Вестник ТвГУ. Серия "Физика". 2014.№ 4. С. 101-104

УДК 532.6: 541.183/.183.7

ИМПУЛЬСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА

В.Л. Скопич

Тверской государственный университет

кафедра теоретической физики

В работе рассматриваются два способа определения возможных значений импульса для частицы, движущейся в ограниченной области пространства, анализируется различие в результатах обоих подходов и устанавливается, что такая частица, если она находится в стационарном состоянии с определенным значением энергии E_n, не обладает определенным значением импульса.

Ключевые слова: *локализованная частица, стационарные состояния, коммутатор, операторная функция.*

Пусть имеется область пространства, ограниченная замкнутой стационарной поверхностью с абсолютно непроницаемыми стенками. Внутри этой поверхности свободно движется нерелятивистская частица. Решая стационарное уравнение Шредингера для такой системы $\hat{H}\psi_n = E\psi_n$, находим все собственные функции ψ_n и собственные значения E_n гамильтониана $\hat{H}$ [1]. Если частица находится в состоянии ψ_n, то она обладает энергией E_n. В соответствии с общими принципами квантовой механики связь между кинетической энергией $E = T$ и импульсом $\vec{p}$ в классической механике переходит в соответствующую связь между операторами $\hat{E} = \hat{\vec{p}}^2/2m$ и их собственными значениями. Таким образом, частица обладает не только дискретным значением энергии E_n, но и соответствующим дискретным значением импульса $p_n = \pm\sqrt{2mE_n}$ [2].

Теперь посмотрим на это состояние с другой стороны. Рассматриваемое состояние ψ_n означает, что $\psi_n(\vec{r}) \neq 0$ внутри замкнутой области и $\psi_n(\vec{r}) = 0$ на ограничивающей ее поверхности и везде вне рассматриваемой области. Другими словами, функция $\psi_n(\vec{r})$ не является периодической и, следовательно, может быть разложена в интеграл Фурье. Но разложение в интеграл Фурье (или, что то же, по собственным функциям оператора импульса $\hat{\vec{p}}$) означает, что при измерении импульса возможно любое его значение. Чтобы понять возникшее противоречие, рассмотрим конкретный пример, отражающий суть рассматриваемого вопроса и, в то же время, позволяющий решить задачу строго.

Рассмотрим частицу в потенциальной яме (одномерный случай) шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками. Решая уравнение

Шредингера, найдем все возможные состояния ψ_n и значения энергии E_n частицы в таком состоянии:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l}, \quad E_n = \frac{(\pi n \hbar)^2}{2ml^2}. \tag{1}$$

Собственными функциями оператора импульса $\hat{p} = \hbar\hat{k}$ (k – волновое число) являются плоские волны

$$\psi_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, \qquad \langle\psi_k(x)|\psi_{k'}(x)\rangle = \delta(k-k'), \tag{2}$$

нормированные на δ-функцию во всем пространстве. Разложение $\psi_n \equiv \psi$ по плоским волнам есть, по сути, прямое преобразование Фурье:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}c(k)dk, \tag{3}$$

где коэффициенты разложения $c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^l e^{-ikx}\psi(x)dx$ являются волновыми функциями в импульсном представлении.

Итак, нам нужно вычислить $c(k)$, квадрат модуля которого даст распределение вероятности различных значений волнового числа k (импульса p). В выражение для $c(k)$, беря интеграл два раза по частям, получим уравнение для $c(k)$:

$$c(k) = \frac{\pi n}{k^2 l}\frac{1}{\sqrt{\pi l}}e^{ikx}\cdot cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l + \frac{i\pi n}{kl}c(k).$$

Отсюда $c(k) = n\sqrt{\pi l}\frac{1-(-1)^n e^{-ikl}}{\pi^2 n^2 - k^2 l^2}$, или окончательно

$$|c(k)|^2 = |c(-k)|^2 = \frac{4\pi l n^2}{(\pi^2 n^2 - k^2 l^2)^2}\cdot\begin{cases} cos^2\frac{kl}{2}, n - \text{нечетное} \\ sin^2\frac{kl}{2}, n - \text{четное}\end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что $c(k) = c^*(-k)$. Это означает наличие стоячей волны, зависящей от времени по гармоническому закону $e^{\frac{iE_n t}{\hbar}}$, что следует из динамического уравнения Шредингера для стационарного случая. Такая волна образуется из множества попарно бегущих в противоположных направлениях волн с одинаковой амплитудой и частотой. Из (4) следует, что при фиксированном l распределение $|c(k)|^2 \rightarrow const$, если k $\rightarrow \frac{\pi n}{l}$. Если же k $= \frac{\pi n}{l}$, то при $l \rightarrow \infty$ распределение $|c(k)|^2 \rightarrow 0$. Характер зависимости $c(k)$ позволяет считать импульсное распределение частицы квазидискретным, хотя, строго говоря, оно непрерывно. Итак, для любого k $(-\infty < k < \infty)$ существует отличная от нуля вероятность получить это значение при измерении. Но это противоречит наличию определенного дискретного значения $p_n = \pm\sqrt{2mE_n}$, указанного выше, в состоянии ψ_n.

Посмотрим сначала, выполняется ли соотношение неопределенности для частицы в состоянии ψ_n. Вычисляя среднеквадратичное отклонение для координаты, получим (черта означает усреднение по ψ_n):

$$\overline{\left(\hat{x}-\bar{\hat{x}}\right)^2}=\frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(\pi n)^2}\right)$$

Аналогично для импульса

$$\overline{\left(\hat{p}-\bar{\hat{p}}\right)^2}=\frac{(\pi n\hbar)^2}{l^2}$$

Заметим, что среднее значение импульса $\bar{\hat{p}}=0$, а не $\sqrt{2mE_n}$, как можно было бы ожидать. При этом, с соотношением неопределенности все оказывается в порядке:

$$\overline{\left(\hat{x}-\bar{\hat{x}}\right)^2}\cdot\overline{\left(\hat{p}-\bar{\hat{p}}\right)^2}>\frac{\hbar^2}{4}.$$

Это означает, что частица в состоянии ψ_n не должна обладать определенным значением импульса.

Обратим внимание на то, что энергия частицы есть функция от импульса и посмотрим, как определяется оператор $\hat{F}$, который является функцией оператора $\hat{A}$: $\hat{F}=F(\hat{A})$ [3]. Такой оператор-функция $\hat{F}$ определяется как разложенная в степенной ряд по аргументу функция

$$F(x)=\sum_n\frac{F_{(0)}^{(n)}}{n!}x^n,$$

в которой аргумент x заменен на оператор $\hat{A}$. Из определения $\hat{F}$ следует, что коммутатор $[\hat{A},\hat{F}]=0$, т.е. $\hat{A}$ и $\hat{F}$ имеют общую систему собственных функций. Но при этом, если любая собственная функция оператора $\hat{A}$ является, одновременно, и любой собственной функцией оператора $\hat{F}$, то обратное утверждение будет несправедливым, т.е. из $\hat{A}\varphi_i=A_i\varphi_i$ следует $F(\hat{A})\varphi_i=F(A_i)\varphi_i$. Но из $\hat{F}\psi_i=F_i\psi_i$ не следует, что всегда будет $\hat{A}\psi_i=A_i\psi_i$ [4].

В нашем случае $\hat{F}\equiv\hat{E}$, $\hat{A}\equiv\hat{p}$, т.е. $\hat{E}=\frac{\hat{p}^2}{2m}$. Другими словами, ψ_n – есть собственная функция оператора $\hat{E}$, но не есть функция оператора $\hat{p}$, что и означает отсутствие дискретного спектра значений импульса частицы.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т.3. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.

2. Давыдов А.С. Квантовая механика. М.: Наука, 1963. 748 с.

3. Ферми Э. Квантовая механика. Изд-во «Мир», 1968. 368 с.
4. Скопич В.Л. // Вестник ТвГУ. Серия «Физика», 2013. Вып. 20. С.96.

IMPULSE DISTRIBUTION FOR PARTICLE, MOVING IN LIMITED SPACE REGION

V. L. Skopich
Tver State University
Chair of Theoretical Physics

In this article has been considered two ways of definition the possible values of impulse for particle, moving in limited space region. Analysis of difference in results permitted to establish, that such localized particle, being in stationary state with definite value of energy, do not have definite value of impulse.
Keywords: *localized particle, stationary state, commutator of two operators, function of operator.*

Об авторах:

СКОПИЧ Виктор Леонидович– канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики Тверского государственного университета;