УДК 519.22

ТОЧНОСТЬ РЕКОНСТРУКЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ПО ВЕЙВЛЕТ-ОЦЕНКАМ ОДНОМЕРНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Борисов А.И.[*], **Шестаков О.В.**[*,**]
[*] МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
[**] Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 11.12.2017, после переработки 27.12.2017.

В работе рассматривается задача непараметрического оценивания многомерной плотности вероятности. Рассматриваемый метод решения этой задачи основан на построении вейвлет-оценок одномерных проекций исходного случайного вектора на различные направления и обращении преобразования Радона. Данный способ получения оценок может служить альтернативой вычислению ядерных оценок и многомерных вейвлет-оценок. Вейвлет-оценки чувствительны к локальным особенностям оцениваемой функции и поэтому хорошо подходят для решения данной задачи в ситуации, когда плотность имеет различную степень регулярности на разных участках определения. Еще одним важным преимуществом рассматриваемого метода является его параллельная структура, позволяющая значительно ускорить построение оценок на вычислительных системах, поддерживающих параллельные вычисления. В работе кратко описана суть метода и доказаны утверждения о скорости сходимости погрешности (в терминах равномерного расстояния между оценкой и искомой плотностью) к нулю в случае, когда оцениваемая плотность не обладает компактным носителем.

Ключевые слова: вейвлеты, преобразование Радона, непараметрическое оценивание, многомерная плотность.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 21–30.
https://doi.org/10.26456/vtpmk490

Введение

Проблема непараметрического оценивания многомерной плотности вероятности актуальна, например, в задачах классификации и распознавания изображений. Формальная постановка задачи звучит следующим образом. Пусть $X_1, \dots, X_N$ — d-мерная выборка объема N из распределения с неизвестной плотностью $f(x)$. Задача — оценить f, не имея никаких дополнительных предположений о ее форме.

Для решения данной задачи в многомерном случае имеется ряд способов оценивания искомой плотности (например, с помощью гистограмм или ядерных оценок). В данной работе рассматривается другой подход — построение вейвлет-оценок одномерных проекций неизвестной плотности на некоторое число направлений в пространстве и использование их для построения многомерной оценки путем обращения преобразования Радона. Одним из плюсов данного метода является его параллельная структура, позволяющая добиться быстрого вычисления оценок на параллельных вычислительных системах.

Этот метод был ранее теоретически обоснован лишь для вероятностных плотностей, обладающих компактным носителем [1,2], однако от этого условия можно отказаться. Метод показывает неплохие результаты, например, для многомерного нормального распределения, которое, очевидно, имеет неограниченный носитель [3].

1. Построение оценки

Определение 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, тогда ее преобразованием Радона называется функция*

$$R_\theta f(s) = \int\limits_{\langle x,\theta\rangle = s} f(x)dx,$$

где θ — произвольный единичный вектор в $\mathbb{R}^d$.

Формально $R_\theta f(s)$ — интеграл от функции f по гиперплоскости, перпендикулярной θ и расположенной на фиксированном расстоянии s от начала координат. Кроме того, преобразование Радона можно рассматривать как оператор, ставящий функции $f(x)$ в соответствие функцию $R_\theta f(s)$, $(\theta, s) \in S^{d-1} \times \mathbb{R}$.

Преобразование Фурье функции f в d-мерном пространстве имеет вид

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-i\langle \xi, x\rangle)dx.$$

По проекционной теореме [4, 5] $\widehat{R_\theta f}(\omega) = (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \hat{f}(\omega\theta)$. С помощью этого соотношения получается следующая формула обращения преобразования Радона, лежащая в основе метода фильтрованных обратных проекций:

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{d-1} \widehat{R_\theta f}(\omega) \exp(i\omega\langle x, \theta\rangle) d\omega d\theta. \tag{1}$$

Оценку многомерной плотности f можно построить по оценкам одномерных функций $R_\theta f(s)$, построенных при различных θ, используя следующее утверждение [2].

Утверждение 1. *Пусть θ — единичный вектор в $\mathbb{R}^d$. Если X — d-мерный случайный вектор с плотностью f, тогда одномерная случайная величина $\langle X, \theta\rangle$, которая представляет собой проекцию X на направление θ, имеет плотность $R_\theta f$.*

В данной работе предполагается, что одномерные плотности оцениваются методами вейвлет-анализа. Пусть $\langle X_i, \theta \rangle$, $i = 1, \ldots, N$, выборка из независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью $R_\theta f(s)$. Предположим, что отцовская и материнская вейвлет-функции имеют компактный носитель и достаточно гладкие. Тогда плотность $R_\theta f(s)$ можно оценить как [6]

$$R_N f(\theta, s) = \sum_k \hat{c}_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \hat{d}_{j,k} I(|\hat{d}_{j,k}| \geq \lambda) \psi_{j,k}(x), \tag{2}$$

где

$$\hat{c}_{j_0,k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \phi_{j_0,k}(\langle X_i, \theta \rangle), \quad \hat{d}_{j,k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \psi_{j,k}(\langle X_i, \theta \rangle),$$

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k),$$

$\phi(x), \psi(x)$ — масштабирующая и вейвлет-функция соответственно, λ — некоторый порог, а j_0 и j_1 — соответственно нижний и верхний уровни вейвлет-разложения.

В результате алгоритм построения оценки многомерной плотности выглядит следующим образом. Строятся проекции наблюдений $X_1, \ldots, X_N$ случайного вектора с плотностью f на некоторые направления $\theta_1, \ldots, \theta_M$ (берется достаточно большое число направлений, чтобы уменьшить ошибку, связанную с переходом к проекциям). По выборке $\langle X_1, \theta_i \rangle, ..., \langle X_N, \theta_i \rangle$ строится вейвлет-оценка плотности $R_{\theta_i} f(s)$. Проделав эту процедуру для всех направлений $\theta_1, \ldots, \theta_M$, из полученных оценок можно восстановить оценку исходной плотности распределения $f(x)$ с помощью методов обращения преобразования Радона. Заметим, что процедуры построения оценок $R_{\theta_i} f(s)$ можно выполнять параллельно, что дает возможность значительно ускорить построение оценки многомерной плотности на вычислительных системах, поддерживающих параллельные вычисления.

Однако пользоваться напрямую формулой (1) нельзя, так как задача обращения преобразования Радона относится к классу некорректно поставленных задач. Можно ввести некоторую быстро убывающую функцию окна $W_\alpha(|\omega|)$ и рассматривать свертки проекций с этой функцией. Далее всюду будем использовать функцию окна $W_\alpha(|\omega|) = \exp(-\alpha^2 \omega^2 / 2)$. Тогда вместо $f(x)$ оценивается функция

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{d-1} \exp(-\alpha^2 \omega^2 / 2) \widehat{R_\theta f}(\omega) \exp(i\omega \langle x, \theta \rangle) d\omega d\theta,$$

а оценка многомерной плотности вычисляется по формуле

$$f_N(x) = \frac{1}{2(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{d-1} \exp(-\alpha^2 \omega^2 / 2) \widehat{R_N f}(\theta, \omega) \exp(i\omega \langle x, \theta \rangle) d\omega d\theta,$$

где $R_N f(\theta, s)$ — вейвлет-оценки одномерных плотностей $R_\theta f(s)$, построенные по формуле (2).

2. Характеристики качества получаемых оценок

В случае, когда восстанавливаемая функция плотности $f(x)$ обладает компактным носителем, утверждения о сходимости этого метода можно найти в [1]. Основной целью данной работы является математическое обоснование рассматриваемого метода в случае, когда $f(x)$ компактным носителем не обладает.

Обозначим через $W^r(\mathbb{R}^d, T)$ — шар в пространстве Соболева, то есть множество таких функций $g(x)$, что

$$\|g\|_r^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|\omega|^2)^r |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega < T.$$

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $R_\theta f(s) \in W^{r+(d-1)/2}(\mathbb{R}, T)$, $r > 0$ *и* $\exists q > 1$ *такое, что существует симметричная неотрицательная убывающая на* $\mathbb{R}^+$ *функция (мажоранта)* $h(s)$ *такая, что* $||h||_{1/q} < \infty$ *и* $\exists a$: $R_\theta f(s) \leq h(s-a)$ $\forall s \in \mathbb{R}$. *Пусть для вейвлет-оценок одномерных проекций выбирается порог* $\lambda_{j,N} = c_r\sqrt{j/N}$ *(*$c_r > 0$ *— константа, зависящая от* r *[6]), максимальный уровень разложения* J *определяется из условия* $2^{J(N)} \approx (N/\log N)^{1/(2r+1)}$. *Тогда*

$$\mathbf{E} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_\alpha(x) - f_N(x)| \leq C_d \alpha^{\frac{1}{2}-d} N^{-\frac{2r+d-1}{4r+2d}},$$

где C_d *— некоторая положительная константа.*

Доказательство.

$$\mathbf{E} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_\alpha(x) - f_N(x)| =$$

$$= \mathbf{E} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{2(2\pi)^d} \left| \int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{d-1} e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}} (\widehat{R_\theta f}(\omega) - \widehat{R_N f}(\omega)) e^{i\omega\langle x,\theta\rangle} d\omega d\theta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{d-1} e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}} \mathbf{E}|\widehat{R_\theta f}(\omega) - \widehat{R_N f}(\omega)| d\omega d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{2(d-1)} e^{-\alpha^2\omega^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{E}|\widehat{R_\theta f}(\omega) - \widehat{R_N f}(\omega)|)^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{2(d-1)} e^{-\alpha^2\omega^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}|\widehat{R_\theta f}(\omega) - \widehat{R_N f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Из условий теоремы следует, что

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}|\widehat{R_\theta f}(\omega) - \widehat{R_N f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}|R_\theta f(s) - R_N f(s)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_p N^{-\frac{p}{2p+1}},$$

где $p = r + (d-1)/2, C_p > 0$ — некоторая константа [6]. Оставшееся же выражение под интегралом не зависит от θ, и в итоге имеем

$$\mathbf{E} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_\alpha(x) - f_N(x)| \leq C_d N^{-\frac{p}{2p+1}} \alpha^{\frac{1}{2}-d}.$$

□

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что если $R_\theta f(s) \in W^{r+\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R},T)$, то $f(x) \in W^r(\mathbb{R}^d,\tilde{T})$ для некоторого $\tilde{T} > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Пусть, кроме того, $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x+y)| \le C_L|y|^\gamma, \quad 0 < \gamma \le 1,\ C_L > 0.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x) - f_N(x)| \le C_{d,\gamma} N^{-\frac{(2r+d-1)\gamma}{(4r+2d)(\gamma+d-1/2)}}, \quad C_{d,\gamma} > 0.$$

Доказательство. Полностью повторяет доказательство аналогичной теоремы для плотности, обладающей компактным носителем [1]. □

Необходимо учитывать, что при переходе от многомерных наблюдений к одномерным проекциям происходит потеря данных, поскольку рассматриваются проекции на конечное (хотя и достаточно большое) число направлений. Тем самым, в результате восстановления по проекциям можно получить в лучшем случае не исходную функцию плотности, а некоторую другую, имеющую те же проекции на выбранные направления, что и исходная плотность.

Оценим погрешность, возникающую из-за использования конечного числа направлений (для простоты рассмотрим двумерный случай). Пусть N — число наблюдений, M — число проекций. Справедлива следующая теорема, обобщающая соответствующее утверждение из работы [7] на плотности, не обладающие компактным носителем.

Теорема 3. *Пусть функции $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Пусть векторы направлений $\theta_1 \ldots \theta_M$, $M = 2n$, выбираются следующим образом:*

$$\theta_j = (\nu_j, -1)/(\nu_j^2 + 1)^{1/2}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\theta_j = (1, \nu_{j-n})/(\nu_{j-n}^2 + 1)^{1/2}, \quad j = n+1, \ldots, 2n,$$

где

$$\nu_k = \cos(\pi(2k-1)/(2n)), \quad k = 1, \ldots, n,$$

и $||\widehat{R_{\theta_i}f}(\omega) - \widehat{R_{\theta_i}g}(\omega)||^2 \le \epsilon(N)$, *где* $\epsilon(N) \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Пусть, кроме того,* $\int\limits_{\mathbb{R}^2} |x|f(x)dx < \infty$, $\int\limits_{\mathbb{R}^2} |x|g(x)dx < \infty$. *Тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |f_\alpha(x) - g_\alpha(x)| \le \tilde{c}_\alpha \sqrt{\epsilon(N) + \frac{\tilde{c}_{f,g,\alpha}}{M}}. \quad (3)$$

Доказательство.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|f_\alpha(x)-g_\alpha(x)|=$$

$$=\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\frac{1}{2(2\pi)^2}\left|\int\limits_{S^1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\omega|e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}}(\widehat{R_\theta f}(\omega)-\widehat{R_\theta g}(\omega))e^{i\omega\langle x,\theta\rangle}d\omega d\theta\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2(2\pi)^2}\int\limits_{S^1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\omega|e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}}|\widehat{R_\theta f}(\omega)-\widehat{R_\theta g}(\omega)|d\omega d\theta\leq$$

$$\leq\frac{1}{2(2\pi)^2}\int\limits_{S^1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\omega|^2e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}}d\omega\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}}|\widehat{R_\theta f}(\omega)-\widehat{R_\theta g}(\omega)|^2d\omega\right)^{\frac{1}{2}}d\theta.$$

Положим

$$I(\theta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}}|\widehat{R_\theta f}(\omega)-\widehat{R_\theta g}(\omega)|^2d\omega.$$

Пусть i такое, что $\theta_i\leq\theta<\theta_{i+1}$. Тогда

$$|I(\theta_i)|\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{R_{\theta_i} f}(\omega)-\widehat{R_{\theta_i} g}(\omega)|^2d\omega\leq\epsilon(N),$$

$$|I(\theta)|\leq|I(\theta_i)|+|I(\theta)-I(\theta_i)|.$$

Поскольку $\widehat{R_\theta f}(\omega)=(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}\hat{f}(\omega\theta)$, имеем

$$I(\theta)=\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}}|\hat{f}(\omega\theta)-\hat{g}(\omega\theta)|^2d\omega.$$

Учитывая, что $\theta=\theta(\phi)=(\cos\phi,\sin\phi)$, и обозначая $\bar{I}(\phi)=I(\theta(\phi))$, имеем

$$|I(\theta)-I(\theta_i)|=|\bar{I}(\phi)-\bar{I}(\phi_i)|\leq|\phi-\phi_i||\bar{I}'(\tilde{\phi})|,\quad \tilde{\phi}\in[\phi_i,\phi],$$

$$|\phi-\phi_i|\leq|\phi_{i+1}-\phi_i|=\frac{\pi}{M}.$$

Далее

$$\bar{I}'(\phi)=2\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}}(\hat{f}(\omega\cos\phi,\omega\sin\phi)-\hat{g}(\omega\cos\phi,\omega\sin\phi))\times$$

$$\times(\hat{f}(\omega\cos\phi,\omega\sin\phi)-\hat{g}(\omega\cos\phi,\omega\sin\phi))'_\phi d\omega.$$

По условию теоремы существует такая константа $c_1>0$, что

$$|(\hat{f}(\omega\cos\phi,\omega\sin\phi)-\hat{g}(\omega\cos\phi,\omega\sin\phi))'_\phi|\leq$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}^2}|x_1\omega\sin\phi-x_2\omega\cos\phi||f(x)-g(x)|dx\leq|\omega|\int\limits_{\mathbb{R}^2}|x|(|f(x)|+|g(x)|)dx\leq c_1|\omega|,$$

а поскольку $f, g \in L^1(\mathbb{R}^2)$, найдется такая константа $c_{fg} > 0$, что

$$|\hat{f}(\omega\cos\phi, \omega\sin\phi) - \hat{g}(\omega\cos\phi, \omega\sin\phi)| \leq |\hat{f}(\omega\cos\phi, \omega\sin\phi)| + |\hat{g}(\omega\cos\phi, \omega\sin\phi)| \leq c_{fg}.$$

В итоге имеем

$$|\bar{I}'(\phi)| \leq c_1 c_{fg} 2\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| e^{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}} d\omega \leq c_{f,g,\alpha},$$

где положительная константа $c_{f,g,\alpha}$ зависит от f, g и α. Таким образом,

$$|I(\theta)| \leq \epsilon(N) + \frac{\pi c_{f,g,\alpha}}{M}$$

и существуют такие положительные константы $\tilde{c}_\alpha$ и $\tilde{c}_{f,g,\alpha}$, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |f_\alpha(x) - g_\alpha(x)| \leq \tilde{c}_\alpha \sqrt{\epsilon(N) + \frac{\tilde{c}_{f,g,\alpha}}{M}}.$$

□

Очевидно, правая часть оценки (3) стремится к нулю при $N \to \infty$, $M \to \infty$.

Заключение

Метод оценивания многомерных плотностей вероятности с помощью вейвлет-оценок одномерных проекций может быть использован наряду с другими известными методами оценивания плотностей вероятности. Для сходимости метода не требуется серьезных ограничений на структуру неизвестной плотности, что важно при непараметрическом оценивании. Более того, на практике оказывается, что вейвлет-оценки могут лучше адаптироваться к локальным особенностям искомой плотности (таким, как, например, негладкие участки и разрывы).

Список литературы

[1] Шестаков О.В. Непараметрическое оценивание многомерной плотности с помощью вейвлет-оценок одномерных проекций // Информатика и ее применения. 2015. Т. 9, № 2. С. 88–92.

[2] O'Sullivan F., Pawitan Y. Multidimensional density estimation by tomography // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. 1993. Vol. 55, № 2. Pp. 509–521.

[3] Борисов А.И. Оценка многомерной плотности распределения // Труды Второй молодежной научной конференции «Задачи современной информатики». Москва, ФИЦ ИУ РАН, 2015. С. 52–57.

[4] Smith K.T., Solmon D.C., Wagner S.L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs // Bulletin of the American Mathematical Society. 1977. Vol. 83. Pp. 1227–1270.

[5] Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography (Classics in Applied Mathematics). Society for Industrial Mathematics, 2001. 184 p.

[6] Donoho D.L., Johnstone I.M., Kerkyacharian G., Picard D. Density estimation by wavelet thresholding // The Annals of Statistics. 1996. Vol. 23. Pp. 508–539.

[7] Шестаков О.В., Савенков Т.Ю. Оценка расстояния между плотностями вероятностных мер, имеющих близкие проекции // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2001. № 4. С. 44–46.

Образец цитирования

Борисов А.И., Шестаков О.В. Точность реконструкции многомерных вероятностных плотностей по вейвлет-оценкам одномерных проекций // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 21–30.

Сведения об авторах

1. **Борисов Артем Ильшатович**
   студент факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

   Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: artvenom1@mail.ru

2. **Шестаков Олег Владимирович**
   доцент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник Института проблем информатики ФИЦ ИУ РАН.

   Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: oshestakov@cs.msu.su

ACCURACY OF RECONSTRUCTION OF THE MULTIDIMENSIONAL PROBABILITY DENSITY BY WAVELET ESTIMATES OF ONE-DIMENSIONAL PROJECTIONS

Borisov Artem Ilshatovich
Student of Computational Mathematics and Cybernetics faculty,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: *artvenom1@mail.ru*

Shestakov Oleg Vladimirovich
Associate professor at Mathematical Statistics department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University;
Senior researcher at Institute of Informatics Problems, Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: *oshestakov@cs.msu.su*

Received 11.12.2017, revised 27.12.2017.

The paper considers the problem of non-parametric estimation of a multidimensional probability density. The method of solving this problem is based on the construction of wavelet estimates for one-dimensional projections of the original random vector onto different directions and inversion of the Radon transform. This method of constructing estimates can serve as an alternative to the calculation of kernel density estimates and multivariate wavelet estimates. Wavelet estimates are sensitive to local features of the function being evaluated and therefore are well suited for solving this problem in a situation where the density has a different degree of regularity at different regions. Another important advantage of the considered method is its parallel structure, which makes it possible to significantly accelerate the construction of estimates on computational systems supporting parallel computations. The paper briefly describes the essence of the method and proves statements on the rate of the error decay (in terms of the uniform distance between the estimate and the estimated density function) in the case when the estimated probability density function does not have a compact support.

Keywords: wavelets, Radon transform, non-parametric estimation, multivariate probability density function.

Citation

Borisov A.I., Shestakov O.V. Accuracy of reconstruction of the multidimensional probability density by wavelet estimates of one-dimensional projections. *Vestnik TvGU.*

Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 1, pp. 21–30. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk490

References

[1] Shestakov O.V. Nonparametric estimation of multidimensional density with the use of wavelet estimates of univariate projections. *Informatika i ee Primeneniya* [Informatics and Applications], 2015, vol. 9(2), pp. 88–92. (in Russian)

[2] Borisov A.I. Multivariate probability density function estimation. *Trudy Vtoroi molodezhnoi nauchnoi konferentsii «Zadachi sovremennoi informatiki»* [Proceedings of Second youth academic conference «Problems of modern computer science»]. FITs IU RAN, Moscow, 2015. Pp. 52–57. (in Russian)

[3] Donoho D.L., Johnstone I.M., Kerkyacharian G., Picard D. Density estimation by wavelet thresholding. *The Annals of Statistics*, 1996, vol. 23, pp. 508–539.

[4] O'Sullivan F., Pawitan Y. Multidimensional density estimation by tomography. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1993, vol. 55(2), pp. 509–521.

[5] Smith K.T., Solmon D.C., Wagner S.L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1977, vol. 83, pp. 1227–1270.

[6] Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography (Classics in Applied Mathematics)*. Society for Industrial Mathematics, 2001. 184 p.

[7] Shestakov O.V., Savenkov T.Yu. Estimating the distances between the densities of measures with ε-identical marginals. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Herald of Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics], 2001, no. 4, pp. 44–46. (in Russian)