2 \alpha (N_0^2 \sin^2 \psi + N_s^2 \cos^2 \psi). \end{aligned}$$

Последнее уравнение в нашем случае следует рассматривать, как уравнение кривой, которую описывает волновой вектор \vec{k} необыкновенной волны (точнее, его продолжение) на выходной поверхности кристалла при вращении падающего луча под постоянным углом α вокруг нормали к кристаллу.

В случае $\psi = 0$ (оптическая ось совпадает с нормалью к кристаллу) выражение (24) представляет собой уравнение окружности

$$X^2 + Y^2 = \frac{N_s^2 h^2 \sin^2 \alpha}{N_0^2 (N_s^2 - \sin^2 \alpha)}. \quad (25)$$

Во всех остальных случаях ($0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$) мы имеем уравнение эллипса, так как

$A_1 A_2 = N_0^2 (N_g^2 - \sin^2 \alpha) [N_g^2 N_0^2 - \sin^2 \alpha (N_g^2 \sin^2 \psi + N_0^2 \cos^2 \psi)] > 0$,
 $A_1 > 0$; ($N_g > 1$, $N_g^2 > \sin^2 \alpha$), а второй сомножитель, с помощью соотношения $\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi$ преобразуется к виду
 $A_2 = N_g^2 N_0^2 + N_0^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \psi + N_0^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \psi$, откуда следует, что $A_2 > 0$, поскольку каждое из первых трех слагаемых заведомо больше, чем $\sin^2 \alpha \sin^2 \psi$.

Анализ уравнения (24), в общем случае ($A_3 \neq 0$) не симметричного относительно X и Y , показывает, что при $\psi \neq 0$ центры эллипсов не проходят через начало координат (рис. 3), кроме случая, когда оптическая ось ортогональна нормали ($\psi = \frac{\pi}{2}$). В последнем случае эллипсы имеют максимальный эксцентриситет.

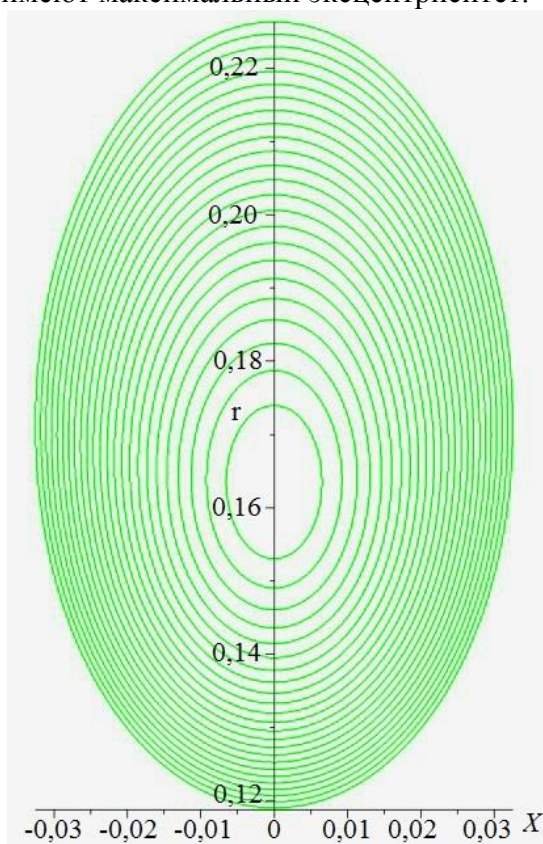


Рис. 3. Система вложенных эллипсов – кривых пересечения волновых векторов \vec{k} необыкновенной волны, с выходной поверхностью кристалла, полученных при вращении падающих под различными постоянными углами α лучей вокруг нормали к кристаллу, составляющей угол $\psi = 20^\circ$ с оптической осью

Таким образом, установлена связь для произвольного угла ψ между оптической осью и нормалью между координатами точек X и Y выхода на второй поверхности кристалла вектора необыкновенной волны \vec{k} , углом падения луча на кристалл α , а также толщиной образца кристалла h и главными показателями преломления N_0 и N_e . Далее необходимо выразить разность хода между обыкновенной и необыкновенной волнами (после их выхода из кристалла) через координаты X' и Y' в плоскости наблюдения коноскопической картины.

4. Расчет разности хода между обыкновенной и необыкновенной волнами. Как указывалось ранее, в базовой работе М. Борна [8] записано уравнение (3) для разности фаз между волнами, а все последующие приближения в этой и других работах до настоящего времени связаны с отказом от нахождения направления вектора необыкновенной волны, которое входит в уравнение в виде неизвестного $n_e = \sin \alpha / \sin \beta_e$. Перепишем (3), заменив разность фаз δ на разность хода Δ для изохром m -го порядка:

$$\Delta = m\lambda = h(n_e \cos \beta_e - N_0 \cos \beta_0). \quad (26)$$

Используя закон преломления ($\sin \alpha / \sin \beta_0 = N_0$; $\sin \alpha / \sin \beta_e = n_e$), приведем (26) к виду

$$\Delta = m\lambda = h \left(\frac{\sin \alpha \cos \beta_e}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta_e}} - \sqrt{N_0^2 - \sin^2 \alpha} \right). \quad (27)$$

Для записи величины $\cos \beta_e$ используем координаты X и Y выхода вектора необыкновенной волны на второй поверхности кристалла с помощью очевидного соотношения $\cos \beta_e = h / \sqrt{X^2 + Y^2}$, после подстановки в (27) и некоторых преобразований получаем выражение для разности хода:

$$\Delta = m\lambda = \frac{(X^2 + Y^2 + h^2) \sin \alpha}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \sin \alpha \left(\frac{h \sin \alpha}{\sqrt{N_0^2 - \sin^2 \alpha}} - \sqrt{X^2 + Y^2} \right) - \frac{h N_0^2}{\sqrt{N_0^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (28)$$

5. Вывод уравнения изохром и его краткий анализ. Схема наблюдения коноскопической картины в фокальной плоскости проекционной системы с фокусным расстоянием f , установленной за кристаллом соосно с конусом падающих лучей, представлена на рис. 4.

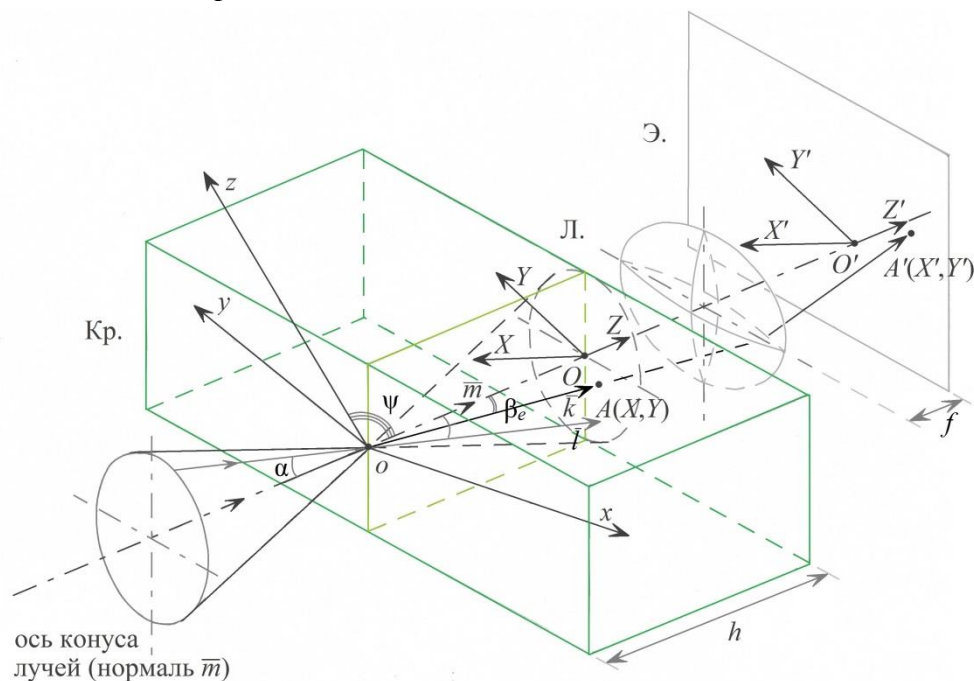


Рис. 4. Схема, поясняющая взаимное расположение одноосного кристалла, его кристаллофизической системы координат xuz и системы координат XOY в плоскости экрана Э., на котором с помощью проекционной системы, имеющей фокусное расстояние f , рассматривается конускопическая картина

Оси X' и Y' системы координат на экране, на котором наблюдаются изохромы, выберем так, чтобы они были параллельны осям X и Y на второй поверхности кристалла. Тогда будут равными углы, составляемые с осями отрезками OA и $O'A'$, проведенными из начал систем координат в точки A и A' выходов вектора необыкновенной волны на второй поверхности кристалла и преломленного луча на экране, находящемся в фокальной плоскости. Поэтому координаты точек A и A' в обеих системах координат связаны формулами:

$$Y = Y' \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{(X')^2 + (Y')^2}}; X = X' \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{(X')^2 + (Y')^2}}. \quad (29)$$

Кроме того,

$$\frac{\sqrt{(X')^2 + (Y')^2}}{f} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (30)$$

откуда следуют формулы

$$X^2 + Y^2 = \frac{X'^2 f^2}{(X')^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}; X = \frac{X' \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{X'^2 + Y'^2}}{f}; Y = \frac{Y' \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{X'^2 + Y'^2}}{f}. \quad (31)$$

Заметив, что в уравнение для разности хода Δ (28) X и Y входят только в виде суммы квадратов, и обозначив эту сумму через B^2 , перепишем (28), и (24) с учетом (31), получив систему двух уравнений:

$$\left\{ \Delta = m\lambda = \frac{(B^2 + h^2) \sin \alpha}{B} + \sin \alpha \left(\frac{h \sin \alpha}{\sqrt{N_0^2 - \sin^2 \alpha}} - B \right) - \frac{h N_0^2}{\sqrt{N_0^2 - \sin^2 \alpha}}, \right. \quad (32)$$

$$\left. \left\{ \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{f^2} [A_1(X')^2 + A_2(Y')^2] \right\} B^2 + \left(\frac{A_3(Y') \text{ctg} \alpha}{f} \right) B + A_4 = 0. \right. \quad (33)$$

Решая второе – квадратное относительно B уравнение (33), берем знак плюс перед корнем (поскольку $X^2 + Y^2 \geq 0$) и подставляем найденное значение B в (32) – уравнение для разности хода, после чего получаем уравнение изохром одноосного кристалла, в которое входят только параметры оптической системы, угол ψ между нормалью и оптической осью, размеры и показатели преломления кристалла, а также координаты точек на плоскости наблюдения. В результате необходимых преобразований уравнение (32) приобретает окончательный вид (для очевидного удобства записи штрихи у координат X' и Y' теперь опущены):

$$(N_0^2 - N_e^2) \left[\frac{Y \sin \psi}{\frac{m\lambda \sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}}{h} + \sqrt{N_0^2(X^2 + Y^2 + f^2) - X^2 - Y^2}} + \cos \psi \right]^2 = N_0^2 \left[\frac{X^2 + Y^2 - N_e^2(X^2 + Y^2 + f^2)}{\left(\frac{m\lambda \sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}}{h} + \sqrt{N_0^2(X^2 + Y^2 + f^2) - X^2 - Y^2} \right)^2} + 1 \right] \quad (34)$$

Полученное без каких-либо приближений уравнение изохром одноосного кристалла именно в форме (34) наиболее компактно и удобно для практических компьютерных расчетов формы изохром любых порядков при произвольных углах ψ между оптической осью и нормалью к поверхностям кристалла, а также для специальных исследований зависимостей формы изохром и всей коноскопической картины от толщины кристалла h , длины волны излучения λ , показателей преломления N_0 и N_e и их вариаций ΔN_0 и ΔN_e , от угла раствора конуса лучей, падающих на кристалл, т.е. от величины $A = 2\alpha_{\max}$ - удвоенного максимального угла падения лучей (угловой апертуры осветительной системы), а также фокусного расстояния проекционной системы f и порядка максимума m (порядка изохромы).

Тем не менее, для окончательного решения важного теоретического вопроса о порядке кривых – изохром одноосных кристаллов для общего случая произвольного угла ψ между оптической

осью и нормалью, уравнение (34) следует привести к каноническому виду, при котором в левой части стоит многочлен от двух букв X и Y . После приведения к общему знаменателю, избавления от корней, раскрытия скобок, приведения подобных членов и лексикографического расположения членов, уравнение (34) приобретает следующий вид:

$$B_1 X^8 + B_2 X^6 Y^2 + B_3 X^6 + B_4 X^4 Y^4 + B_5 X^4 Y^2 + B_6 X^4 + B_7 X^2 Y^6 + B_8 X^2 Y^4 + B_9 X^2 Y^2 + B_{10} X^2 + B_{11} Y^8 + B_{12} Y^6 + B_{13} Y^4 + B_{14} Y^2 + B_{15} = 0, \quad (35)$$

где B_i – коэффициенты, в которые входят величины, зависящие от свойств и размеров кристалла, параметров оптической системы и порядка изохромы. Они представляют собой чрезвычайно громоздкие выражения, в силу чего мы в качестве примера представляем только один – самый компактный коэффициент B_1 :

$$B_1 = \left(\left(4(N_0^2 - (N_0^2 - N_s^2)\cos^2\psi)^2 m^2 \lambda^2 (N_0^2 - 1) h^2 + (h^2 N_s^2 N_0^2 - (N_0^2 - (N_0^2 - N_s^2)\cos^2\psi)(m^2 \lambda^2 + (N_0^2 - 1)h^2) - h^2 N_0^2)^2 \right)^2 - 4(h^2 N_s^2 N_0^2 - (N_0^2 - (N_0^2 - N_s^2)\cos^2\psi)(m^2 \lambda^2 + (N_0^2 - 1)h^2) - h^2 N_0^2)^2 \left(2N_0^2 - (2(N_0^2 - N_s^2))\cos^2\psi \right)^2 m^2 \lambda^2 h^2 (N_0^2 - 1) \right). \quad (36)$$

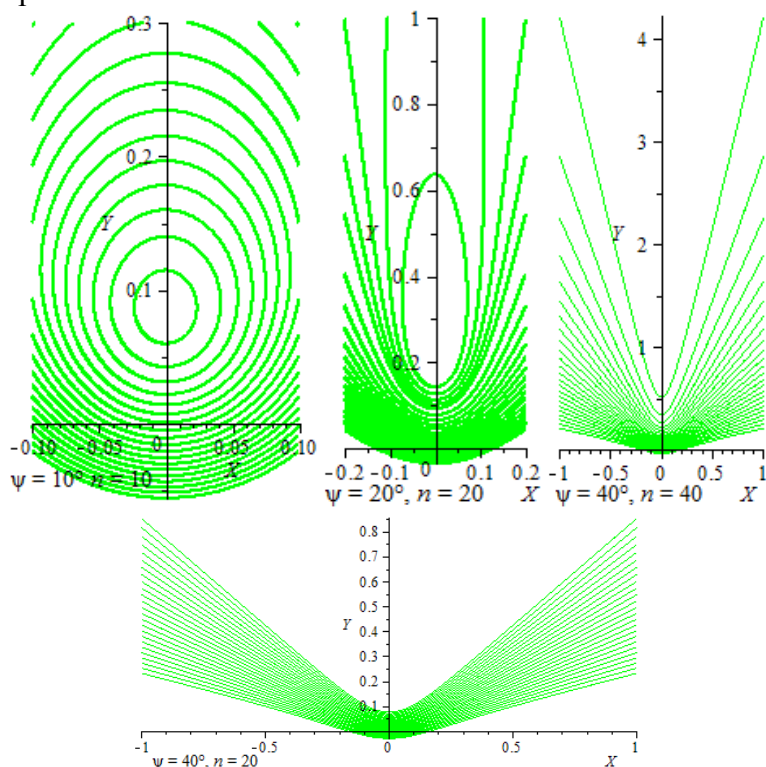
При желании читатели могут найти все 15 коэффициентов на интернет-странице кафедры прикладной физики Тверского государственного университета. Следует еще раз подчеркнуть, что для практических целей значительно удобнее пользоваться уравнением (34), а уравнение (35) имеет скорее теоретическое значение. Тем не менее, определенный анализ уравнения (35) и его коэффициентов в настоящей работе проведен. И из него следует, что в общем случае при $i \neq k$ коэффициенты B_i и B_k не равны друг другу ($B_i \neq B_k$), и уравнение (35) не симметрично относительно X и Y .

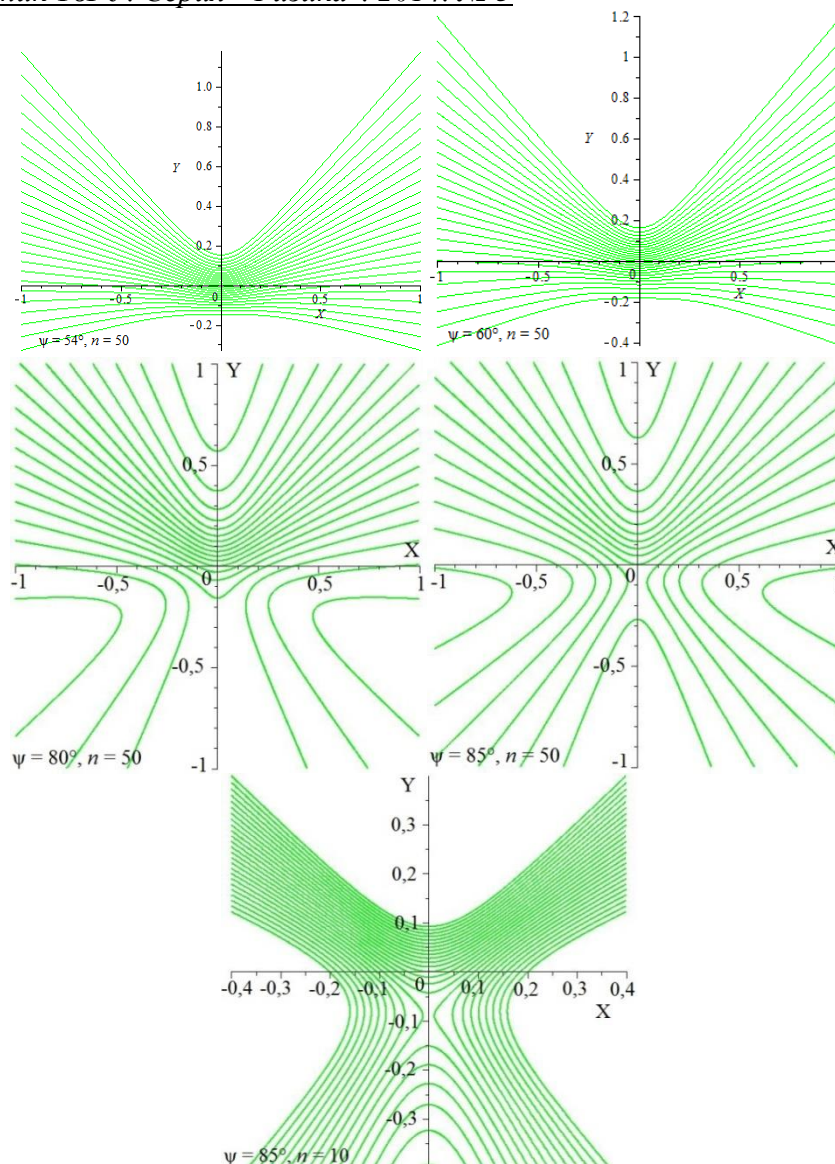
Анализ полученного уравнения приводит к следующим выводам:

- Уравнения изохром одноосного кристалла в самом общем случае является уравнением восьмой степени.
- Коноскопическая картина симметрична относительно оси Y – проекции оптической оси на плоскость наблюдения, - и не симметрична относительно оси X .
- При увеличении угла ψ от нуля изохромы уходят из центра картины, причем при малой угловой апертуре A в поле зрения попадает малое число изохром.

- Утверждение в [12] о том, что при углах ψ между нормалью и осью, для которых $\operatorname{tg} \psi < \sqrt{2}$, изохромы – эллипсы, а при углах, для которых $\operatorname{tg} \psi > \sqrt{2}$, изохромы – гиперболы, ошибочно.
- При увеличении угла ψ форма изохром изменяется, и вместо окружностей сначала возникают замкнутые кривые, сходные с эллипсами и овалами, несимметрично вложенными друг в друга. Изохромы высоких порядков теряют симметрию относительно центров кривых и напоминают некоторые кривые четвертого порядка – кардиоиды и улитки Паскаля.
- На одной и той же коноскопической фигуре при увеличении порядка изохром могут наблюдаться и замкнутые кривые, не являющиеся кривыми второго порядка, и кривые, напоминающие гиперболы. Однако это не гиперболы, поскольку на симметричных относительно оси Y ветвях кривой отчетливо наблюдаются точки перегиба.

Указанные закономерности представлены на рис. 5, где показаны рассчитанные по уравнению (34) изохромы при различных углах ψ между нормалью и оптической осью.

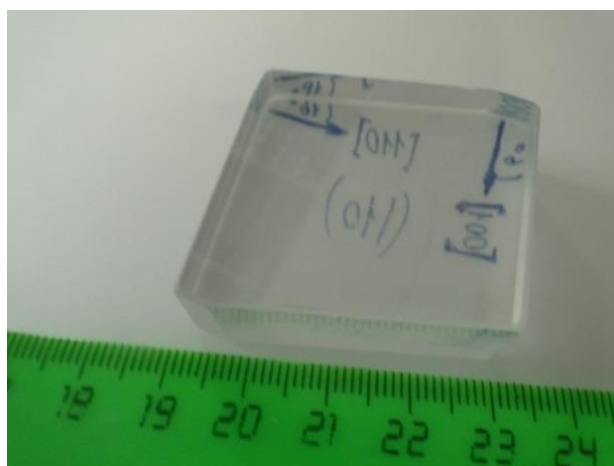




Р и с . 5. Изохромы в коноскопических картинах одноосного кристалла, рассчитанные согласно уравнению (34) при различных углах ψ между нормалью и оптической осью (n – шаг между порядками)

7. Экспериментальное подтверждение полученных соотношений. Для экспериментальной проверки вида изохром из крупного (диаметром 65 мм) монокристалла парателлуриата ($\alpha\text{-TeO}_2$), выращенного способом Чохральского, изготовлен оптический элемент с двумя парами взаимно параллельных отполированных граней.

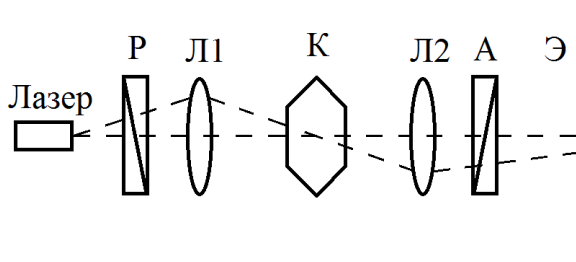
Ориентация одной пары граней соответствовала углу $\psi = 16^\circ$, другой - $\psi = 84^\circ$ (рис. 6).



Р и с . 6. Экспериментальный образец одноосного монокристалла парателлурифта с гранями, нормали к которым составляют углы $\psi = 16^\circ$ и $\psi = 84^\circ$ с оптической осью [001]

При получении коноскопических картин использована оптическая схема (рис. 7), включающая лазер с длиной волны излучения $\lambda = 533$ нм, поляризатор, линзу, преобразующую лазерный пучок в конический, анализатор, проекционную

линзу и полупрозрачный экран, за которым находилась цифровая камера для фиксации изображений изохром.



Р и с . 7. Оптическая схема для получения коноскопических картин с помощью лазера

Экспериментальные и рассчитанные теоретически коноскопические картины для кристаллов парателлурифта для углов

между оптической осью и нормалью $\psi = 16^\circ$ и $\psi = 84^\circ$ представлены на рис. 8.

Видно, что, рассчитанные и зафиксированные экспериментально формы изохром совпадают в пределах влияния шумов в реальных изображениях, связанных с неидеальностью элементов оптической схемы и структуры лазерного пучка света, проявлением спеклов и слабыми неоднородностями во внутренних объектах кристалла и его поверхностей

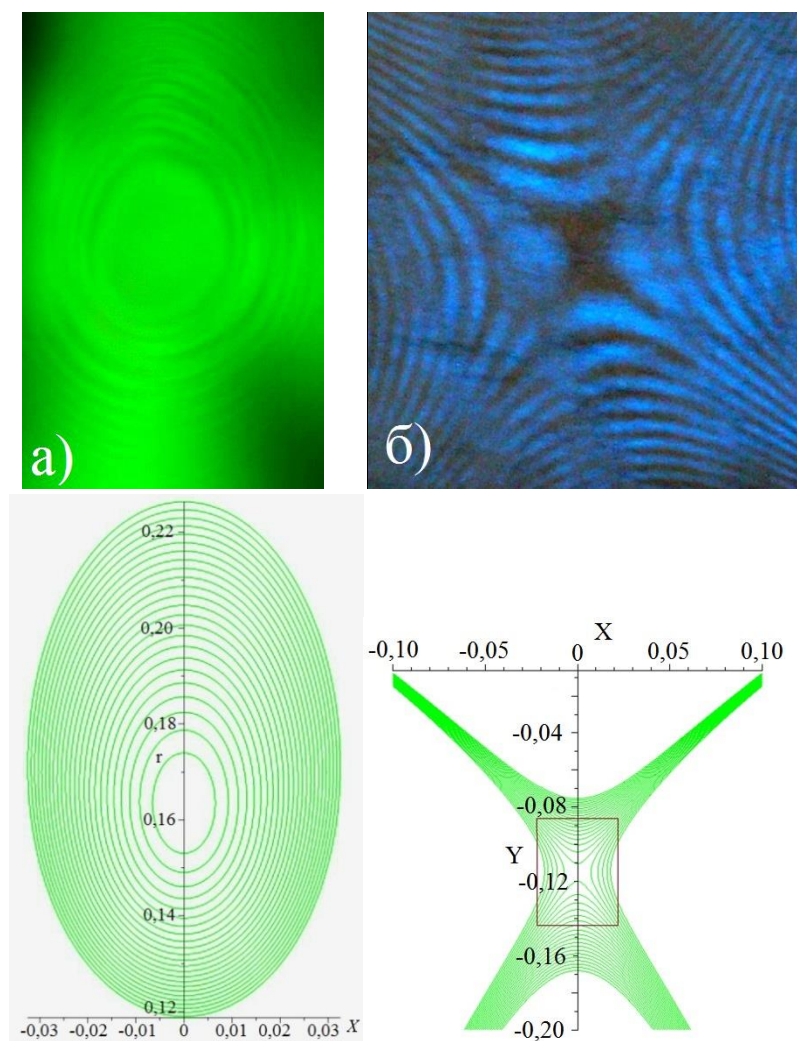


Рис. 8. Экспериментальные и теоретические коноскопические картины для элемента монокристалла парателлурита с гранями, нормали к которым составляют угол $\psi = 16^\circ$ (а) и $\psi = 84^\circ$ (б) с оптической осью [001].

До изготовления оптического элемента с редкими ориентациями граней этот же кристалл с первоначальными гранями, ортогональными оси [001], также был исследован методом коноскопии. При этом на всех картинах, одна из которых представлена на рис. 9, изохромы являлись окружностями, что для такой ориентации соответствует их теоретической форме в случае идеально однородных кристаллов.

Таким образом, наличие в коноскопических картинах исследованного кристалла изохром, не относящихся к кривым второго порядка, является естественным фактом, вытекающим из предложенной теории.

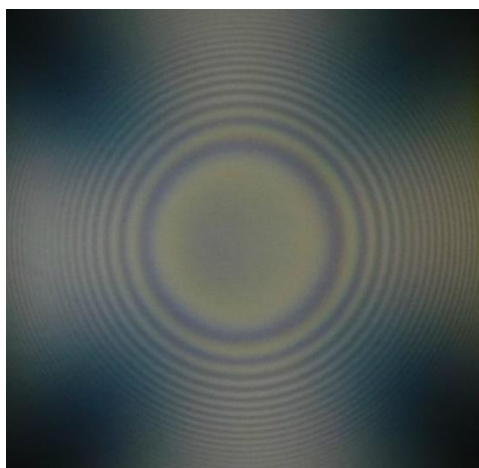
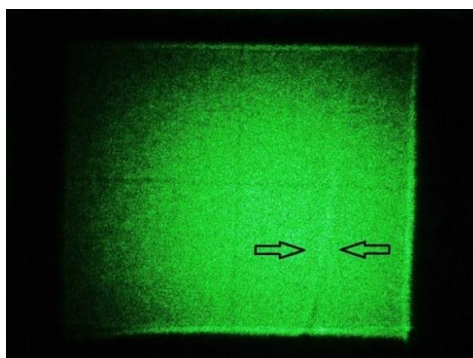


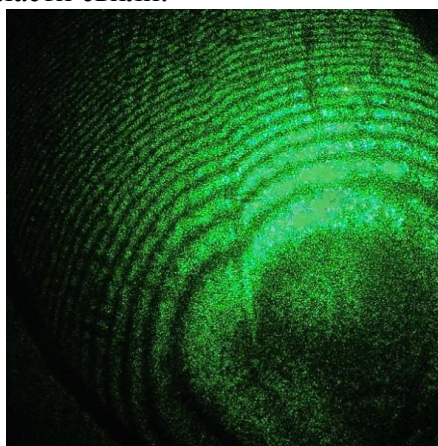
Рис. 9. Конаскопическая картина кристалла парателлурита, полученная в направлении оптической оси

8. Примеры технического применения результатов расчета местоположений и формы изохром. Определение вариаций показателей преломления и механических напряжений в объемах кристалла с оптическими аномалиями-свилями. Во многих кристаллах, как и в стеклах, при определенных неоптимальных условиях их получения образуются оптические аномалии – свиля. Иногда они различимы даже визуально. Свиля представляют собой узкие (50-100) мкм, длинные (зачастую – через весь кристалл) области с резко измененными показателями преломления, хорошо наблюдаемые на экране в дальней зоне при прохождении кристалла расширенным с помощью коллиматора пучком лазерного света (рис. 10).



Р и с . 1 0 . Свиль в крупногабаритном ($40 \times 30 \times 30$) мм элементе из монокристалла парателлуриата (указана стрелками), наблюдаемая на экране при освещении элемента расширенным плоскопараллельным пучком лазерного света с длиной волны излучения 533 нм

Значительно лучше свили видны при исследовании кристаллов методом коноскопии. В этом случае в области свили наблюдаются изломы на соседних изохромах, расположенные на одной прямой вдоль свили (рис. 11). Метод дает возможность по изменениям радиусов изохром ΔR , измеряемым в длинах волн (расстояние между соседними изохромами $R_i - R_{i+1}$ соответствует одной длине волны λ), рассчитать с помощью уравнения (34) изменения показателей преломления ΔN_o и ΔN_e . Далее по известным значениям пьзооптических коэффициентов $\pi_{\lambda c}$ или фотоупругих констант $P_{\lambda c}$ можно оценить механические напряжения σ в области свили.



Р и с . 1 1 . Серия изломов на соседних изохромах вдоль оптической аномалии – свили в коноскопической картине монокристалла парателлуриата, полученной на полупрозрачном экране в направлении оптической оси ($\psi = 0$)

На рис. 12 представлены зависимости ΔR (ΔN_0 , ΔN_e) для кристалла парателлуриата, полученные с помощью уравнения (34) (длина волны 533 нм). В кристалле со свилей, изображенной на рис. 10, 11, величина ΔR соответствует изменению разности хода $\Delta\lambda/\lambda = 0,20 - 0,25$, что дает оценку для $\Delta N_0, \Delta N_e \sim 0,01 - 0,03$. С помощью известного [10] приближенного соотношения $\sigma \sim 2(\Delta n/n)/n^2 ps$, где p и s – действующие значения фотоупругих констант и констант упругой податливости, получены достаточно большие значения механических напряжений $\sigma \sim (1 - 2) \cdot 10^7$ Па. Это должно служить поводом для изучения причины возникновения свилей и мотивом для оптимизации технологий выращивания парателлуриата из расплава.

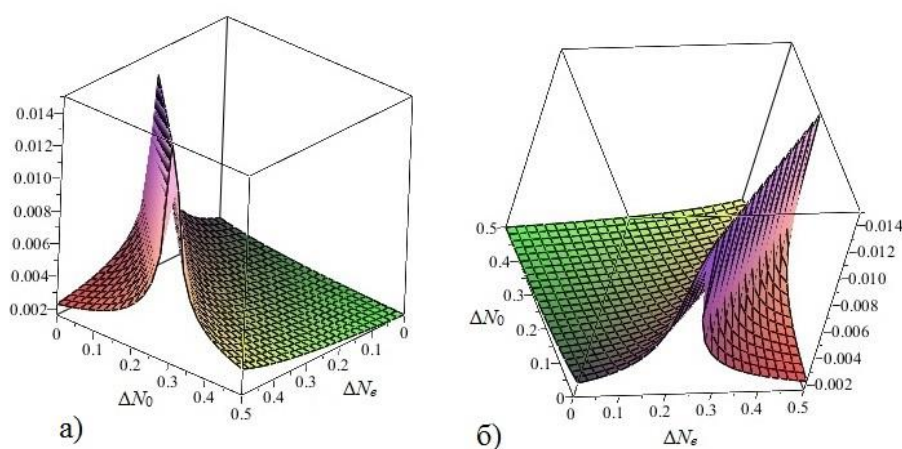
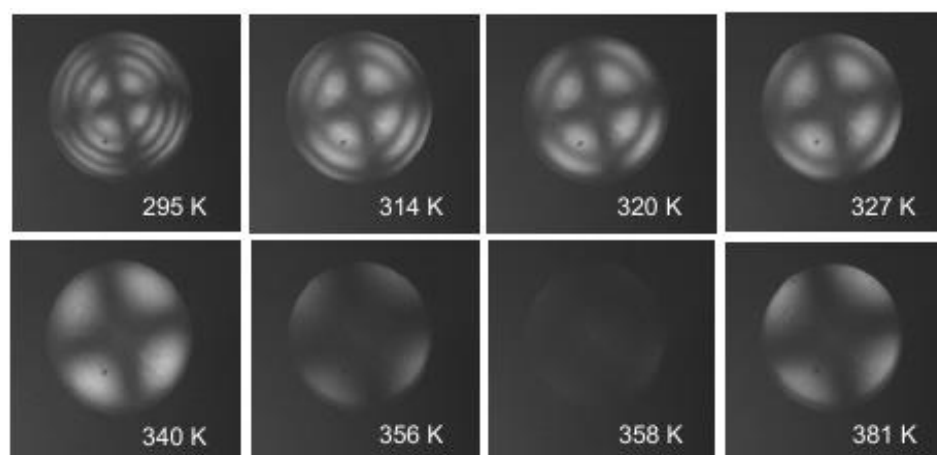


Рис. 12. Трехмерная зависимость изменения положения изохромы (2 порядка) в коноскопической картине монокристалла парателлуриата в направлении оптической оси для длины волны излучения $\lambda = 533$ нм от изменений показателей преломления обыкновенного ΔN_0 (а) и необыкновенного лучей ΔN_e (б)

9. Наблюдения инверсии оптического знака кристалла $SBN(S_{2x}Ba_{1-x}Nb_2O_6)$ при нагревании и охлаждении. Уравнение (34) использовано при расчетах оптимальных параметров опыта – толщины кристалла, угловой апертуры осветительной системы, фокусного расстояния проекционной системы, - имеющего целью получение коноскопических картин вдоль оптической оси положительного при комнатной температуре кристалла SBN при температурах ниже и выше точки, при которой происходит инверсия знака разности ($\Delta N_0 - \Delta N_e$) показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей.

При этом в самой точке кристалл является оптически изотропным [16]. Была собрана необходимая оптическая схема (включающая нагреватель), с помощью которой наблюдались теоретически рассчитанные коноскопические картины (рис. 13). При нагревании последовательно происходили увеличение расстояний между соседними изохромами и их уход из поля зрения до полного исчезновения при температуре 358 К, когда $\Delta N_0 = \Delta N_e$. При остывании кристалла наблюдалось точное повторение процесса в обратном порядке: появление изохром из-за границы поля зрения, увеличение их количества и стягивание всей картины к центру поля зрения.



Р и с . 1 3 . Коноскопические картины кристалла SBN, полученные в направлении оптической оси последовательно при нагревании и охлаждении и иллюстрирующие инверсию оптического знака кристалла при температуре 358 К

10. Заключение. Высокая чувствительность формы и положения изохром в коноскопических картинах одноосных кристаллов к малым изменениям их физических свойств, состояния и структуры делает перспективным развитие теоретических и технических аспектов метода коноскопии. С целью создания математического аппарата, позволяющего максимально точно рассчитывать положения и формы изохром при любых ориентациях нормали к оптическим граням относительно оптической оси кристалла, выведено уравнение кривой, описываемой вектором необыкновенной волны на выходной грани.

В общем случае эта кривая является эллипсом. Без обычно применяемых приближений, выведено уравнение для изохром любых порядков в плоскости наблюдения коноскопической картины одноосного кристалла. Уравнение изохром представлено в двух

вариантах записи. Первый вариант наиболее удобен на практике при компьютерных расчетах изохром и исследованиях изменений изохром в случаях различных физических воздействий на кристаллы, а также при изучении влияния тех или иных оптических аномалий материала на искажения теоретических коноскопических картин идеальных кристаллов. Второй вариант уравнения, имеющий, в основном, теоретическое значение, позволяет утверждать, что, поскольку оно имеет восьмой, а не второй и не четвертый порядки, наличие в экспериментальных коноскопических картинах изохром в виде кривых порядка выше второго физически обосновано.

Разработанный математический аппарат позволил сделать ряд выводов технического характера относительно влияния различных параметров оптической схемы, а также размеров и свойств кристаллов на вид коноскопических картин. Возможности и перспективы использования полученных расчетных методов протестированы при коноскопических исследованиях кристаллов, имеющих оптические неоднородности, а также при наблюдениях инверсии оптического знака кристалла SBN при нагревании и охлаждении.

Список литературы

1. Wen T.D., Raptis Y.S., Anastassakis E., Lalov I.I., Miteva A.I. Interference patterns under normal incidence of birefringent, optically active plane parallel plates // *I. Appl. Phys D: Appl. Phys.* 1995. V. 28. P.2128-2134.
2. Mamedov N., Yamamoto N., Shim Y., Ninomiya Y., Takizawa T. Extended application of light figures to optically active materials with transversally isotropic dielectric function // *Jap. J. Appl. Phys.* 2003. V. 42. P. 5045-5152.
3. Rudoi K.A., Navatov B.V., Strogonov V., Konstantinova A.F., Alekseeva L.V., Evtushenko E.A., Kidyarov B.I. Conoscopic Figures of Optically Active Uniaxial Crystals // *Crystallography Reports.* 2003. V. 48. №2. P.300-304.
4. Saito K., Sugavara S., Guo J.Q. and Tsai A.P. Determination of Quasi-Crystallographic Orientations of Al-Pd-Mn Icosahedral Phase by Means of Light Figure Method // *Jpn. J. Appl. Phys.* 2000. V. 39. P. 5173.
5. Punin O.Yu., Stuckenberg A.G. Anomalous Crystal Optics of Heterogeneous Crystals // *Crystallography Reports.* 2003. V. 50. №2. P. 297-307.
6. Sirat, G.Y.; Psaltis, D. Conoscopic Holography. // *Opt. Lett.* 1985. V. 10. P. 4-6.
7. Стойбер Р., Морзе С. Определение кристаллов под микроскопом // М.: Мир. 1974. С. 124-134 (Stoiber R. Morse S. Microscopic identification of crystals New York. 1972.: The Ronald Press Company).
8. Born Max, Wolf Emil. Principles of optics. //New York.: Pergamon press. 1985. P. 640-648.
9. Москалев В.А., Нагибина И.М., Полушкина Н.А., Рубин В.Л. Прикладная физическая оптика: Учебное пособие. – СПб: Политехника, 1995. 528 с.

10. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука. 1979. 640 с.
11. Kolesnikov A.I., Grechishkin R.M., Tretikov S.A., Molchanov V.Ya., Ivanova A.I., Kaplunova E.I., Vorontsova E.Yu. Laser conoscopy of large-sized optical crystals // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2013. V. 49. 012037.
12. Гречушников Б.Н., Желудев И.С., Залесский А.В., Пикин С.А., Семилетов С.А., Урусовская А.А., Чистяков И.Г., Шувалов Л.А. Современная кристаллография. Т.4. Физические свойства кристаллов. М.: Наука. 1981. 496 с.
13. Bajor A., Salbut L., Szwedowski A. Imaging conoscope for investigation of optical inhomogeneity in large boules of uniaxial crystals // Review of scientific instruments/ 1998. V. 69. №3. P. 1476-1487
14. Константинова А.Ф., Гречушников Б.Н., Бокуть Б.В., Валяшко Е.Г. Оптические свойства кристаллов. Минск: Наука и техника. 1995. 302 с.
15. Konstantinova A.F., Rudoy K.A., Nabatov B.V., Evtushenko E.A., Strogonov V.I., and Pikul O.Yu. The influence of Optical Activity on the Intensity and Polarization Parameters of Transmitted Light in Crystals // Crystallography Reports. 2003. V. 48. №5. P. 823-831.
16. Kolesnikov A.I., Grechishkin R.M., Malyshkina O.V., Malyshkin Yu.A., Dec J., Łukasiewicz T., Ivanova A.I. Conoscopic study of strontium-barium niobate single crystals // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2013. V. 49. 012010.

ISOCHROMES IN CONOSCOPIC FIGURES OF UNIAXIAL CRYSTALS

**N.V. Aidinyan, E.E. Aryamin, K.A. Morozova, A.V. Kostyuk,
D. S. Kutuzov, M.D. Kuzmina, M.S. Vorontsov**

Tver State University, 170100 Tver, Russia

An equation of the curve outlined by the wave vector of extraordinary ray outlet at the surface of parallel plate of uniaxial crystal having an arbitrary orientation of the optical axis for the case of incident wave rotation at any constant angle. In contrast to earlier works the equation for the phase difference between ordinary and extraordinary rays determining the position and shape of isochromes in uniaxial crystals are deduced without any approximations. An equation of 8th order is presented providing to obtain exact mathematical description and computer graphic presentation of the isochrome figures starting from the order of one up to thousands which should be observed in crystals with known parameters.

Keywords: *method of conoscopy, linearly polarized light, uniaxial crystals, isochromes, isogyres, anomalous biaxiality, ordinary and extraordinary rays, Fresnel equation*

Об авторах:

АЙДИНЯН Нарэк Ваагович – аспирант физико-технического факультета ТвГУ;

АРЯМИН Егор Евгеньевич – аспирант физико-технического факультета ТвГУ;

МОРОЗОВА Кристина Александровна – магистрант физико-технического факультета ТвГУ;

КОСТЮК Андрей Викторович – магистрант физико-технического факультета ТвГУ;

КУТУЗОВ Дмитрий Сергеевич – аспирант физико-технического факультета ТвГУ;

КУЗЬМИНА Мария Дмитриевна – магистрант физико-технического факультета ТвГУ;

ВОРОНЦОВ Михаил Сергеевич – магистрант физико-технического факультета ТвГУ.