

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНЫХ  
ВРАЩАЮЩИХСЯ НЬЮТОНОВСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ  
ВЫРОЖДЕННОГО ФЕРМИ-ГАЗА**

**Михеев С.А., Цветков В.П.**

Кафедра общей математики и математической физики

---

*Поступила в редакцию 31.03.2009, после переработки 10.06.2009.*

---

В работе получено полиномиальное и политропное приближения уравнений состояния вырожденного ферми-газа. На их основе построена математическая модель равновесных вращающихся конфигураций.

In this research we have obtained the polynomial and polytropic approximations of the equations of degenerate fermi gas condition. On the basis of these equations we have developed a mathematical equilibrium rotating configuration model.

**Ключевые слова:** математическая модель, вращающиеся ньютоновские конфигурации, вырожденный ферми-газ, полином, политропа.

**Keywords:** mathematical model, rotating Newtonian configurations, degenerate fermi gas, polynomial, polytropic.

## Введение

Создание высокоточной математической модели гравитирующих быстро вращающихся конфигураций актуально в связи с изучением плотных и сверхплотных астрофизических объектов: белых карликов и пульсаров, которые являются, по современным представлениям, вращающимися намагниченными нейтронными звездами. Основным вопросом при этом является выяснение влияния быстрого вращения и уравнений состояния на распределение плотности  $\rho(\mathbf{r})$ .

В основу развиваемой в данной работе математической модели равновесных вращающихся ньютоновских конфигураций положим интегральное уравнение в  $R^3$  с подвижной границей [1]:

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' - K_0 \int_{p(\mathbf{r})}^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}(p)} - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a_1^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\tilde{\rho} = \rho/\rho_c \geq 0$ ,  $\rho_c$  - плотность в центре,  $p = P/P_c$  - отношение давления к центральному значению давления,  $K_0 = P_c/(2\pi G \rho_c^2 a_1^2)$ ,  $\mathbf{r}_\perp = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ,  $x_1 = x/a_1$ ,  $x_2 = y/a_1$ ,  $x_3 = z/a_3$ ;  $a_1, a_3$  - полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации,  $\varepsilon = \omega^2/(4\pi G \rho_c)$ ,  $\omega$  - угловая скорость вращения,  $G$  - гравитационная постоянная,  $D$  - область  $R^3$ , в которой  $\tilde{\rho} \geq 0$ .

## 1. Основные уравнения модели

Для решения уравнения (1) мы должны знать конкретный вид уравнения состояния  $P = P(\rho)$  или в нашем случае  $p = p(\tilde{\rho})$ . Второй член в (1) в общем случае существенно нелинеен по  $\tilde{\rho}$ , что создает большие сложности при его решении. Запишем его в виде

$$\int_p^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}(p)} = \Theta(\tilde{\rho} = 1) - \Theta(\tilde{\rho}), \quad \Theta(\tilde{\rho}) = \int_0^p \frac{dp}{\tilde{\rho}(p)}. \quad (2)$$

Для полностью вырожденного ферми-газа электронов в плазме [2]:

$$P = \frac{m_e}{\mu_e m_n} \rho_0^{(e)} c^2 f(x), \quad f(x) = \int_0^x \frac{y^4 dy}{\sqrt{1+y^2}}, \quad (3)$$

$x = \left(\rho/\rho_0^{(e)}\right)^{1/3}$ ,  $\rho_0^{(e)} = \mu_e m_n m_e^3 c^3 / (3\pi^2 \hbar^3)$ ,  $m_e$  - масса электрона,  $m_n$  - масса нейтрона,  $c$  - скорость света,  $\hbar$  - постоянная Планка,  $\mu_e = A/Z$ ,  $A$  - атомный номер химического элемента, а  $Z$  - его порядковый номер.

Формулы (3) определяют уравнение состояния вырожденного газа электронов в белых карликах. Это уравнение получило в литературе название уравнения состояния Чандрасекара, который применил его для описания белых карликов. На его основе Чандрасекар установил предельно допустимую массу белых карликов в отсутствии вращения  $1.4m_\odot$ .

Для полностью вырожденного ферми-газа нейтронов [2]:

$$P = \rho_0^{(n)} c^2 f(x), \quad x = \left(\frac{\rho}{\rho_0^{(n)}}\right)^{1/3}, \quad \rho_0^{(n)} = \frac{m_n^4 c^3}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (4)$$

Уравнение (4) получило название уравнение состояния Оппенгеймер-Волкова, которые использовали его для расчета вырожденных нейтронных конфигураций (нейтронных звезд).

Формулы (3) и (4) можно объединить:

$$P = g_{e,n} \rho_0^{(e,n)} c^2 f(x), \quad x = \left(\frac{\rho}{\rho_0^{(e,n)}}\right)^{1/3}, \quad (5)$$

где  $g_n = 1$ ,  $g_e = m_e / (\mu_e m_n)$ .

Тогда

$$\Theta(\tilde{\rho}) = \frac{\rho_c}{P_c} \int_0^{\tilde{\rho}} \frac{dP}{d\rho'} \frac{d\rho'}{\rho'} = \frac{\rho_c}{P_c \rho_0^{(e,n)}} \int_0^x \frac{dP}{dy} \frac{dy}{y^3} = \frac{g_{e,n} \rho_c c^2}{P_c} \int_0^x \frac{f'(y) dy}{y^3}, \quad (6)$$

$$\Theta(\tilde{\rho}) = K_{e,n} f(k, \tilde{\rho}), \quad k = \left(\frac{\rho_c}{\rho_0^{(e,n)}}\right)^{2/3},$$

$$K_{e,n} = \frac{g_{e,n} \rho_c^2 c^2}{2P_c} (\sqrt{1+k} - 1), \quad f(k, \tilde{\rho}) = \frac{\sqrt{1+k\tilde{\rho}^{2/3}} - 1}{\sqrt{1+k} - 1}.$$

Уравнение (1) в случае вырожденного ферми-газа приобретает вид:

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + K_0^{e,n} (f(k, \tilde{\rho}) - 1) - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_1^2}{a_1^2} = 0, \quad (7)$$

$$K_0^{e,n} = \frac{g_{e,n} c^2}{4\pi G \rho_c a_1^2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_c}{\rho_0^{(e,n)}} \right)^{2/3}} - 1 \right).$$

Дальнейшее упрощение (7) связано с аппроксимацией функции  $f(k, \tilde{\rho})$  многочленами наилучшего приближения в  $L_2$ . Полиномиальная аппроксимация этой функции и применение методов компьютерной алгебры позволят в дальнейшем построить эффективные методы решения уравнения (7) с использованием полиномов по пространственным переменным.

При  $0 \leq k \leq 1$  представим  $f(k, \tilde{\rho})$  в виде полинома по переменным  $k$  и  $\tilde{\rho}$  степеней  $N_1$  и  $N_2$  соответственно:

$$f_{N_1, N_2}(k, \tilde{\rho}) = \sum_{l=1}^{N_2} \left( \sum_{d=0}^{N_1} f_{dl}^{(1)} k^d \right) \tilde{\rho}^l, \quad (8)$$

а при  $1 \leq k < \infty$

$$f_{N_1, N_2}(k, \tilde{\rho}) = \sum_{l=1}^{N_2} \left( \sum_{d=0}^{N_1} f_{dl}^{(2)} \left( \frac{1}{k} \right)^d \right) \tilde{\rho}^l. \quad (9)$$

Погрешность аппроксимации будет оцениваться в  $C$  метрике

$$\delta_{N_1, N_2} = \max_{0 \leq k < \infty, 0 \leq \tilde{\rho} \leq 1} \{|f(k, \tilde{\rho}) - f_{N_1, N_2}(k, \tilde{\rho})|\}. \quad (10)$$

## 2. Результаты численных расчетов параметров модели

Для вычисления коэффициентов  $f_{dl}^{(1)}$  и  $f_{dl}^{(2)}$  мы воспользовались пакетом *CurveFitting* системы символьной математики MAPLE. В случае  $N_1 = N_2 = N = 6$  результаты вычисления приводятся в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1.

$l \setminus d$	0	1	2	3	4	5	6
1	2.9933	0.6759	-0.2038	0.0922	-0.0447	0.0166	-0.0031
2	-10.7738	-3.2174	0.6619	-0.2608	0.1278	-0.0479	0.0088
3	29.8382	8.4798	-1.5933	0.7021	-0.3795	0.1476	-0.0275
4	-44.7617	-12.5615	2.4306	-1.1603	0.6366	-0.2458	0.0454
5	33.6338	9.3851	-1.8419	0.8937	-0.4836	0.1839	-0.0336
6	-9.9314	-2.7623	0.5465	-0.2668	0.1434	-0.0543	0.0099

Таблица 2.

$l \setminus d$	0	1	2	3	4
1	6.4832	-17.4110	59.1124	-122.3321	146.6324
2	-33.1299	124.8272	-440.6527	926.5340	-1119.2038
3	96.1936	-388.7733	1397.3330	-2961.1474	3591.1409
4	-146.7370	609.9073	-2211.2972	4705.0243	-5718.2259
5	111.1694	-468.8905	1708.4646	-3643.8171	4434.2082
6	-32.9847	140.3639	-513.0480	1095.9276	-1334.7833

$l \setminus d$	5	6
1	-93.1535	24.1964
2	714.0931	-185.9806
3	-2296.5161	598.9737
4	3661.3777	-955.7249
5	-2841.4126	742.0611
6	855.7603	-223.5646

Погрешность аппроксимации  $f(k, \tilde{\rho})$  составила  $\delta_{6,6} = 2.25 \cdot 10^{-2}$ .

В результате мы получили представление  $\Theta(\tilde{\rho})$  в виде полиномов по степеням  $\tilde{\rho}$ ,  $k$  и  $1/k$ :

$$\Theta_{N_1, N_2}(\tilde{\rho}, k \leq 1) = \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{d=0}^{N_1} f_{dl}^{(1)} k^d \tilde{\rho}^l, \quad (11)$$

$$\Theta_{N_1, N_2}(\tilde{\rho}, k \geq 1) = \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{d=0}^{N_1} f_{dl}^{(2)} \left(\frac{1}{k}\right)^d \tilde{\rho}^l.$$

Подставляя (11) в интеграл  $K_{e,n} \left( \tilde{\rho} \Theta(\tilde{\rho}) - \int_0^{\tilde{\rho}} \Theta(\tilde{\rho}) d\tilde{\rho} \right)$ , получаем аппроксимацию уравнения состояния:

$$P_{N_1, N_2} = \frac{1}{2} g_{e,n} \rho_c c^2 \sum_{l=1}^{N_2} \frac{l}{l+1} \left( \sum_{d=0}^{N_1} f_{dl}^{(1)} k^d \right) \tilde{\rho}^{l+1}, \quad (k \leq 1), \quad (12)$$

$$P_{N_1, N_2} = \frac{1}{2} g_{e,n} \rho_c c^2 \sum_{l=1}^{N_2} \frac{l}{l+1} \left( \sum_{d=0}^{N_1} f_{dl}^{(2)} \left(\frac{1}{k}\right)^d \right) \tilde{\rho}^{l+1}, \quad (k \geq 1).$$

При анализе уравнений состояния часто используют приближение в форме политропы  $P = K \rho^{1+1/n}$  ( $n$  - называют индексом политропы).

Для этого функцию  $f(k, \tilde{\rho})$  приблизим степенной функцией  $\tilde{\rho}^{1/n(k)}$  в  $L_2$  метрике. В результате имеем:

$$n(k) = \left( \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \tilde{\rho} \cdot \ln f(k, \tilde{\rho}) d\tilde{\rho} \right)^{-1}. \quad (13)$$

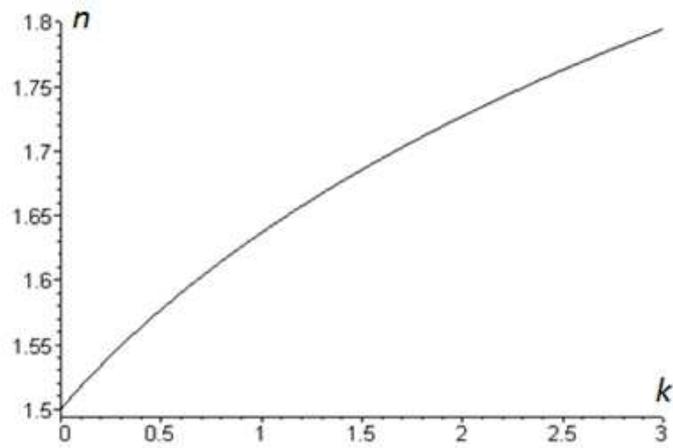


Рис. 1: График функции  $n(k)$  при  $0 \leq k \leq 3$ .

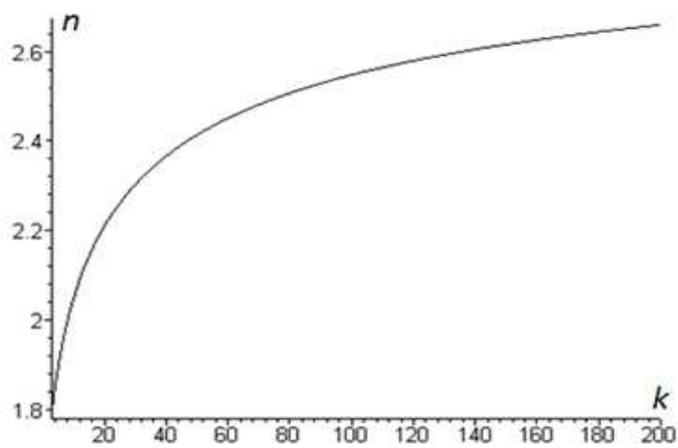


Рис. 2: График функции  $n(k)$  при  $3 \leq k \leq 2 \cdot 10^2$ .

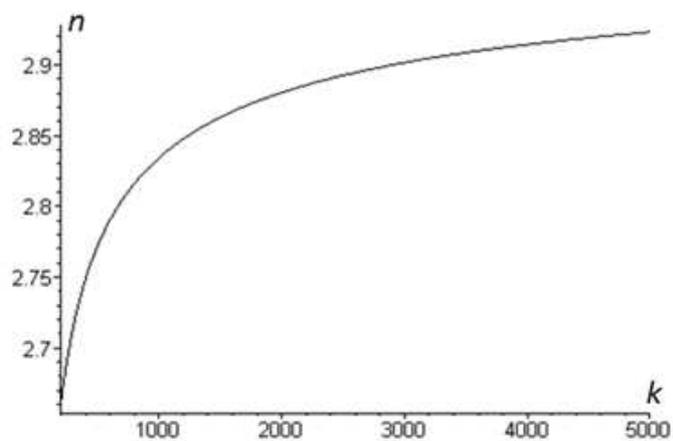


Рис. 3: График функции  $n(k)$  при  $2 \cdot 10^2 \leq k \leq 5 \cdot 10^3$ .

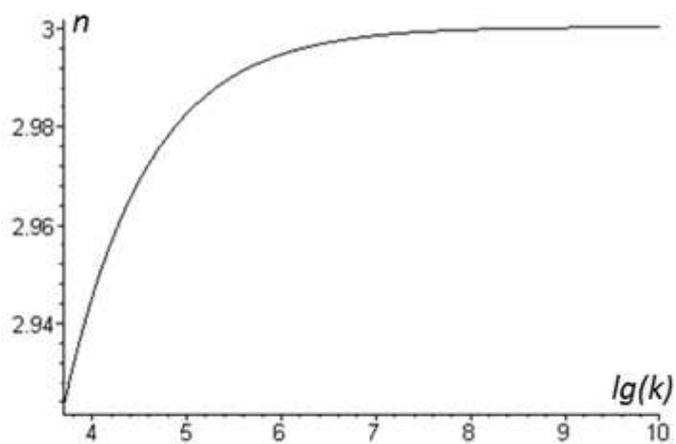
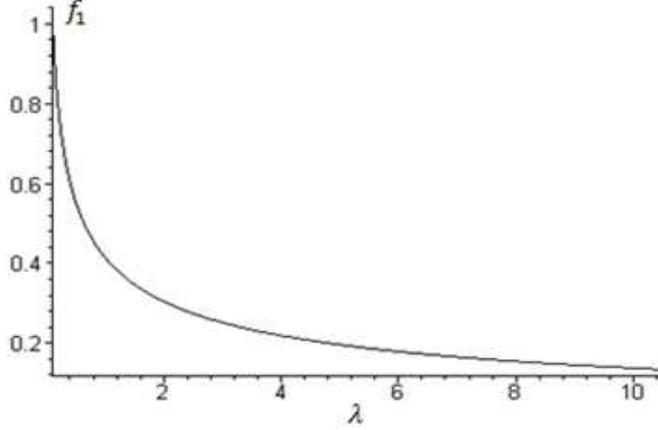


Рис. 4: График функции  $n(\lg(k))$  при  $5 \cdot 10^3 \leq k \leq 10^{10}$ .

Рис. 5: График функции  $f_1(\lambda)$ .

Графики зависимости индекса политропы  $n$  от параметра  $k$  приводятся на рисунке 1 ( $0 \leq k \leq 3$ ), рисунке 2 ( $3 \leq k \leq 2 \cdot 10^2$ ), рисунке 3 ( $2 \cdot 10^2 \leq k \leq 5 \cdot 10^3$ ), а на рисунке 4 представлен график зависимости  $n(\lg(k))$  ( $5 \cdot 10^3 \leq k \leq 10^{10}$ ).

Погрешность аппроксимации в интервале всех значений  $k$ , вычисленная в  $C$  метрике, будет  $2 \cdot 10^{-2}$ . В результате уравнение состояния вырожденного ферми-газа представляется политропой индекса  $n = n(k)$ :

$$P \cong g_{e,n} \frac{\rho_c c^2}{2(1+n)} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_c}{\rho_0^{(e,n)}} \right)^{\frac{2}{3}}} - 1 \right) \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1+\frac{1}{n}}. \quad (14)$$

Отсюда:  $P_c = (g_{e,n} \rho_c c^2 / (2(1+n))) \left( \sqrt{1 + (\rho_c / \rho_0^{(e,n)})^{2/3}} - 1 \right)$  и  $K_{e,n} = 1 + n$ ,

$\Theta(\tilde{\rho}) = (1+n)f(k, \tilde{\rho})$ .

При  $k \ll 1$  из (13) имеем  $n = 2/3$ , а при  $k \gg 1$   $n = 3$ .

Представляет интерес использования (14) для описания реалистических уравнений состояния, когда учитывается эффект сильного взаимодействия между нейтронами. С этой целью может быть использован метод аналитического продолжения (14) по параметрам  $n$  и  $\rho_0^{(n)}$ . Для идеального ферми-газа нейтронов  $\rho_0^{(n)} = 6.1 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$ . Это значение дает характерную плотность ферми-газа при которой начинается релятивистское вырождение.

Для других уравнений состояния  $\rho_0^{(n)}$  также равна характерной плотности нейтронного газа, при которой имеет место данное уравнение состояния.

Взяв  $\rho_0^{(n)} = 6 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_c = 10^{15} \text{ г/см}^3$ ,  $n = 0.65$ , мы хорошо воспроизведем уравнение состояния Бете-Джонсона [2].

Используя в (7) приближение  $f(k, \tilde{\rho}) \cong f_{N_1, N_2}(k, \tilde{\rho})$ , мы получаем интегральное уравнение равновесного вращающегося ферми-газа в полиномиальном приближении по плотности  $\tilde{\rho}$ :

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + K_0^{e,n} (f_{N_1, N_2}(k, \tilde{\rho}) - 1) - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_1^2}{a_1^2} = 0, \quad (15)$$

В уравнение (15) входит важный коэффициент  $K_0^{e,n}$ , зависящий от  $\rho_c$ ,  $\rho_0^{(e,n)}$  и  $a_1$ . Зависимость его от  $\rho_c$  определяется функцией  $f_1(\lambda) = \left( \sqrt{1 + \lambda^{2/3}} - 1 \right) / \lambda$  ( $\lambda = \rho_c / \rho_0^{(e,n)}$ ). График  $f_1(\lambda)$  приводится на рисунке 5.

### Заключение

Полиномиальное представление  $f(k, \tilde{\rho})$  позволяет использовать построенный в [3] комплекс символьно-численных программ для приближенного аналитического решения уравнения (15) с применением полиномов наилучшего приближения по координатам в  $L_2$  при аппроксимации  $\tilde{\rho}$ .

Решение уравнения (15)  $\tilde{\rho}(k, \mathbf{r})$  для различных значений параметра  $k$  будет проведено в дальнейших работах.

### Список литературы

- [1] Михеев С.А., Цветков В.П. Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политропов с показателем близким к единице. Письма в ЭЧАЯ, 2008, т. 5, №4(146), с. 675-687.
- [2] С. Шапиро, С. Тюкольский. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч.1-2, М.: Мир, 1985.
- [3] Беспалько Е.В., Михеев С.А., Пузынин И.В., Цветков В.П. Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния. Мат. моделирование, 2006, т. 118, №3, с. 103-119.