УДК 519.216

СРЕДНЯЯ ДОЛЯ ПОТЕРЯННОЙ НАГРУЗКИ В ДИСКРЕТНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ $M/G/\infty$–МОДЕЛИ[1]

Сидорова О.И.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 05.02.2018, после переработки 10.03.2018.

В данной работе анализируется асимптотическое поведение средней доли потерянной нагрузки для дискретной $M/G/\infty$–модели, в ситуации, когда распределения длин периодов занятости принадлежат множеству, состоящему из конечного числа разных распределений с правильно меняющимися хвостами. Указываются условия, при которых источник с любой длиной активного периода способен нетривиально влиять на производительность телекоммуникационной системы.

Ключевые слова: долговременная зависимость, распределения с тяжелыми хвостами, $M/G/\infty$–модель входящего потока, ON/OFF–процесс, ограниченный накопитель, средняя доля потерянной нагрузки.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 31–41.
https://doi.org/10.26456/vtpmk492

Введение

Самоподобный характер и *долгая память* у трафика в современных телекоммуникационных системах подтверждены многочисленными эмпирическими и аналитическими исследованиями. Наличие этих свойств объясняют тяжелыми хвостами у распределений длин сообщений [3, 4, 7].

Традиционно выделяются 2 подхода к анализу компьютерных систем: *очереди* с ограниченным ($GI/CI/1/h$) или неограниченным ($GI/CI/1$) накопителем и *жидкостные модели*.

В $GI/CI/1$–моделях учитывается влияние каждой индивидуальной единицы (клиента), привносящей мгновенную нагрузку в систему. Жидкостные модели используют для описания потоков данных в ситуации, когда нагрузка поступает в систему непрерывно, а влияние отдельных единиц информации — символов, ячеек, пакетов на весь трафик пренебрежимо мало. Примером таких систем являются широкополосные сети с асинхронной технологией передачи (ATM). «Жидкостное» представление трафика позволяет получить достаточно аккуратное его описание, а также значительно экономит время и компьютерные ресурсы необходимые для моделирования. Более того, естественная взаимосвязь между двумя этими подходами обеспечивает асимптотически близкие результаты для основных характеристик качества обслуживания (Quality of Service, QoS).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-07-00678).

Характеристики QoS в системах массового обслуживания с самоподобными потоками кардинально отличаются от традиционных марковских моделей и требуют серьезного пересмотра из–за существенной недооценки предлагаемой нагрузки. Сложная структура потоков нагрузки, как правило, не позволяет получить «конечные» формулы для их расчета. Однако, в определенных случаях, удается описать асимптотическое поведение некоторых характеристик или указать для них определенные асимптотические границы. Наиболее востребованными характеристиками QoS служат вероятности переполнения буфера и потери нагрузки, а также средняя величина потерь.

В большинстве известных к настоящему времени работ рассматриваются исключительно монофрактальные потоки, являющиеся результатом агрегирования (multiplexing) процессов с одинаковыми показателями самоподобия. Поэтому особый интерес для исследования представляет ситуация, когда объединяемые потоки могут характеризоваться разными значениями коэффициента Хёрста H.

1. Вспомогательные понятия

Выше отмечалось, что особый интерес для анализа в настоящий момент времени представляют модели входящих потоков, характеризующиеся *длинными хвостами* у распределения нагрузки.

Определение 1. *Говорят, что распределение F неотрицательной случайной величины X имеет* ***длинный хвост*** *(long–tailed distribution) ($F \in \mathcal{L}$), если*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1, \quad \forall y \in R,$$

где $\overline{F}(x) = P(X > x)$ — правый хвост распределения F.

Класс $\mathcal{L}$ — наиболее общий класс распределений с **тяжелыми хвостами** (heavy–tailed distributions). В зависимости от целей исследования в нем выделяются несколько подклассов $\mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{IR} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. В практических приложениях наиболее востребованным является класс $\mathcal{R}_\alpha$ распределений с правильно меняющимся хвостом.

Определение 2. *Говорят, что распределение F неотрицательной случайной величины X является* ***субэкспоненциальным*** *(subexponential distribution) ($F \in \mathcal{L}$), если*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} = n,$$

где $\overline{F}^{n*}(x) = P(X_1 + \ldots + X_n > x)$ — хвост свертки n одинаковых распределений.

Определение 3. *Говорят, что распределение F неотрицательной случайной величины X принадлежит* ***классу*** *$\mathcal{IR}$ (intermediately regularly varying) ($F \in \mathcal{IR}$), если*

$$\lim_{\nu\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(\nu x)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Определение 4. *Говорят, что распределение F неотрицательной случайной величины X имеет* ***правильно меняющийся хвост*** *(regularly varying distribution) ($F \in \mathcal{R}_\alpha$), если*

$$\overline{F}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}, \quad \alpha \geqslant 0,$$

где функция $L(x)$ медленно меняется на бесконечности, т.е.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(\nu x)}{L(x)} = 1, \quad \nu > 1.$$

2. Средняя доля потерянной нагрузки в $M/G/\infty$–модели

Следуя [5, 6], рассмотрим жидкостную модель трафика с $M/G/\infty$ входящим потоком и пропускной способностью канала $c > 0$. Входящий поток $\{A_t^\infty,\, t \geqslant 0\}$ описывается точечным процессом Пуассона с интенсивностью Λ, чьи точки указывают на начало активных периодов. Каждый активный период порождает нагрузку со скоростью r в течение случайного периода времени длительностью τ_{on}. Для разных активных периодов их длины независимы и одинаково распределены. Под h в дальнейшем мы подразумеваем объем накопителя.

Известно [6], что модель $M/G/\infty$ может быть получена как предел при $\lambda N \to \Lambda$, $\lambda \to 0$, $N \to \infty$ агрегированного процесса $\{A_t^N,\, t \geqslant 0\}$, являющегося суммой N однородных ON/OFF–процессов с экспоненциальными ($\mathrm{Exp}(\lambda)$) OFF–периодами и субэкспоненциальными ON–периодами. Тогда для агрегированного ON/OFF–процесса A_t^N, $N \to \infty$ средние длительности n–тых активного периода и периода покоя равны

$$M(T_n^{on}) = \frac{1}{\Lambda}\left(e^{\Lambda M(\tau_{on})} - 1\right), \quad M(T_n^{off}) = \frac{1}{\Lambda}.$$

Пусть D_n есть прирост нагрузки в течение n–го периода активности. Тогда при $c \leqslant r$ справедлив аналог уравнения Линдли для длины очереди W_n^h

$$W_{n+1} = \left(\min(W_n + D_n, h) - c \cdot T_n^{off}\right)^+, \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

где $(x)^+ = \max(0, x)$.

Среднюю долю потерь нагрузки можно определить по правилу

$$\lambda_{loss}^h = \lim_{t\to\infty} \frac{L(0,t)}{t}, \tag{2}$$

где $L(0,t)$ — величина потерь на $(0,t)$.

В [5] (теорема 5) было показано, что в случае субэкспоненциальных распределений для длин активных периодов средние потери в системах с очередями и в жидкостных моделях асимптотически эквивалентны, т.е.

$$M(W_n + D_{n+1} - h)^+ \sim M\big(\min(W_n + D_{n+1}, h) - C_{n+1}\big)^+ \sim M(D-h)^+, \quad h \to \infty,$$

где C_{n+1} — величина обслуженной нагрузки. Поэтому справедливо соотношение

$$\lambda^h_{loss} = \frac{M\big(W_n + D_{n+1} - h\big)^+}{M(T_n^{on}) + M(T_n^{off})}. \qquad (3)$$

Если $\tau_{on} \in \mathcal{IR},\ 0 < c < r + r\Lambda M(\tau_{on})$ и $\nu = r + \rho - c$, то справедливо следующее асимптотическое соотношение для D_n

$$P(D_n > x) \sim e^{\Lambda M(\tau_{on})} P\big(\nu \cdot \tau_{on} > x\big), \quad x \to \infty. \qquad (4)$$

Учитывая (3) и (4), можно сформулировать следующий результат о средней доле потерянной нагрузки

Теорема 1 (см. [5]). *Пусть* $\rho = \Lambda r M(\tau_{on}) < c \leqslant r$ *и* $\tau_{on} \in \mathcal{IR}$. *Тогда*

$$\lambda^h_{loss} \sim \Lambda M(\nu \cdot \tau_{on} - h)^+, \quad h \to \infty. \qquad (5)$$

Замечание 1. Поскольку распределения с правильно меняющимися хвостами входят в класс $\mathcal{IR}$ при всех $\alpha \geqslant 0$, результат (5) будет также справедлив для $\tau_{on} \in \mathcal{R}_\alpha$.

3. Основной результат

3.1 Однородный случай

В качестве практической иллюстрации применения формулы (5) рассмотрим дискретизованную версию $M/G/\infty$–потока, в котором

1) время разделено на слоты длины 1;

2) число источников ξ_t, «прибывающих» в систему в каждый момент времени, имеет распределение Пуассона с параметром λ;

3) длины активных периодов источников τ_{on} (здесь τ_{on} — общее обозначение для длин $\{\tau^s_{on},\ s \in Z_+\}$ по всем источникам) взаимно независимы, независимы от ξ_t и имеют дискретное распределение Парето с конечным средним и бесконечной дисперсией, т.е.

$$P(\tau_{on} = n) = \frac{c_0}{n^{-\alpha-1}}, \quad c_0 > 0, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Трафик Y_t есть суперпозиция пакетов, генерируемых всеми источниками, активными в момент t. Для каждого фиксированного t случайная величина Y_t имеет пуассоновское распределение со средним и дисперсией $M(Y_t) = D(Y_t) = \lambda \cdot M(\tau_{on})$. Процесс $\{Y_t,\ t \geqslant 0\}$ — асимптотически самоподобен с параметром Хёрста $H = \dfrac{3-\alpha}{2}$ и имеет долгую память, поскольку $H \in (0.5, 1)$ при $1 < \alpha < 2$.

Без ограничения общности можно считать, что длина каждого пакета равна единице и $r = c = 1$. В каждый момент времени t в канале может находиться не более одного пакета, а буфер хранит $Z_t \leqslant h$ пакетов. Следовательно, если

$Y_t + Z_t > h + 1$, то $Y_t + Z_t - h - 1$ пакетов обязательно будут утеряны. Момент t называется **моментом переполнения**, если теряется хотя бы один пакет, сгенерированный в этот момент. Какие пакеты направляются на обслуживание, а какие отбрасываются при переполнении буфера, определяет дисциплина обслуживания $d \in D(h)$. На вычисление характеристик QoS этот факт не влияет.

Эта математическая модель, пригодная для описания передачи данных в современных широкополосных сетях (ATM), была предложена и подробно описана в работах Цыбакова и его соавторов [8–10]. В данных работах для однородного потока были найдены верхние и нижние асимптотические границы для вероятностей переполнения буфера и потери нагрузки. В настоящей статье внимание будет сосредоточено на асимптотической оценке средней доли потерянной нагрузки для однородного и неоднородного потока данных.

Теорема 2. *В описанной выше дискретной версии $M/G/\infty$–модели при $M(\tau_{on}) < \infty$ справедлива следующая асимптотическая оценка для средней доли потерь нагрузки*

$$\lambda^h_{loss} \sim l \cdot h^{-\alpha+1}, \quad h \to \infty, \tag{6}$$

где $l = \dfrac{c_0 \cdot \lambda \cdot \nu^\alpha}{\alpha \cdot (\alpha - 1)}$ и $\nu = r + \lambda r M\Big(\tau_{on}\Big) - c$.

Доказательство. При больших h имеем

$$\lambda \cdot M(\nu\tau_{on} - h)^+ = \lambda \cdot \nu \cdot M\left(\tau_{on} - \frac{h}{\nu}\right)^+ \sim \lambda \cdot \nu \cdot \sum_{n=\left[\frac{h}{\nu}\right]}^{\infty} P(\tau_{on} \geqslant n),$$

$[x]$ — целая часть числа x. Следовательно,

$$\lambda^h_{loss} \sim \lambda \cdot \nu \cdot \sum_{n=\left[\frac{h}{\nu}\right]}^{\infty} P(\tau_{on} \geqslant n), \quad h \to \infty.$$

Поскольку

$$\frac{c_0 \cdot n^{-\alpha}}{\alpha} \leqslant P(\tau_{on} \geqslant n) \leqslant \frac{c_0 \cdot (n-1)^{-\alpha}}{\alpha}$$

и

$$\frac{m^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} n^{-\alpha} \leqslant \frac{(m-2)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1}, \quad m > 2, \quad 1 < \alpha < 2,$$

то справедливы следующие неравенства

$$\frac{c_0 \cdot \lambda \cdot \nu}{\alpha \cdot (\alpha - 1)} \cdot \left[\frac{h}{\nu}\right]^{-\alpha+1} \leqslant \lambda \cdot \nu \cdot \sum_{n=\left[\frac{h}{\nu}\right]}^{\infty} P(\tau_{on} \geqslant n) \leqslant \frac{c_0 \cdot \lambda \cdot \nu}{\alpha \cdot (\alpha - 1)} \left(\left[\frac{h}{\nu}\right] - 2\right)^{-\alpha+1}.$$

При больших h получаем

$$\frac{c_0 \cdot \lambda \cdot \nu}{\alpha \cdot (\alpha - 1)} \cdot \left[\frac{h}{\nu}\right]^{-\alpha+1} \sim \frac{c_0 \cdot \lambda \cdot \nu^\alpha}{\alpha \cdot (\alpha - 1)} \cdot h^{-\alpha+1},$$

$$\frac{c_0 \cdot \lambda \cdot \nu}{\alpha \cdot (\alpha - 1)} \left(\left[\frac{h}{\nu}\right] - 2\right)^{-\alpha+1} \sim \frac{c_0 \cdot \lambda \cdot \nu^\alpha}{\alpha \cdot (\alpha - 1)} \cdot h^{-\alpha+1},$$

что и доказывает результат (6). □

3.2 Неоднородный случай

Допустим, что нагрузку в систему привносят источники $2 \leqslant r < \infty$ разных типов [1,2]. Все источники взаимно независимы. Каждый тип $1 \leqslant k \leqslant r$ источников характеризуется своими частотой появления $\lambda^{(k)}$ и распределением Парето для длины $\tau_{on}^{(k)}$ активного периода:

$$P(\tau^{(k)} = n) = c_0^{(k)} \cdot n^{-\alpha^{(k)}-1}, \quad 1 < \alpha^{(1)} < \ldots < \alpha^{(r)} < 2.$$

В этом случае $\xi_t = \xi_t^{(1)} + ... + \xi_t^{(r)}$, где пуассоновские величины $\xi_t^{(k)}$ есть количество источников типа k, «проснувшихся» в момент t. Так как $\xi_t^{(k)}$ независимы, то совокупный поток ξ_t также имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = \lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(r)}$. Мы полагаем, что общая интенсивность потока $\lambda = const$ неизменна, однако доли $\{\lambda^{(k)},\ 1 \leqslant k \leqslant r\}$, отведенные источникам каждого типа в совокупном трафике, могут меняться.

Каждый источник независимо от его типа генерирует $r = 1$ пакетов во время своего периода активности. Размер буфера равен $h < \infty$, пропускная способность канала c равна 1. Какого типа пакет теряется при переполнении буфера, зависит от конкретной дисциплины $d \in D(h)$ и на дальнейшие рассуждения не влияет.

Новый входящий поток $Y_t^* = Y_t^{(1)} + \ldots + Y_t^{(r)}$ есть суперпозиция независимых процессов $\{Y_t^{(k)},\ k = 1, \ldots, r\}$, определенных выше.

Положим

$$d^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda}$$

и зададим распределения ξ^* и τ_{on}^*, характеризующих поток Y_t^*, по правилам

$$P(\xi^* = m) = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} \cdot P(\xi^{(k)} = m) = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} \cdot \frac{\left(\lambda^{(k)}\right)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda^{(k)}} \tag{7}$$

и

$$P(\tau^* = x) = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} \cdot P(\tau_{on}^{(k)} = x) = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} \cdot c_0^{(k)} \cdot x^{-\alpha^{(k)}-1}. \tag{8}$$

Хорошо известно, что без дополнительных ограничений на структуру модели, в потоке доминируют источники с самым длинным активным периодом. В нашем случае это источники первого типа, поскольку при фиксированных $\lambda^{(k)}$ и λ первое слагаемое в (8) с ростом x убывает медленнее чем все остальные и на бесконечности $P(\tau^* = x)$ приобретает асимптотику $c \cdot x^{-\alpha^{(1)}-1}$ самого «тяжелого» из рассматриваемых распределений. Влияние же оставшихся источников на поведение системы пренебрежимо мало.

Рассмотрим ситуацию, когда источник любого типа оказывает нетривиальное влияние на показатели QoS. Для этого переопределим специальным образом доли «тяжелых» и «легких» заявок в системе.

Выберем веса $d^{(k)}$ следующим образом

$$\begin{array}{rcl} d^{(k)} & = & h^{\alpha^{(k)}-\alpha^{(r)}}, \quad k = 1, \ldots, r-1, \\ d^{(r)} & = & 1 - d^{(1)} - \ldots - d^{(r-1)}. \end{array} \tag{9}$$

Легко видеть, что $d^{(r)} \to 1$, $d^{(k)} \to 0$, $k = 1, \ldots, r-1$ при $h \to \infty$.

Теорема 3. *В описанной выше дискретной версии $M/G/\infty$–модели при выполнении условий (9) и $M\left(\tau_{on}^{(r)}\right) < \infty$ справедлива следующая асимптотическая оценка для средней доли потерь нагрузки*

$$\lambda_{lossn}^{h} \sim \widetilde{l} \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1}, \quad h \to \infty, \tag{10}$$

где $\widetilde{l} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\lambda \cdot c_0^{(k)} \cdot \nu_*^{\alpha^{(k)}}}{\alpha^{(k)} \cdot (\alpha^{(k)} - 1)}$ *и* $\nu_* = r + \lambda r M\left(\tau_{on}^{(r)}\right) - c$.

Доказательство. Поскольку нас интересует режим большого буфера $h \to \infty$, а веса источников разных типов ведут себя согласно (9), то

$$M\left(\tau_{on}^{*}\right) = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} M\left(\tau_{on}^{(k)}\right) \to M\left(\tau_{on}^{(r)}\right) \;\Rightarrow\; \nu_* \to r + \lambda r M\left(\tau_{on}^{(r)}\right) - c.$$

Теперь для средней величины потерь справедливо

$$\lambda_{lossn}^{h} \sim \lambda \cdot \nu_* \cdot \sum_{k=1}^{r} \sum_{n=\left[\frac{h}{\nu_*}\right]}^{\infty} d^{(k)} P\left(\tau_{on}^{(k)} \geqslant n\right), \quad h \to \infty.$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, устанавливаем справедливость оценок

$$d^{(k)} \cdot \sum_{n=\left[\frac{h}{\nu_*}\right]}^{\infty} P\left(\tau_{on}^{(k)} \geqslant n\right) \geqslant \frac{d^{(k)} \cdot c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)} \cdot (\alpha^{(k)} - 1)} \cdot \left[\frac{h}{\nu_*}\right]^{-\alpha^{(k)}+1},$$

$$d^{(k)} \cdot \sum_{n=\left[\frac{h}{\nu_*}\right]}^{\infty} P\left(\tau_{on}^{(k)} \geqslant n\right) \leqslant \frac{d^{(k)} \cdot c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)} \cdot (\alpha^{(k)} - 1)} \cdot \left(\left[\frac{h}{\nu_*}\right] - 2\right)^{-\alpha^{(k)}+1}.$$

В силу определения $d^{(k)}$ при больших h

$$\frac{d^{(k)} \cdot c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)} \cdot (\alpha^{(k)} - 1)} \cdot \left[\frac{h}{\nu_*}\right]^{-\alpha^{(k)}+1} \sim \frac{c_0^{(k)} \cdot \nu_*^{\alpha^{(k)}-1}}{\alpha^{(k)} \cdot (\alpha^{(k)} - 1)} \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1},$$

$$\frac{d^{(k)} \cdot c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)} \cdot (\alpha^{(k)} - 1)} \cdot \left(\left[\frac{h}{\nu_*}\right] - 2\right)^{-\alpha^{(k)}+1} \sim \frac{c_0^{(k)} \cdot \nu_*^{\alpha^{(k)}-1}}{\alpha^{(k)} \cdot (\alpha^{(k)} - 1)} \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1}.$$

Окончательно получаем

$$\lambda_{lossn}^{h} \sim \left(\lambda \cdot \sum_{k=1}^{r} \frac{c_0^{(k)} \cdot \nu_*^{\alpha^{(k)}}}{\alpha^{(k)} \cdot (\alpha^{(k)} - 1)}\right) \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1} = \widetilde{l} \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1}, \quad h \to \infty.$$

□

Замечание 2. При доказательстве теоремы веса источников были подобраны так, чтобы самые «легкие» заявки играли доминирующую роль в общем потоке. Можно было использовать любую другую нормировку, позволяющую источнику определенного типа нетривиально влиять на характеристики QoS.

Заключение

В данной статье исследовалось асимптотическое поведение средней доли потерянной нагрузки в дискретной неоднородной $M/G/\infty$–модели трафика. Была получена асимптотическая оценка для исследуемого показателя и показано, что при соответствующем выборе частот появления активных периодов с различными распределениями их длин любой источник способен нетривиальным образом влиять на производительность телекоммуникационной системы.

Получившаяся оценка

$$\lambda^h_{loss} \sim l \cdot h^{-\alpha+1}, \quad \lambda^h_{lossn} \sim \widetilde{l} \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1}, \quad h \to \infty,$$

где l и $\widetilde{l}$ есть явно вычисляемые константы, проста и удобна для практического применения. Но в связи с ее асимптотическим характером возникает отдельная интересная задача об установлении величины буфера, начиная с которой данная асимптотика будет справедливой. Решение этой задачи лежит в сфере имитационного моделирования, чему будет посвящена отдельная статья.

Список литературы

[1] D'Apice C., Khokhlov Yu. S., Sidorova O.I. Bounds to buffer–overflow probability in the case of different distributions of system active periods // Transactions of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Peterburg, Russia, June 26–July 2, 2005. Pp. 223–226.

[2] Сидорова О.И. Верхняя и нижняя границы для вероятности потери пакета и вероятности переполнения буфера в модели с неоднородными источниками // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2008. № 11. С. 53–61.

[3] Crovella M., Bestavros A. Self–similarity in world wide web traffic: evidence and possible cases // Proceedings of the 1996 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems. 1996. Vol. 4. Pp. 160–169.

[4] Crovella M., Kim G., Park K. On the relationship between file sizes, transport protocols, and self–similar network traffic // Proceedings of the Fourth International Conference on Network Protocols (ICNP'96). 1996. Pp. 171–180.

[5] Jelenković P.R. Subexponential loss rates in a $GI/GI/1$ queue with applications // Queueing Systems. 1999. Vol. 33. Pp. 91–123.

[6] Jelenković P.R., Lazar A.A. Asymptotic results for multiplexing subexponential on–off processes // Advances in Applied Probability. 1999. Vol. 31, № 2. Pp. 394–421.

[7] Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., Willson D.V. On the self–similar nature of Ethernet traffic (Extended version) // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1994. Vol. 2. Pp. 1–15.

[8] Tsybakov B., Georganas N.D. Selfsimilar traffic and upper bounds to buffer overflow in an ATM queue // Performance Evaluation. 1998. Vol. 36, № 1. Pp. 57–80.

[9] Tsybakov B., Georganas N.D. Overflow and loss probabilities in a finite ATM buffer fed by self–similar traffic // Queueing systems. 1999. Vol. 32. Pp. 233–256.

[10] Tsybakov B., Georganas N.D. Overflow and losses in a network queue with a self–similar input // Queueing systems. 2000. Vol. 35. Pp. 201–235.

Образец цитирования

Сидорова О.И. Средняя доля потерянной нагрузки в дискретной неоднородной $M/G/\infty$–модели // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 31–41. https://doi.org/10.26456/vtpmk492

Сведения об авторах

1. **Сидорова Оксана Игоревна**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

AVERAGE LOSS RATE IN DISCRETE NONHOMOGENEOUS $M/G/\infty$ MODEL

Sidorova Oksana Igorevna
Associate professor at Mathematical Statistics and System Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

Received 05.02.2018, revised 10.03.2018

In this paper we investigate asymptotical behavior of average loss rate in discrete version of $M/G/\infty$–model under assumption that distributions of active periods lenghtes belong to the set consisting of finite number distributions with different regularly varying tails. We indicate some conditions under which influence of each distribution on system performance measures is nontrivial.

Keywords: long–range dependence, heavy–tailed distributions, $M/G/\infty$ arrival process, *ON/OFF*–process, finite buffer, average loss rate.

Citation

Sidorova O.I. Average loss rate in discrete nonhomogeneous $M/G/\infty$ model. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 1, pp. 31–41. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk492

References

[1] D'Apice C., Khokhlov Yu. S., Sidorova O.I. Bounds to buffer–overflow probability in the case of different distributions of system active periods. *Transactions of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation*. St. Peterburg, Russia, June 26–July 2, 2005. Pp. 223–226.

[2] Sidorova O.I. Upper and lower bounds for the probability of packet loss and the probability of buffer overflow in a model with heterogeneous sources. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2008, no. 11, pp. 53–61. (in Russian).

[3] Crovella M., Bestavros A. Self–similarity in world wide web traffic: evidence and possible cases. *Proceedings of the 1996 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems*, 1996, vol. 4, pp. 160–169.

[4] Crovella M., Kim G., Park K. On the relationship between file sizes, transport protocols, and self–similar network traffic. *Proceedings of the Fourth International Conference on Network Protocols (ICNP'96)*, 1996, pp. 171–180.

[5] Jelenković P.R. Subexponential loss rates in a $GI/GI/1$ queue with applications. *Queueing Systems*, 1999, vol. 33, pp. 91–123.

[6] Jelenković P.R., Lazar A.A. Asymptotic results for multiplexing subexponential on–off processes. *Advances in Applied Probability*, 1999, vol. 31(2), pp. 394–421.

[7] Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., Willson D.V. On the self–similar nature of Ethernet traffic (Extended version). *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1994, vol. 2, pp. 1–15.

[8] Tsybakov B., Georganas N.D. Selfsimilar traffic and upper bounds to buffer overflow in an ATM queue. *Performance Evaluation*, 1998, vol. 36(1), pp. 57–80.

[9] Tsybakov B., Georganas N.D. Overflow and loss probabilities in a finite ATM buffer fed by self–similar traffic. *Queueing systems*, 1999, vol. 32, pp. 233–256.

[10] Tsybakov B., Georganas N.D. Overflow and losses in a network queue with a self–similar input. *Queueing systems*, 2000, vol. 35, pp. 201–235.