

## МОДЕЛИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 539.3

### О ВЗАИМОВЛИЯНИИ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАГРУЖЕННОМ ТЕЛЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ<sup>1</sup>

Зингерман К.М.

Кафедра вычислительной математики

Рассматривается при конечных деформациях приближенное аналитическое решение плоской задачи об образовании нескольких круговых упругих включений (областей с другими свойствами) в предварительно нагруженном изотропном бесконечно протяженном упругом теле. Постановка задачи осуществляется на основе теории наложения больших деформаций. Решение находится методом малого параметра. Линеаризованные задачи решаются с использованием функций комплексных переменных и интегралов типа Коши.

The plane problem of origination of some circular elastic inclusions (regions with other properties) in a pre-loaded infinite isotropic elastic body is solved using an approximate analytical technique. The problem is formulated on the foundation of the theory of repeated superposition of large deformations. The perturbation technique is used for solution. The solution of linearized problems is found using the complex variable theory, and integrals of the type of Cauchy.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние; упругость; наложение конечных деформаций; плоская задача.

**Keywords:** mode of deformation; elasticity; superposition of finite strains; plane problem.

**Введение.** Исследуется напряженно-деформированное состояние бесконечно протяженного упругого тела, в котором после предварительного нагружения одновременно образуются несколько круговых упругих включений, при конечных деформациях. Задача рассматривается в двумерной постановке (плоская деформация). Считается, что включения принимают круговую форму в момент их образования (в промежуточном состоянии). Механические свойства исходного материала тела и материала включений описываются потенциалом типа Мурнагана (сжимаемый материал) или Муни (несжимаемый материал).

**1. Постановка задачи.** Механическая постановка задачи следующая. В начальном (ненапряженном) состоянии в теле отсутствуют напряжения и деформации. Затем под воздействием внешней начальной нагрузки, приложенной к телу,

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 06-01-00682-а.

в нем накапливаются начальные большие плоские деформации и соответствующие им напряжения. Тело переходит в промежуточное состояние. В области, занимаемой телом, мысленно намечается несколько замкнутых цилиндрических поверхностей — границы включений в момент их образования. Образующие этих поверхностей перпендикулярны плоскости деформации. Далее скачкообразно меняются механические свойства материала в тех частях тела, которые ограничены намеченными поверхностями. Это вызывает возникновение в теле дополнительных больших (по крайней мере, в окрестности вновь образованных граничных поверхностей) деформаций и напряжений, которые накладываются на начальные. Изменяется граница тела, и оно переходит в конечное (текущее) состояние. Форма и взаимное расположение включений задаются в момент их образования.

Математическая постановка задачи формулируется на основе теории многократного наложения больших деформаций в координатах промежуточного состояния. Считается, что механические свойства материалов матрицы и включения описываются определяющими соотношениями типа Мурнагана или Муни [3] и что образование включения не меняет напряжений и деформаций на бесконечности. Массовые силы считаются равными нулю, начальные напряжения и деформации считаются однородными.

Пусть индекс 0 соответствует начальному состоянию, 1 — промежуточному, 2 — конечному. Используются следующие обозначения [1, 2]:

$\mathbf{u}_n$  — вектор перемещений, характеризующий переход из предыдущего  $(n-1)$ -го состояния в последующее  $n$ -е состояние ( $\mathbf{u}_1$  — вектор начальных перемещений,  $\mathbf{u}_2$  — вектор дополнительных перемещений);

$\overset{p}{\nabla}$  — градиент;

$\Psi_{q,p}$  — аффино́р деформаций при переходе тела из состояния  $q$  в состояние  $p$  ( $\Psi_{0,1}$  — аффино́р начальных деформаций,  $\Psi_{1,2}$  — аффино́р дополнительных деформаций);

$\Delta_{m,n}$  — относительное изменение объема при переходе из  $m$ -го в  $n$ -е состояние;

$\sigma_{0,n}$  — тензор истинных напряжений, описывающий накопленные в теле напряжения при переходе из начального в  $n$ -е состояние;

$p_{0,n}$  — множитель Лагранжа для  $n$ -го состояния (для несжимаемых материалов);

$\overset{k}{\mathbf{E}}_{m,n}$  — тензор деформаций при переходе из  $m$ -го в  $n$ -е состояние, отнесенный к базису  $k$ -го состояния;

$\mathbf{F}_{m,n}$  — тензорная мера деформаций при переходе из  $m$ -го в  $n$ -е состояние, соответствующая мере Фингера;

$\overset{m}{\Sigma}_{0,n}$  — тензор обобщенных (полных для  $n$ -го состояния) напряжений, определенный в координатном базисе произвольного  $m$ -го состояния;

$\Gamma^{(i)}$  — граница  $i$ -го контура ( $i = 1, \dots, L$ ,  $L$  — количество включений) в координатах промежуточного состояния;

$\mathbf{N}^{(i)}$  — нормаль к  $\Gamma^{(i)}$ ;

$S^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, L$ ) — область, внешней границей которой является контур  $\Gamma^{(i)}$ ;

$S^{(0)}$  — бесконечная область, ограниченная контурами  $\Gamma^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, L$ ).

Как известно [1, 2], прежде чем решать задачу для конечного состояния в координатах промежуточного состояния, необходимо найти вектор начальных перемещений  $\mathbf{u}_1$  или аффино́р начальных деформаций  $\Psi_{0,1}$ , т.е. решить задачу для про-

межуточного состояния в координатах этого состояния. Отметим, что вследствие однородности материала тела в начальном состоянии начальные деформации будут однородны. Задача нахождения начальных деформаций проста и в данной статье не рассматривается.

Рассмотрим постановку задачи для конечного состояния в координатах промежуточного состояния. Уравнение равновесия может быть записано в виде

$$\frac{1}{\nabla} \cdot \left[ (1 + \Delta_{0,1})^{-1} \overset{1}{\Sigma}_{0,2} \cdot \Psi_{1,2} \right] = 0, \quad (1)$$

здесь

$$\overset{1}{\Sigma}_{0,2} = (1 + \Delta_{0,2}) \Psi_{1,2}^{*-1} \cdot \sigma_{0,2} \cdot \Psi_{1,2}^{-1}. \quad (2)$$

Для несжимаемого материала (материала Муни) должно выполняться условие

$$\Delta_{0,n} = 0. \quad (3)$$

Определяющие соотношения для исходного материала (материала матрицы) записываются в форме, соответствующей потенциалу Мурнагана

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Sigma}_{0,2} = & \lambda_M \overset{0}{(\mathbf{E}_{0,2} : \mathbf{I})} \mathbf{I} + 2G_M \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} + 3C_3^M \left( \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} : \mathbf{I} \right)^2 \mathbf{I} + \\ & + C_4^M \left( \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} : \mathbf{I} \right)^2 \mathbf{I} + 2C_4^M \left( \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} : \mathbf{I} \right) \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} + 3C_5^M \left( \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} \right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

или потенциалу Муни

$$\sigma_{0,2} = \frac{G_M}{2} \left\{ (1 + \beta^{(0)}) \mathbf{F}_{0,2} + (1 - \beta^{(0)}) \left[ \left( \mathbf{F}_{0,2} : \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_{0,2} - \mathbf{F}_{0,2}^2 \right] \right\} - p_{0,2} \mathbf{I}. \quad (5)$$

В аналогичной форме записываются определяющие соотношения для включения:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Sigma}_{0,2} = & \lambda_B \overset{0}{(\mathbf{E}_{0,2} : \mathbf{I})} \mathbf{I} + 2G_B \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} + 3C_3^B \left( \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} : \mathbf{I} \right)^2 \mathbf{I} + \\ & + C_4^B \left( \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} : \mathbf{I} \right)^2 \mathbf{I} + 2C_4^B \left( \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} : \mathbf{I} \right) \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} + 3C_5^B \left( \overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\sigma_{0,2} = \frac{G_B}{2} \left\{ (1 + \beta_B) \mathbf{F}_{0,2} + (1 - \beta_B) \left[ \left( \mathbf{F}_{0,2} : \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_{0,2} - \mathbf{F}_{0,2}^2 \right] \right\} - p_{0,2} \mathbf{I}. \quad (7)$$

Соотношения (4) или (5) имеют место в области  $S^{(0)}$ , а соотношения (6) или (7) — в областях  $S^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, L$ ). В этих соотношениях

$$\overset{0}{\Sigma}_{0,2} = \Psi_{0,1}^{*-1} \cdot \overset{1}{\Sigma}_{0,2} \cdot \Psi_{0,1}^{-1}. \quad (8)$$

Кинематические соотношения могут быть записаны в следующем виде:

$$\overset{0}{\mathbf{E}}_{0,2} = \frac{1}{2} (\Psi_{0,2} \cdot \Psi_{0,2}^* - \mathbf{I}), \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_{0,2} = \Psi_{0,2}^* \cdot \Psi_{0,2}, \quad (10)$$

$$(1 + \Delta_{0,2}) = \det \Psi_{0,2}, \quad \Psi_{0,2} = \Psi_{0,1} \cdot \Psi_{1,2}, \quad (11)$$

$$\Psi_{1,2} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_2. \quad (12)$$

Граничные условия включают условие на бесконечности

$$\sigma_{0,2}|_{\infty} = \sigma^{\infty}, \quad (13)$$

а также условия непрерывности вектора перемещений  $\mathbf{u}_2$  и вектора нормальных напряжений  $\mathbf{N}_1 \cdot \overset{1}{\Sigma}_{0,2} \cdot \Psi_{1,2}$  на границах включений, т.е. на контурах  $\Gamma^{(i)}$ .

**2. Методы, используемые при решении задачи.** Для решения задачи применяется метод малого параметра (метод последовательных приближений) [2, 3, 5]. Сущность метода применительно к рассматриваемым задачам состоит в следующем. Выбирается малый параметр  $q$  в виде

$$q = \max_{i,j} |(\sigma^{\infty})_{ij}| / G_M, \quad (14)$$

и для всех величин, входящих в постановку задачи, записывается разложение в ряд по этому параметру. Например, для вектора перемещений  $\mathbf{u}_2$  такое разложение может быть записано в форме

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^{(0)} + \mathbf{u}_2^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{u}_2^{(i)} \sim q^{i+1}. \quad (15)$$

После подстановки подобных разложений во все уравнения, входящие в постановку задачи, решение исходной нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных задач.

Линеаризованная задача для каждого приближения решается с помощью итерационного алгоритма [2, 6] с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [4]. На каждом шаге итерационного алгоритма решается задача для одного включения с граничными условиями, заданными специальным образом. Метод решения этой задачи детально изложен в следующем параграфе. При расчетах используется специализированная система численно-аналитических вычислений на ЭВМ [2]. Вычислены первые два приближения (линейное и квадратичное).

**3. Решение линеаризованной задачи для одного включения.** Рассматривается для случая плоской деформации линеаризованная задача о круговом упругом включении в бесконечно протяженном упругом теле (при отсутствии массовых сил). Постановка задачи включает уравнения равновесия для матрицы и включения

$$\nabla \cdot \sigma_M = 0, \quad \nabla \cdot \sigma_B = 0, \quad (16)$$

граничные условия

$$\mathbf{N} \cdot \sigma_M|_{\Gamma} = \mathbf{N} \cdot \sigma_B|_{\Gamma} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{u}_M|_{\Gamma} = \mathbf{u}_B|_{\Gamma} + \tilde{\mathbf{u}}, \quad (17)$$

условие на бесконечности

$$\sigma_M|_{\infty} = 0, \quad (18)$$

определяющие соотношения для матрицы и включения

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \lambda_M(\boldsymbol{\varepsilon}_M : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2G_M\boldsymbol{\varepsilon}_M, \quad \boldsymbol{\sigma}_B = \lambda_B(\boldsymbol{\varepsilon}_B : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2G_B\boldsymbol{\varepsilon}_B \quad (19)$$

и кинематические соотношения для матрицы и включения

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}_M + \mathbf{u}_M\nabla), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_B = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}_B + \mathbf{u}_B\nabla). \quad (20)$$

Здесь  $\mathbf{u}_M$ ,  $\mathbf{u}_B$  — векторы перемещений в матрице и во включении соответственно (или приращения векторов перемещений),  $\boldsymbol{\varepsilon}_M$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_B$  — тензоры малых деформаций в матрице и во включении (или приращения тензоров деформаций),  $\boldsymbol{\sigma}_M$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_B$  — тензоры напряжений линейной упругости в матрице и во включении (или приращения тензора напряжений),  $\Gamma$  — граница включения,  $\mathbf{N}$  — вектор нормали к этой границе,  $\mathbf{Q}$  и  $\tilde{\mathbf{u}}$  — соответственно векторы невязок по нормальным напряжениям и по перемещениям на границе.

Эта задача возникает, например, при применении метода малого параметра к решению задачи нелинейной упругости на этапе нахождения решения однородного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям. Такой же вид имеет задача, возникающая на каждом шаге метода Шварца при расчете нескольких взаимодействующих включений в бесконечно протяженном теле.

Отметим, что более общую задачу, в которой условие на бесконечности (18) заменено условием  $\boldsymbol{\sigma}_M|_\infty = \boldsymbol{\sigma}^\infty$ , можно свести к задаче, сформулированной выше, представив поле напряжений в виде суммы двух полей: постоянных напряжений, равных  $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ , и дополнительных напряжений, удовлетворяющих условию (18).

Для решения плоской задачи могут быть использованы комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили [4]. Обозначим через  $\varphi_M(z)$ ,  $\psi_M(z)$  комплексные потенциалы для матрицы, а через  $\varphi_B(z)$ ,  $\psi_B(z)$  — комплексные потенциалы для включения. Компоненты тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_M$  и вектора перемещений  $\mathbf{u}_M$  для матрицы связаны с комплексными потенциалами соотношениями

$$u_1^M + iu_2^M = \frac{1}{2G_M} \left[ \varkappa_M \varphi_M(z) - \overline{z\varphi_M'(z)} - \overline{\psi_B(z)} \right], \quad (21)$$

$$\sigma_{11}^M + \sigma_{22}^M = 4\Re\varphi_M'(z), \quad \sigma_{22}^M - \sigma_{11}^M + 2i\sigma_{12}^M = 2[\bar{z}\varphi_M''(z) + \psi_M'(z)], \quad (22)$$

здесь  $\varkappa_M = \frac{\lambda_M + 3G_M}{\lambda_M + G_M}$ . Аналогичные соотношения справедливы для включений:

$$u_1^B + iu_2^B = \frac{1}{2G_B} \left[ \varkappa_B \varphi_B(z) - \overline{z\varphi_B'(z)} - \overline{\psi_B(z)} \right]. \quad (23)$$

$$\sigma_{11}^B + \sigma_{22}^B = 4\Re\varphi_B'(z), \quad \sigma_{22}^B - \sigma_{11}^B + 2i\sigma_{12}^B = 2[\bar{z}\varphi_B''(z) + \psi_B'(z)], \quad (24)$$

здесь  $\varkappa_B = \frac{\lambda_B + 3G_B}{\lambda_B + G_B}$ .

Здесь и далее  $z$  обозначает произвольную точку комплексной плоскости. Через  $t = e^{i\theta}$  будем обозначать произвольную точку контура  $\Gamma$  (границы включения). Через  $S^+$  будем обозначать конечную область, ограниченную контуром  $\Gamma$  (область включения), а через  $S^-$  — бесконечную область, ограниченную этим контуром (область матрицы).

Далее будем полагать, что граница включения представляет собой единичную окружность с центром в начале координат. Решение для кругового включения произвольного радиуса с произвольным центром может быть получено тем же способом, что и для указанного случая, но выкладки будут более громоздкими.

Первое из граничных условий (17) с учетом (22), (24) после интегрирования по контуру может быть записано в виде [4]

$$[\varphi_M(t) + t\overline{\varphi'_M(t)} + \overline{\psi_M(t)}] \Big|_{\Gamma} = [\varphi_B(t) + t\overline{\varphi'_B(t)} + \overline{\psi_B(t)}] \Big|_{\Gamma} + g(t), \quad (25)$$

где

$$g(t) = \int_{\theta_0}^{\theta} q d\alpha = \int_{t_0}^t q(s) \frac{ds}{s}.$$

Здесь  $t_0 = e^{i\theta_0}$  и  $s = e^{i\alpha}$  — некоторые точки контура  $\Gamma$ , а  $q = Q_1 + iQ_2$  — комплексное представление вектора невязки по нормальным напряжениям  $\mathbf{Q}$ .

Второе граничное условие (17) с учетом (21), (23) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G_M} [\mathfrak{a}_M \varphi_M(t) - t\overline{\varphi'_M(t)} - \overline{\psi_M(t)}] \Big|_{\Gamma} = \\ & = \frac{1}{2G_B} [\mathfrak{a}_B \varphi_B(t) - t\overline{\varphi'_B(t)} - \overline{\psi_B(t)}] \Big|_{\Gamma} + h(t), \end{aligned} \quad (26)$$

здесь  $h(t) = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$  — комплексное представление вектора невязки по перемещениям  $\tilde{\mathbf{u}}$ .

Будем считать, что функции  $g(t)$  и  $h(t)$  могут быть разложены в ряды

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k t^k, \quad h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k t^k. \quad (27)$$

Комплексные потенциалы  $\varphi_M(z)$ ,  $\psi_M(z)$  являются аналитическими функциями в бесконечной области  $|z| > 1$  [4], и для них имеют место разложения в ряды

$$\varphi_M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad \psi_M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}. \quad (28)$$

Комплексные потенциалы  $\varphi_B(z)$ ,  $\psi_B(z)$  являются аналитическими функциями внутри единичного круга (при  $|z| < 1$ ) и могут быть представлены в виде рядов по неотрицательным степеням  $z$ :

$$\varphi_B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \psi_B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k. \quad (29)$$

Используя разложения (28), (29) и учитывая, что на контуре  $\Gamma$  справедливо соотношение  $\bar{t} = t^{-1}$ , можно записать представление отдельных слагаемых в граничных условиях (25), (26):

$$\varphi_M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}, \quad \varphi'_M(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{-k-1}, \quad (30)$$

$$t\overline{\varphi'_M(t)} = -\sum_{k=1}^{\infty} k\overline{a_k} t^{k+2}, \quad \overline{\psi_M(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{b_k} t^k, \quad (31)$$

$$\varphi_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad \varphi'_B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1}, \quad (32)$$

$$t\overline{\varphi'_B(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} k\overline{c_k} t^{-k+2}, \quad \overline{\psi_B(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{d_k} t^{-k}. \quad (33)$$

Подстановка выражений (30)–(33) в граничные условия (25), (26) с учетом разложений (27) позволяет записать бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $d_k$ . Однако более удобно выписать алгебраические уравнения только для нахождения начальных членов этих рядов, а остатки рядов найти с помощью интегралов типа Коши. Для этого представим решение в виде

$$\varphi_M(z) = a_0 + \varphi_M^*(z), \quad \psi_M(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \psi_M^*(z), \quad (34)$$

$$\varphi_B(z) = c_0 + c_1 z + \varphi_B^*(z), \quad \psi_B(z) = d_0 + \psi_B^*(z). \quad (35)$$

Согласно (28), (29), для функций  $\varphi_M^*(z)$ ,  $\psi_M^*(z)$ ,  $\varphi_B^*(z)$ ,  $\psi_B^*(z)$  имеют место разложения

$$\varphi_M^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad \psi_M^*(z) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{-k}, \quad (36)$$

$$\varphi_B^*(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k, \quad \psi_B^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k. \quad (37)$$

Функции  $g(t)$  и  $h(t)$  представим в виде

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g^*(t), \quad h(t) = h_0 + h_1 t + h^*(t). \quad (38)$$

Функции  $\varphi_M^*(z)$ ,  $\psi_M^*(z)$ ,  $\varphi_B^*(z)$ ,  $\psi_B^*(z)$  могут быть определены из граничных условий

$$[\varphi_M^*(t) + t\overline{\varphi_M^{*'}(t)} + \overline{\psi_M^*(t)}] \Big|_{\Gamma} = [\varphi_B^*(t) + t\overline{\varphi_B^{*'}(t)} + \overline{\psi_B^*(t)}] \Big|_{\Gamma} + g^*(t), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G_M} [\alpha_M \varphi_M^*(t) - t\overline{\varphi_M^{*'}(t)} - \overline{\psi_M^*(t)}] \Big|_{\Gamma} = \\ & = \frac{1}{2G_B} [\alpha_B \varphi_B^*(t) - t\overline{\varphi_B^{*'}(t)} - \overline{\psi_B^*(t)}] \Big|_{\Gamma} + h^*(t). \end{aligned} \quad (40)$$

Представление отдельных слагаемых в граничных условиях (39), (40) имеет следующий вид:

$$\varphi_M^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-k}, \quad \varphi_M^{*'}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{-k-1}, \quad (41)$$

$$\overline{t\varphi_M^*{}'(t)} = -\sum_{k=1}^{\infty} k\overline{a_k} t^{k+2}, \quad \overline{\psi_M^*(t)} = \sum_{k=2}^{\infty} \overline{b_k} t^k, \quad (42)$$

$$\varphi_B^*(t) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k t^k, \quad \varphi_B^*{}'(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k c_k t^{k-1}, \quad (43)$$

$$\overline{t\varphi_B^*{}'(t)} = \sum_{k=2}^{\infty} k\overline{c_k} t^{-k+2}, \quad \overline{\psi_B^*(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{d_k} t^{-k}. \quad (44)$$

Применим операцию вычисления интеграла типа Коши к граничным условиям (39), (40):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \varphi_M^*(t) \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{t\varphi_M^*{}'(t)} \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{\psi_M^*(t)} \frac{dt}{t-z} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \varphi_B^*(t) \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{t\varphi_B^*{}'(t)} \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{\psi_B^*(t)} \frac{dt}{t-z} + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} g^*(t) \frac{dt}{t-z}, \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G_M} \left[ \alpha_M \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \varphi_M^*(t) \frac{dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{t\varphi_M^*{}'(t)} \frac{dt}{t-z} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{\psi_M^*(t)} \frac{dt}{t-z} \right] = \frac{1}{2G_B} \left[ \alpha_B \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \varphi_B^*(t) \frac{dt}{t-z} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{t\varphi_B^*{}'(t)} \frac{dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{\psi_B^*(t)} \frac{dt}{t-z} \right] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} h^*(t) \frac{dt}{t-z}. \quad (46) \end{aligned}$$

Используем теперь следующие свойства интегралов типа Коши [4]:

1. Если функция  $f(z)$  голоморфна в  $S^+$  и непрерывна в  $S^+ \cup \Gamma$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = f(z) \quad \text{при } z \in S^+, \quad (47)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = 0 \quad \text{при } z \in S^-. \quad (48)$$

2. Если функция  $f(z)$  голоморфна в  $S^-$ , включая бесконечно удаленную точку, и непрерывна в  $S^- \cup \Gamma$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = -f(z) + f(\infty) \quad \text{при } z \in S^-, \quad (49)$$



$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = f(\infty) \quad \text{при } z \in S^+. \quad (50)$$

Пусть сначала  $z \in S^-$ . Используя (48) и (49) и разложения (41)–(44), можно записать уравнения (45) и (46) в виде

$$-\varphi_M^*(z) = -[z\overline{\varphi_B^*{}'}(z) + \overline{\psi_B^*}(z) - 2c_2] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g^*(t) dt}{t-z}, \quad (51)$$

$$-\frac{\alpha_M}{2G_M} \varphi_M^*(z) = \frac{1}{2G_B} [z\overline{\varphi_B^*{}'}(z) + \overline{\psi_B^*}(z) - 2c_2] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h^*(t) dt}{t-z}. \quad (52)$$

Здесь  $\overline{\varphi_B^*{}'}(z)$  и  $\overline{\psi_B^*}(z)$  — функции, получаемые заменой  $\bar{z}$  на  $1/z$  в выражениях  $\varphi_B^*{}'(z)$  и  $\psi_B^*(z)$  соответственно.

Исключая из системы уравнений (51), (52) выражение  $z\overline{\varphi_B^*{}'}(z) + \overline{\psi_B^*}(z) - 2c_2$ , можно найти  $\varphi_M^*(z)$ :

$$\varphi_M^*(z) = -\left(1 + \frac{G_B}{G_M} \alpha_M\right)^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g^*(t) dt}{t-z} + 2G_B \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h^*(t) dt}{t-z} \right]. \quad (53)$$

Пусть теперь  $z \in S^+$ . Учитывая (47) и (50) и разложения (41)–(44), можно привести уравнения (45) и (46) к виду

$$z\overline{\varphi_M^*{}'}(z) + \overline{\psi_M^*}(z) = \varphi_B^*(z) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g^*(t) dt}{t-z}, \quad (54)$$

$$-\frac{1}{2G_M} [z\overline{\varphi_M^*{}'}(z) + \overline{\psi_M^*}(z)] = \frac{\alpha_B}{2G_B} \varphi_B^*(z) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h^*(t) dt}{t-z}. \quad (55)$$

Здесь  $\overline{\varphi_M^*{}'}(z)$  и  $\overline{\psi_M^*}(z)$  — функции, получаемые заменой  $\bar{z}$  на  $1/z$  в выражениях  $\varphi_M^*{}'(z)$  и  $\psi_M^*(z)$  соответственно.

Исключая из системы уравнений (54), (55) выражение  $z\overline{\varphi_M^*{}'}(z) + \overline{\psi_M^*}(z)$ , находим  $\varphi_B^*(z)$ :

$$\varphi_B^*(z) = -\left(1 + \frac{G_M}{G_B} \alpha_B\right)^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g^*(t) dt}{t-z} + 2G_M \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h^*(t) dt}{t-z} \right]. \quad (56)$$

Чтобы найти функции  $\psi_M(z)$  и  $\psi_B(z)$ , применим к граничным условиям (39), (40) операцию комплексного сопряжения

$$\left[ \overline{\varphi_M^*(t)} + \bar{t}\varphi_M^*{}'(t) + \psi_M^*(t) \right]_{\Gamma} = \left[ \overline{\varphi_B^*(t)} + \bar{t}\varphi_B^*{}'(t) + \psi_B^*(t) \right]_{\Gamma} + \overline{g^*(t)}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G_M} [\alpha_M \overline{\varphi_M^*(t)} - \bar{t}\varphi_M^*{}'(t) - \psi_M^*(t)]_{\Gamma} = \\ & = \frac{1}{2G_B} [\alpha_B \overline{\varphi_B^*(t)} - \bar{t}\varphi_B^*{}'(t) - \psi_B^*(t)]_{\Gamma} + \overline{h^*(t)} \end{aligned} \quad (58)$$

и вычислим интегралы типа Коши от полученных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{\varphi_M^*(t)} \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \bar{t} \varphi_M'^*(t) \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \psi_M^*(t) \frac{dt}{t-z} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{\varphi_B^*(t)} \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \bar{t} \varphi_B'^*(t) \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \psi_B^*(t) \frac{dt}{t-z} + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{g^*(t)} \frac{dt}{t-z}, \quad (59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G_M} \left[ \varkappa_M \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{\varphi_M^*(t)} \frac{dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \bar{t} \varphi_M'^*(t) \frac{dt}{t-z} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \psi_M^*(t) \frac{dt}{t-z} \right] = \frac{1}{2G_B} \left[ \varkappa_B \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{\varphi_B^*(t)} \frac{dt}{t-z} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \bar{t} \varphi_B'^*(t) \frac{dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \psi_B^*(t) \frac{dt}{t-z} \right] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{h^*(t)} \frac{dt}{t-z}. \quad (60) \end{aligned}$$

Как и ранее, сначала рассмотрим случай, когда  $z \in S^-$ . Используя (48) и (49) и разложения (41)–(44), а также учитывая, что на контуре  $\bar{t} = t^{-1}$ , можно записать уравнения (59) и (60) в виде

$$-\frac{1}{z} \varphi_M'^*(z) - \psi_M^*(z) = -\overline{\varphi_B^*(z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{g^*(t)} dt}{t-z}, \quad (61)$$

$$\frac{1}{2G_M} \left[ \frac{1}{z} \varphi_M'^*(z) + \psi_M^*(z) \right] = -\frac{\varkappa_B}{2G_B} \overline{\varphi_B^*(z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{h^*(t)} dt}{t-z}. \quad (62)$$

Исключая из системы уравнений (61), (62) функцию  $\overline{\varphi_B^*(z)}$ , можно найти  $\psi_M^*(z)$ :

$$\begin{aligned} \psi_M^*(z) = & -\frac{1}{z} \varphi_M'^*(z) - \\ & - \left( 1 + \frac{G_B}{G_M \varkappa_B} \right)^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{g^*(t)} dt}{t-z} - \frac{2G_B}{\varkappa_B} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{h^*(t)} dt}{t-z} \right]. \quad (63) \end{aligned}$$

И наконец, рассмотрим случай, когда  $z \in S^+$ . Используя (47) и (50) и разложения (41)–(44), можно записать уравнения (59) и (60) в виде

$$\overline{\varphi_M^*(z)} = \frac{1}{z} \varphi_B'^*(z) + \psi_B^*(z) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{g^*(t)} dt}{t-z}, \quad (64)$$

$$\frac{\varkappa_M}{2G_M} \overline{\varphi_M^*}(z) = -\frac{1}{2G_B} \left[ \frac{1}{z} \varphi_B^*{}'(z) + \psi_B^*(z) \right] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{h^*(t)} dt}{t-z}. \quad (65)$$

Исключая из системы уравнений (64), (65) функцию  $\overline{\varphi_M^*}(z)$ , получаем выражение для  $\psi_B^*(z)$ :

$$\psi_B^*(z) = -\frac{1}{z} \varphi_B^*{}'(z) + \left( 1 + \frac{G_M}{G_B \varkappa_M} \right)^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{g^*(t)} dt}{t-z} - \frac{2G_M}{\varkappa_M} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{h^*(t)} dt}{t-z} \right]. \quad (66)$$

Формулы (63) и (66) позволяют найти функции  $\psi_M^*(z)$  и  $\psi_B^*(z)$ , когда функции  $\varphi_M^*(z)$  и  $\varphi_B^*(z)$  уже известны.

Для определения коэффициентов  $a_0, b_0, c_0, d_0, b_1$  и  $c_1$ , необходимых для нахождения функций  $\varphi_M(z), \psi_M(z), \varphi_B(z), \psi_B(z)$ , подставим разложения (27)–(29) в граничные условия (25), (26) с учетом равенства  $\bar{t} = t^{-1}$  и рассмотрим в полученных рядах слагаемые, содержащие  $t^0$  и  $t^1$ . В результате получим следующие уравнения:

$$\bar{b}_1 = c_1 + \bar{c}_1 + g_1, \quad (67)$$

$$\frac{1}{2G_M} \bar{b}_1 = \frac{1}{2G_B} (\varkappa_B c_1 + \bar{c}_1) + h_1, \quad (68)$$

$$a_0 + \bar{b}_0 = c_0 + 2\bar{c}_2 + \bar{d}_0 + g_0, \quad (69)$$

$$\frac{1}{2G_M} (\varkappa_M a_0 - \bar{b}_0) = \frac{1}{2G_B} (\varkappa_B c_0 - 2\bar{c}_2 - \bar{d}_0) + h_0. \quad (70)$$

Совместное решение уравнений (67) и (68) позволяет однозначно определить коэффициенты  $b_1$  и  $c_1$ . Коэффициенты  $a_0, b_0, c_0$  и  $d_0$  определяются из решения системы (69), (70). Любые два из этих коэффициентов могут быть заданы произвольно. Например, можно положить  $a_0 = b_0 = 0$ , тогда коэффициенты  $c_0$  и  $d_0$  определяются однозначно. Изменение значений коэффициентов  $a_0$  и  $b_0$  соответствует жесткому смещению всего тела как целого. Отметим, что для решения системы (69), (70) необходимо предварительно найти значение коэффициента  $c_2$ . Этот коэффициент может быть найден после определения функции  $\varphi_B^*(z)$ .

Изложенный подход может быть применен и в случае, когда материалы матрицы и включения несжимаемые. В этом случае надо положить  $\varkappa_M = 1$  и  $\varkappa_B = 1$ .

**4. Результаты расчетов.** На рис. 1, 2 приведены некоторые результаты расчетов для задачи об одновременном образовании двух одинаковых включений в предварительно нагруженных телах из различных материалов. Расчеты выполнены для одноосного напряженного состояния на бесконечности:  $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0$ ,  $\sigma_{22}^{\infty} = p$ . Центры включений расположены на оси  $x$ , расстояние между ними в момент образования  $d = 3R$  ( $R$  — радиус каждого из включений в момент образования). Центр одного из включений совпадает с началом координат.

На рис. 1 показано распределение истинных напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  на отрезке, соединяющем центры включений, для тела из материала Мурнагана. Константы материала матрицы:  $\lambda_M/G_M = 2$ ,  $C_3^M = C_4^M = C_5^M = 0$ . Константы материала

включения:  $G_B/G_M = 5$ ,  $\lambda_B/G_M = 7.5$ ,  $C_3^B = C_4^B = C_5^B = 0$ . Расчеты выполнены при  $p/G_M = 0.3$ . Сплошная линия на рисунке соответствует линейному решению (нулевому приближению), а пунктирная линия — решению с учетом нелинейных эффектов.

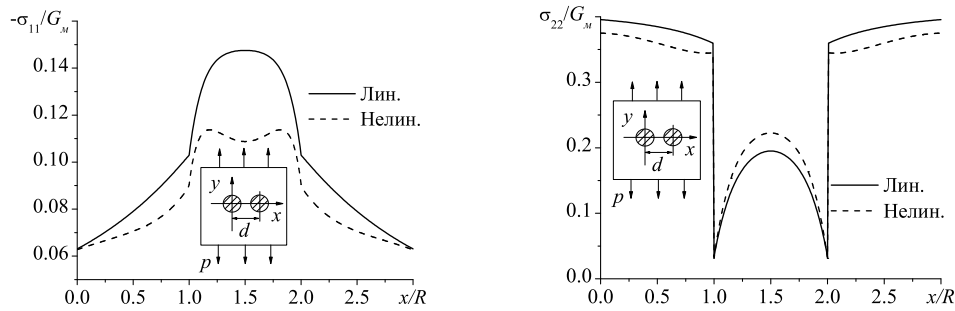


Рис. 1: Распределение напряжений на отрезке, соединяющем центры включений, для материала Мурнагана

На рис. 2 даны аналогичные графики для тела из материала Муни. Константы материалов матрицы и включения:  $G_B/G_M = 5$ ,  $\beta_M = \beta_B = 1$ . Расчеты выполнены при  $p/G_M = 1$ .

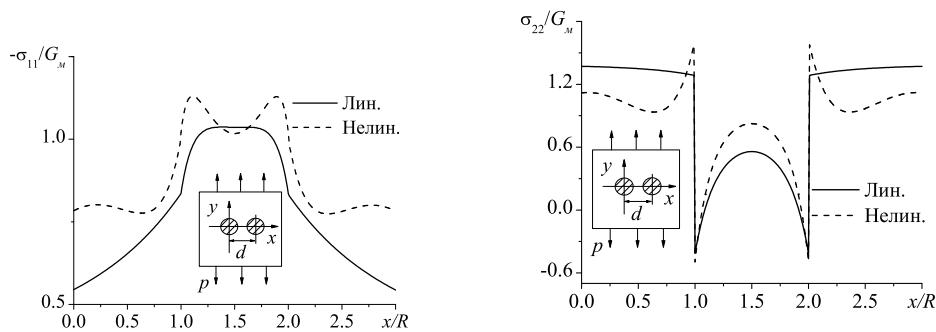


Рис. 2: Распределение напряжений на отрезке, соединяющем центры включений, для материала Муни

Сопоставляя графики, приведенные на рис. 1 и рис. 2, можно видеть, что характер нелинейных эффектов для материалов Муни и Мурнагана существенно различен.

**Заключение.** Таким образом, рассмотренный в статье метод позволяет найти приближенное аналитическое решение задачи о распределении напряжений вблизи круговых включений, образованных в предварительно нагруженных телах из нелинейно-упругих материалов при конечных деформациях. Приведенные резуль-

таты показывают, что нелинейные эффекты по-разному проявляются для материалов различных типов.

### Список литературы

- [1] Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. М., «Наука», 1999.
- [2] Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М., «Наука», 2002.
- [3] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М., «Наука», 1980.
- [4] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
- [5] Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
- [6] Свистков А.Л., Евлампиева С.Е. Итерационный метод расчета напряженно-деформированного состояния в ансамблях включений. // Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов. Екатеринбург, 1997, с. 171–203.